**Iliana Dumitrescu**

# MATEMATICĂ

## PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNT PRIMAR ȘI PREȘCOLAR

### METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

ANUL II

## Cuprins

**COMPETENȚE vizate**

- **Rezolvarea de probleme prin diverse metode aritmetice**
- **Compunerea de probleme pornind de la date sau reprezentări grafice**
- **Interpretarea rezultatelor unor probleme**
- **Dezvoltarea unor probleme**

Pentru facilitarea formării acestor competențe, fiecare metodă aritmetică de rezolvare a unei probleme este prezentată în următoarea **structură** logică:

- ✓ **avantajele utilizării metodei**
- ✓ **cuvinte-cheie**
- ✓ **exemplu de problemă care poate fi rezolvată folosind metoda aritmetică**
- ✓ **indicații de rezolvare, etapele rezolvării**
- ✓ **probleme de rezolvat, pe niveluri de complexitate**

| **Avantajele metodei** | **Cuvinte-cheie** |
|---|---|
| **Observare și învățare prin descoperire** | |
| **Exersare prin aplicare** | |

## I. METODA FIGURATIVĂ

**DE CE?/ AVANTAJE**

Prin reprezentare grafică / desen,
► poți vedea mult mai repede rezolvarea unei probleme,
► poți înțelege mai ușor relațiile dintre mărimi.

**CUVINTE CHEIE**

● problemă ●metoda figurativă / grafică ● etape în rezolvarea unei probleme ● segmente ● părți egale ● sumă ● diferență ● cât ● rest ● produs

**Metoda figurativă** sau **grafică** presupune **reprezentarea din desen** a datelor problemei.

Există mai multe **tipuri de probleme** care se pot rezolva prin metoda figurativă:

- Aflarea a două numere cunoscând suma și diferența lor
- Aflarea a două numere cunoscând suma și câtul lor
- Aflarea a două numere cunoscând diferența și câtul lor
- Alte probleme

### 1.1. AFLAREA A DOUĂ NUMERE CUNOSCÂND SUMA ȘI DIFERENȚA LOR

**Identificarea datelor problemei** se poate face oral sau în scris. Dacă problema este prezentată în scris, foarte utilă este citirea acesteia însoțită de realizarea de însemnări pe textul problemei. Putem identifica:

- mărimile și / sau unitățile de măsură pentru acestea;
- cuvintele sau expresiile care indică operațiile ce urmează a fi efectuate.

✓ **Date + Desen**
✓ **Plan**
✓ **Rezolvare**
✓ **Răspuns**
✓ **Exercițiul problemei**
✓ ***Altă rezolvare/**
✓ ***Altă întrebare**

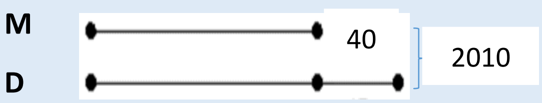
## OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

Observă **etapele rezolvării unei probleme** prin **metoda figurativă.**

*Exemplu rezolvat*

*Împreună, Mihai și Dana au economisit 2010 lei. Dana are cu 40 de lei mai mult decât Mihai. Câți lei a economisit fiecare copil?*

**Rezolvarea 1**

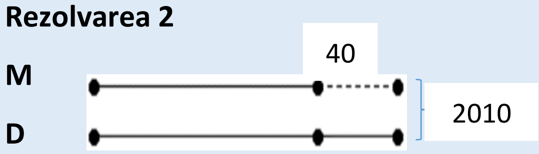



**Egalarea părților prin eliminarea plusului**

1) 2010 – 40 = 1970 (dublul sumei lui Mihai)
2) 1970 : 2 = 985 (Mihai)
3) 985 + 40 = 1025 (Dana)

Răspuns: 985 lei; 1025 lei

**Rezolvarea 2**




**Egalarea părților prin adăugarea plusului**

1) 2010 + 40 = 2050 (dublul sumei Danei)
2) 2050 : 2 = 1025 (Dana)
3) 1025 - 40 = 985 (Mihai)

Răspuns: 985 lei; 1025 lei

În ambele moduri de rezolvare, ideea reprezentată prin desen este **obținerea de părți egale**, fie prin eliminarea plusului, fie prin adăugarea acestuia. După obținerea părților egale, se poate afla valoarea unei părți, prin împărțire.

**Detalierea etapelor de rezolvare**

**Reprezentarea grafică a datelor problemei**

1) notarea necunoscutelor, cu litere, una sub cealaltă;
2) marcarea capetelor segmentelor, în dreptul fiecărei necunoscute;
3) trasarea segmentului mai mic, corespunzător necunoscutei cu valoare mai mică;
4) trasarea segmentului mai mare, corespunzător necunoscutei cu valoare mai mare;
5) marcarea diferenței dintre cele două necunoscute și notarea valorii acesteia;
6) marcarea sumei celor două necunoscute și notarea valorii acesteia.

**Efectuarea calculelor, folosind reprezentarea grafică**

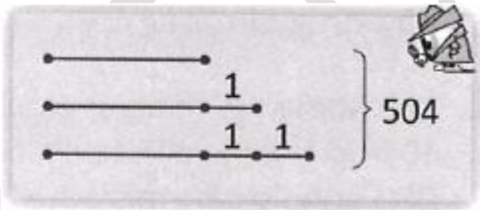
7) egalarea părților:

a) prin eliminarea plusului: scăzând cei 40 de lei, cât are mai mult Dana față de Mihai, obținem două părți egale cu suma lui Mihai (necunoscuta cu valoare mai mică);
b) prin adăugarea plusului: adunând cei 40 de lei, cât are mai mult Dana față de Mihai, obținem două părți egale cu suma Danei (necunoscuta cu valoare mai mare);

8) numărarea părților egale;
9) aflarea unei părți, prin împărțirea la numărul părților egale;
10) aflarea celeilalte necunoscute.

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. Suma a două numere este 126, iar diferența lor este o cincime din 75. Află numerele.
2. Suma a trei numere consecutive este 504. Care sunt aceste numere?




3. Află patru numere pare consecutive, știind că suma lor este un pătrat perfect de tipul $\overline{7ab6}$.
4. Compune și rezolvă o problemă de aflare a două (sau trei) numere, cunoscând suma și diferența lor.
5. Doi frați au împreună 50 de ani. Când cel mare avea 15 ani, cel mic avea 11 ani. Câți ani are fiecare acum?
6. Tata, mama și fiica au împreună 135 de ani. Tatăl este mai în vârstă decât mama cu 7 ani, iar mama avea 25 de ani la nașterea fetei. Câți ani are fiecare?
7. Mama, tata și fiul au împreună 95 de ani. Tatăl și fiul au împreună 55 de ani, iar mama și fiul 50 de ani. Câți ani are fiecare?
8. Tata are 42 de ani, iar fiul are 15 ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi dublul vârstei fiului?
9. O lingură și o linguriță costă 21 de lei, o linguriță și o furculiță costă 15 lei, iar o lingură și o furculiță costă 24 de lei. Ce preț are fiecare tacâm?

## 1.2. AFLAREA A DOUĂ NUMERE CUNOSCÂND SUMA ȘI CÂTUL LOR

### OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

**Exemplu rezolvat**

*Într-o fructieră sunt mere și prune. Numărul merelor este de 3 ori mai mic decât numărul prunelor, iar în total sunt 24 de fructe.*

*Câte fructe sunt din fiecare fel?*

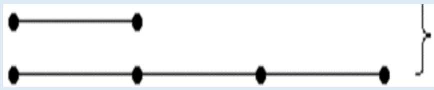
Completează datele problemei și continuă rezolvarea.

**Datele problemei**

m + p =

<u>p : m =</u>

…

m
p

24

**Rezolvare**

1 + 3 = 4 (părți egale)

24 : 4 = 6 (mere)

6 x 3 = 18 (prune)

Răspuns: 6 mere; 18 prune

**Exercițiul problemei**:

…

În cazul acestui tip de problemă, reprezentarea grafică trebuie să ne conducă la aflarea numărului de părți egale.

**Detalierea etapelor de rezolvare**

**Reprezentarea grafică a datelor problemei**

1) notarea necunoscutelor, cu litere, una sub cealaltă;
2) marcarea capetelor segmentelor, în dreptul fiecărei necunoscute;
3) trasarea segmentului mai mic, corespunzător necunoscutei cu valoare mai mică;
4) trasarea segmentului mai mare, corespunzător necunoscutei cu valoare mai mare, prin repetarea segmentului mai mic;
5) marcarea <u>sumei</u> celor două necunoscute și notarea valorii acesteia.

**Efectuarea calculelor, folosind reprezentarea grafică**

6) numărarea părților egale din care este alcătuită <u>suma dată</u>;

7) aflarea unei părți (necunoscuta cu valoare mai mică), prin împărțirea <u>sumei</u> la numărul părților egale;
8) aflarea celeilalte necunoscute.

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. <u>Suma</u> a două numere este <u>cel mai mic număr par de 4 cifre distincte</u>, iar <u>câtul</u> lor este 7. Să se afle numerele.
2. Un număr și sfertul lui însumează 325. Care este acest număr?
3. Suma dintre sfertul, jumătatea și dublul unui număr este cel mai mare număr de 4 cifre. Află numărul.
4. Suma a trei numere este 2118. Câtul primelor două este 3, iar al treilea ete dublul celui de al doilea număr. Află cele trei numere.
5. Trei frați, Andrei, Bogdan și Costinel au economisit împreună 190 de lei. Andrei are de 4 ori mai mult decât Bogdan, iar Costinel are cu 10 lei mai mult decât Andrei. Câți lei a economisit fiecare copil?



### 1.3. AFLAREA A DOUĂ NUMERE CUNOSCÂND DIFERENȚA ȘI CÂTUL LOR

## OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

***Exemplu (de) rezolvat***

*Tatăl este mai în vârstă decât fiul cu 30 de ani. Câți ani are fiecare, dacă vârsta fiului este de 4 ori mai mică decât vârsta tatălui?*

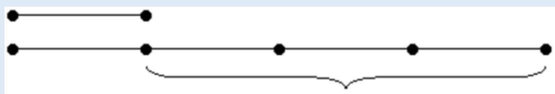
**Datele problemei**

m + p =

<u>p : m =</u>

…

Completează desenul cu datele corecte, apoi continuă rezolvarea.



**Rezolvare**

4 – 1 = 3 (părți egale)

…

Și în cazul acestui tip de problemă, reprezentarea grafică trebuie să ne conducă la aflarea numărului de părți egale. De data aceasta, atenția trebuie concentrată pe <u>marcarea diferenței</u> celor două necunoscute și notarea valorii acesteia, precum și pe <u>numărarea părților egale care alcătuiesc diferența dată</u>.

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. Dănuț și Sorin strâng bani pentru a-și cumpăra fiecare un skateboard electric. Dănuț a strâns de 5 ori mai puțin decât Sorin. Diferența dintre economiile celor doi este de 500 de lei.

   a) Câți lei a strâns fiecare?

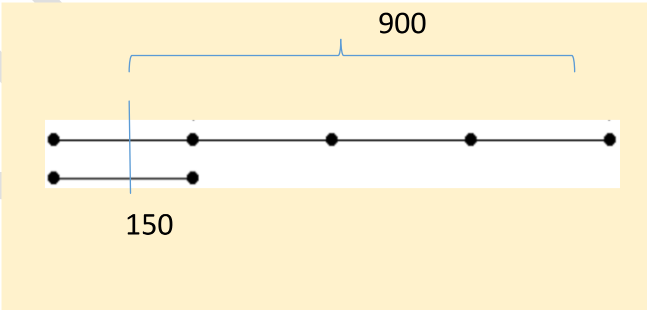
   b) Câți lei trebuie să mai strângă fiecare, dacă un e-skateboard costă 300 euro?

   Considerăm

   1 euro = 4 lei și 50 de bani.

2. Mircea, Petra și Sorina au cules 1400 de nuci. Petra a cules de 4 ori mai multe decât Mircea și cu 50 mai puțin decât Sorina. Câte nuci a cules fiecare copil?

3. Într-un bidon era o cantitate de apă de 4 ori mai mare decât în altul. După ce din primul se consumă 900 ml, iar din al doilea 150 ml, rămân cantități egale. Ce cantitate de apă era în fiecare bidon?




4. mamă are 48 de ani, iar fiica sa are 23 de ani. Cu câți ani în urmă, vârsta mamei era de 6 ori mai mare decât a fiicei sale?

5. Diferența a două numere este 72. Dacă le împărțim, obținem câtul 4 și restul 12. Aflați cele două numere.

6. Un număr este mai mare decât altul cu 124. Al doilea număr, mărit cu 2, este de 3 ori mai mic decât primul. Care sunt cele două numere?

## 1.4. PROBLEME DE GRUPARE A MĂRIMILOR

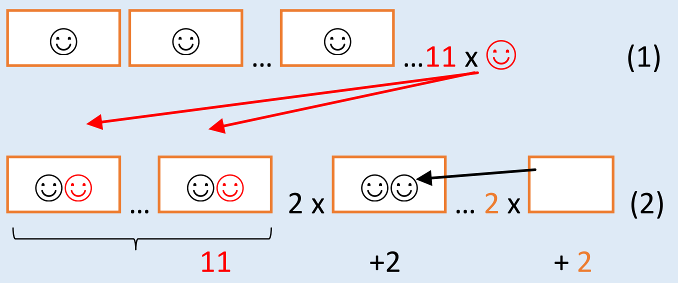
### OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

***Exemplu rezolvat***

*Dacă elevii din clasa lui Matei s-ar așeza câte 1 într-o bancă, 11 dintre ei ar rămâne în picioare. Dacă s-ar așeza câte 2 într-o bancă, ar rămâne 2 bănci libere.*

*Câte bănci sunt în clasa lui Matei?*

**Câți colegi are Matei?*




*(2) Câte bănci vor completa ►elevii rămași în picioare (1); ►elevii care s-au mutat din băncile rămase libere (2)? Câte bănci au rămas libere?

**Reprezentarea grafică** s-a realizat în două etape, corespunzătoare celor două situații descrise în problemă.

Situația (1): în fiecare bancă este câte 1 elev, iar 11 rămân în picioare;

Situația (2): în fiecare bancă ocupată deja de câte 1 elev, se mai așază câte 1 elev, astfel încât să rămână 2 bănci libere. Cum realizăm redistribuirea elevilor în bănci?

- Cei 11 elevi rămași în picioare inițial (situația (1)) se așază câte 1 în băncile deja ocupate de câte 1 coleg. Deci, vor fi sigur 11 bănci cu câte 2 elevi.
- Știm că rămân libere 2 bănci. Pentru a le elibera, cei 2 elevi care stăteau inițial în ele se redistribuie în alte bănci ocupate de câte un elev. Deci, vor mai fi încă 2 bănci cu câte 2 elevi,  pe lângă cele 11 calculate anterior, în total 13 bănci cu câte 2 elevi și 2 bănci libere.
- Calcule corespunzătoare reprezentării grafice:

  11 x 2 + 2 x 2 = 22 + 4 = 26 (elevi)

  11 + 2 + 2 = 15 (bănci)

  Verificare:

  26 – 15 = 11 → *Dacă elevii din clasa lui Matei s-ar așeza câte 1 într-o bancă, 11 dintre ei ar rămâne în picioare.*

26 : 2 = 13

15 – 13 = 2 → *Dacă s-ar așeza câte 2 într-o bancă, ar rămâne 2 bănci libere.*

**EXERSARE PRIN APLICARE**

1. De ziua ei, Ana a primit multe flori. Dacă le așază câte 3 într-o vază, 10 flori rămân fără vază. Dacă le așază câte 5 într-o vază, rămân 2 vaze libere.

   Câte flori a primit Ana și câte vaze avea?

   **Descrie în cuvinte etapele rezolvării problemei.*

fff ... fff   f f f f f f f f f f   (1)

v   v

fffff ...  fffff   (2)

v   v   v  v

**Compune și rezolvă o problemă asemănătoare, schimbând datele numerice ale problemei.*

2. Dacă așezăm câte 3 persoane la o masă, rămân 8 persoane fără mese. Dacă așezăm câte 5 persoane la o masă, rămân 2 mese nefolosite. Câte persoane și câte mese sunt?

## 1.5. COMPUNEREA DE PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODA FIGURATIVĂ

**ETAPE**

1. Alegem mărimile și valorile lor.
2. Stabilim legăturile dintre mărimi:
   a) suma și diferența;
   b) suma și câtul;
   c) diferența și câtul;
   d) modurile de grupare.
3. Formulăm întrebarea/întrebările.

*Exemple*

- Alegem ca mărimi prețul unei păpuși (8 lei) și prețul unei mașinuțe (24 lei).

  **a) Sumă și diferență**

  *O păpușă și o mașinută costă împreună 32 lei (8 + 24). Mașinuța costă cu 16 lei mai mult decât păpușa (24 – 8). Câți lei costă fiecare jucărie?*

**b)** **Sumă și cât**

*O păpușă și o mașinută costă împreună 32 lei (8 + 24). Mașinuța costă de 3 ori mai mult decât păpușa de (24 : 8). Câți lei costă fiecare jucărie?*

**c)** **Diferență și cât**

*O păpușă costă cu 16 lei mai puțin decât o mașinuță (24 - 8). Mașinuța costă de 3 ori mai mult decât păpușa de (24 : 8). Câți lei costă fiecare jucărie?*

- Pentru probleme de grupare a mărimilor, alegem ca mărimi elevi (28) și bănci (18).

d) **Modul de grupare**

*Dacă așezăm câte 1 elev într-o bancă, rămân 10 elevi în picioare (28 – 18). Dacă îi așezăm câte 2 într-o bancă, rămân 4 bănci libere (18 – 28 : 2). Câți elevi și câte bănci sunt în sala de clasă?*

## EXERSARE PRIN APLICARE

- Compuneți și rezolvați probleme prin **metoda figurativă,** câte una pentru fiecare tip de problemă.
- Prezentați etapele elaborării problemei.
- Precizați elementele ”speciale” ale problemei, care ar putea sprijini / îngreuna rezolvarea. Justificați alegerea lor.

## II. METODA COMPARAȚIEI

**DE CE?/ AVANTAJE**

În multe probleme, relațiile dintre mărimi sunt clar formulate: *mai mare, cu atât mai puțin, de atâtea ori mai mic* etc. În unele probleme, relațiile dintre mărimi se deduc din compararea acestora, pentru a vedea care este cauza care duce la diferențierea lor.

**CUVINTE CHEIE**

● problemă ●metoda comparației● etape în rezolvarea unei probleme ● compararea mărimilor ● înmulțire ● scădere ● împărțire

### 2.1. REZOLVAREA DE PROBLEME PRIN METODA COMPARAȚIEI

**Date**
**Plan**
**Rezolvare**
**Răspuns**
**Exercițiul problemei**
***Altă rezolvare/**

### OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

1. Observă **etapele rezolvării unei probleme prin metoda comparației**.

*Exemplu rezolvat*

*Pentru 5 caiete și 7 stilouri s-au plătit 78 lei, iar pentru 5 caiete și 3 stilouri s-au plătit 42 lei.*

*Cât a costat 1 caiet?*

**Datele problemei**

5 c .....7 s ...78 lei (situația 1)

5 c .... 3 s ...42 lei (situația 2)

SAU

| caiete | stilouri | lei |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 78 |
| 5 | 3 | 42 |

**Planul rezolvării**

Comparăm **mărimile**. Constatăm că în ambele situații avem același număr de caiete. Deci, diferența de preț rezultă din diferența numărului de stilouri.

5 c ........7 s .......78 lei

<u>5 c ........ 3 s ... ..42 lei</u> ▶ Efectuăm scăderea.

/ 4 s ......36 lei ▶ Reducem la unitate.

1 s ......36 lei : 4= 9 lei ▶ Preț 1 stilou

3 s ......3 x 9 lei = 27 lei ▶ Preț 3 stilouri

5 c .................42 lei – 27 lei = 15 lei ▶ Preț 5 caiete

1 c .................15 lei : 5 = 3 lei ▶ Preț 1 caiet

Răspuns: 3 lei

**Exercițiul problemei**: [42–3x(78–42):(7-3)]:5=3

Ideea rezolvării prin această metodă constă în ►compararea mărimilor de același fel, ►aducerea unei mărimi la aceeași valoare în două situații diferite, ►eliminarea acesteia, ►compararea mărimilor rămase, pentru a putea stabili de unde provine diferența, urmată de ►reducerea la unitate.

În exemplul dat, se poate observa că numărul caietelor este același în ambele situații (5 caiete), deci diferența de preț rezultă din diferența numărului de stilouri din cele două situații (78 lei – 42 lei ..... 7 s – 3 s). Altfel spus, în a doua situație s-a plătit mai puțin deoarece s-au cumpărat mai puține stilouri. ↓

După efectuarea diferențelor, problema poate fi redusă la următoarea formulare: *Dacă 4 stilouri costă 36 de lei, cât costă 1 stilou?* (problemă de reducere la unitate).

În continuare, se înlocuiește valoarea obținută într-una dintre situații, la alegere, de preferat acolo unde calculul este mai ușor de efectuat (în exemplul dat, s-a înlocuit în situația 2; 3 x 9 lei = 27 lei), apoi se elimină mărimea cu valoarea cunoscută (42 lei – 27 lei = 15 lei) și se ajunge iarăși la formularea unei probleme simple, de reducere la unitate: *Dacă 5 caiete costă 15 lei, cât costă 1 caiet?*

## EXERSARE PRIN APLICARE

2. Formulează probleme, apoi rezolvă-le, parcurgând toate etapele recomandate.
   a) 12 sticle apă.....84 sticle suc .......132 l
      12 sticle apă.....36 sticle suc .........60 l

   b) 11 mingi volei.....18 mingi baschet.....2511 lei
      7 mingi volei.....18 mingi baschet ....2187 lei

## OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

1. a) Urmărește un alt exemplu de problemă care se poate rezolva prin metoda comparației. Continuă rezolvarea, după modelul cunoscut, respectând etapele recomandate.

***Exemplu (de) rezolvat***

*Pentru 34 fulare și 85 căciuli s-au plătit 2244 lei, iar pentru 102 fulare și 102 căciuli s-au plătit 3978 lei.*

*Cât a costat fiecare produs?*

**Datele problemei**

34 f ……. 85 c …….2244 lei (1)

102 f … .102 c …….3978 lei (2)

**Planul rezolvării**

Comparăm **mărimile**. Constatăm că fiecare mărime este exprimată în cantități diferite. Pentru a egala cantitățile unei mărimi, căutăm un ***multiplu comun***: de exemplu, 102 pentru fulare.

34 f …….85 c…….2244 lei / x 3 ►Egalăm numărul de fulare.

102 f ...102 c …..3978 lei

102 f ……. 255 c …….6732 lei

102 f ……..102 c …….3978 lei

/ 153 c ……2754 lei ►Efectuăm scăderea.

…

b) Rezolvă problema egalând numărul de căciuli.

*Care dintre cele două rezolvări ți s-a părut mai ușoară? Argumentează.

## EXERSARE PRIN APLICARE

2. 30 fulare și 55 căciuli au costat 1620 lei, iar 102 fulare și 102 căciuli au costat 3978 lei. Află prețul fiecărui produs.

3. Compune și rezolvă probleme prin metoda comparației, pornind de la schemele date.

a) 14 cutii …. 20 pungi ….780 bomboane
9 cutii ….9 pungi ……360 bomboane

b) 14 pălării ….. 25 șepci ……915 lei
22 pălării …… 8 șepci …….906 lei

c) 9 căni …… 7 pahare ….. 5 l și 500 ml
31 căni …. 14 pahare …14 l și 900 ml

d) 25 x ……….40 y ……..3900
40 x ……….16 y ……..3012

4. O piscină a fost umplută cu bile verzi și roșii. La început s-au adus un sfert din bilele verzi și o treime din bilele roșii, însumând 650 de bile, apoi s-au mai adus câte o cincime din fiecare culoare, însumând 480 de bile. Câte bile din fiecare culoare au fost necesare pentru umplerea piscinei?

5. Află cât cântărește un sac de făină, dacă 5 saci de făină și 7 saci de grâu cântăresc 530 kg, iar 5 saci de grâu cântăresc cât 4 saci de făină.

6. Observă cu atenție datele următoarei probleme. Află prețul pentru 1 kg din fiecare categorie de fructe. Găsește o modalitate de rezolvare prin metoda comparației. Descrie etapele rezolvării.

   4 kg struguri …… 3 kg nuci …..6 kg gutui …. 180 lei (1)

   3 kg struguri …… 5 kg nuci …..2 kg gutui …. 190 lei (2)

   9 kg struguri …… 8 kg nuci …..8 kg gutui …. 382 lei (3)

7. Maria are mere și gutui. Un sfert din numărul de gutui și jumătate din numărul de mere înseamnă 20 de fructe, iar jumătate din numărul de gutui și un sfert din numărul de mere înseamnă 19 fructe.
   Câte gutui și câte mere are Maria?

8. Bunica îi spune Mariei: *Este timpul să înveți și tu rețeta mea de cozonac și plăcintă. Pentru 5 cozonaci și 3 plăcinte, folosesc 21 de ouă. Pentru 3 cozonaci și 2 plăcinte, folosesc 13 ouă. Câte ouă folosesc pentru 1 cozonac? Dar pentru o plăcintă?*

9. a) Compune o problemă după una dintre problemele 6 → 9.
   b) Prezintă modalitatea în care ai realizat-o. Argumentează alegerea tipului de problemă: *De ce ai ales acest tip de problemă? Ce ți s-a părut interesant / provocator?*

## OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

**Eliminarea unei mărimi prin înlocuire**

***Exemplu rezolvat***

*S-au cumpărat 6 kg de mere și 2 kg de nuci, pe care s-a plătit suma de 60 de lei. Știind că 1 kg de nuci costă cât 7 kg de mere, să se calculeze prețul pentru 1 kg de nuci.*

**Datele problemei**

6 kg M..........2 kg N .........60 lei (1)

preț 1 kg N = preț 7 kg M

preț 1 kg N = ?

**Planul rezolvării**

►Comparăm mărimile. Știm că *1 kg de nuci costă cât 7 kg de mere.*

►Înlocuim cantitatea de nuci cu cantitatea corespunzătoare de mere.

1 kg N..........7 kg M

2 kg N..........2 x 7 kg M = 14 kg M

►Reformulăm problema, reducând-o la o singură necunoscută:

6 kg M..........14 kg M .........60 lei

►Calculăm cantitatea de mere obținută prin înlocuire.

6 kg + 14 kg = 20 kg

60 lei : 20 = 3 lei ►Preț 1 kg mere

7 x 3 lei = 21 lei ►Preț 1 kg nuci

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. 10 caiete dictando și 12 blocuri de desen costă 92 de lei. Cât costă 25 de caiete dictando și 25 de blocuri de desen, dacă prețul unui caiet dictando reprezintă 1/3 din prețul unui bloc de desen?

2. Un buchet de flori, conținând 5 garoafe, 3 trandafiri și 7 frezii costă 77 de lei. Un trandafir costă de 3 ori mai mult decât o garoafă, iar o frezie costă cu 2 lei mai mult decât o garoafă. Care este prețul fiecărei flori?

*Dezvoltă problema adăugând o întrebare.

## 2.2. COMPUNEREA DE PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODA COMPARAȚIEI

**ETAPE**

1. Alegem mărimile.
2. Stabilim valoarea unitară pentru fiecare mărime.
3. Stabilim cantitățile și valoarea totală corespunzătoare situației 1.
4. Stabilim cantitățile și valoarea totală corespunzătoare situației 2.
5. Formulăm întrebarea/întrebările.

*Exemplu*

1. Alegem ca mărimi pahare și farfurii.
2. Valoarea unitară: 1 p = 4 lei și 1 f = 5 lei
3. 4 p......... 3 f ....... (4 x 4 lei + 3 x 5 lei = 16 lei + 15 lei =) 31 lei (situația 1)
4. 6 p ........4 f .........(6 x 4 lei + 4 x 5 lei = 24 lei + 20 lei =) 44 lei (situația 2)
5. 6 p și 6 f ...? lei  Dar 3 p și 3 f...? lei

**EXERSARE PRIN APLICARE**

- Compune și rezolvă două probleme prin metoda comparației.
- Prezintă etapele elaborării problemelor.
- Precizează elementele ”speciale” ale problemelor, care ar putea sprijini / îngreuna rezolvarea. Justifică alegerea lor.

# III. METODA MERSULUI INVERS

**DE CE?/ AVANTAJE**

Unele probleme pornesc de la o cantitate necunoscută și indică la final o cantitate concretă. Pornind de la sfârșit către început, poți reface traseul problemei, efectuând operațiile inverse celor indicate în lectura initială a textului.

**CUVINTE CHEIE**

●problemă ●metoda mersului invers ●metoda figurativă / grafică ● etape în rezolvarea unei probleme ● segmente ● părți egale ● rest ● rest din rest

## 3.1. REZOLVAREA DE PROBLEME PRIN METODA MERSULUI INVERS

**OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE**

***Exemplu rezolvat***

*Un ghiozdan costă cu 56 de lei mai mult decât un penar. Prețul ghiozdanului este de 70 de lei. Cât costă penarul?*

**Etape în rezolvarea problemei**

- Identificarea mărimilor

un ghiozdan și un penar

- Stabilirea legăturilor dintre mărimi

Un ghiozdan costă **cu 56 de lei mai mult** decât un penar.

- Citirea problemei de la sfârșit către început, inversând operațiile

Un penar costă **cu 56 de lei mai puțin** decât un ghiozdan.

- Transpunerea problemei în exercițiu și efectuarea calculelor

P + 56 = 70 (G)

70 – 56 = 14 (P)

**Metoda mersului invers** presupune rezolvarea problemei pornind de la sfârșit către început și folosirea operațiilor inverse (scăderea este inversa adunării, împărțirea este inversa înmulțirii).

Exemple: a + 3 = 101   b – 27 = 294   c x 5 = 40   d : 7 = 9

101 – 3 = a      294 + 27 = b      40 : 5 = c      9 x 7 = d

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. Află valoarea lui a, folosind metoda mersului invers.

a) a + 5 = 100      a - 5 = 100      a x 5 = 100      a : 5 =100

b) (a +5) x 3 = 57      a + 306 – 101 = 500      (a – 12) : 65 = 20      a : 2 x 50 : 4 = 100

## OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

*Exemplu rezolvat*

*Un grup de turiști efectuează o excursie de 4 zile. În prima zi (I) parcurg un sfert din lungimea totală a traseului, a doua zi (II) parcurg jumătate din rest, a treia zi (III) jumătate din distanța rămasă, iar a patra zi (IV) ultimii 48 de km.*

*Ce lungime a avut întregul traseu?*

**Datele problemei**

I = un sfert din traseu

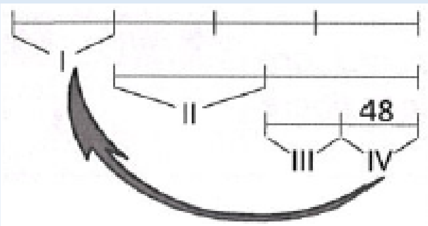
II = jumătate din rest

III = jumătate din noul rest

<u>IV = 48 km = ziua 3</u>

lungimea traseului = ? km

**Reprezentarea grafică**




**Rezolvare**

2 x 48 = 96 (km rămași după a doua zi)

2 x 96 = 192 (km rămași după prima zi)

192 : 3 = 64 (km parcurși în prima zi)

4 x 64 = 256 (km parcurși în total)

**Răspuns**: 256 km

**Exercițiul problemei**

(2 x 48 x 2) : 3 x 4 = 256

## EXERSARE PRIN APLICARE

2. Matei avea în pușculiță o sumă de bani. De la bunica mai primește 50 de lei, apoi cheltuiește 35 de lei pentru un cadou și rămâne cu 100 de lei în pușculiță.

   Câți lei avea Matei în pușculiță?

+      -

Pușculiță **s** lei      Primește 50 lei      Cheltuiește 35 lei      100 lei rămași

-      +

Câți bani avea inițial?
Ce se întâmplă cu suma după ce mai primește?
Ce se întâmplă cu suma după ce cheltuiește?
Cum ar fi fost suma rămasă, dacă nu cheltuia? (> / <)
Cum ar fi fost suma rămasă, dacă nu mai primea? (> / <)

Pornind de la sfârșit spre început, efectuăm <u>operația inversă.</u>

+ ⟵⟶ -   x ⟵⟶ :

3. Ana a citit o carte în cinci zile, astfel:

| | |
|---|---|
| Luni | o cincime din total |
| Marți | o pătrime din rest |
| Miercuri | o treime din rest |
| Joi | jumătate din rest |
| Vineri | ultimele 35 de pagini |

a) Câte pagini a avut cartea?

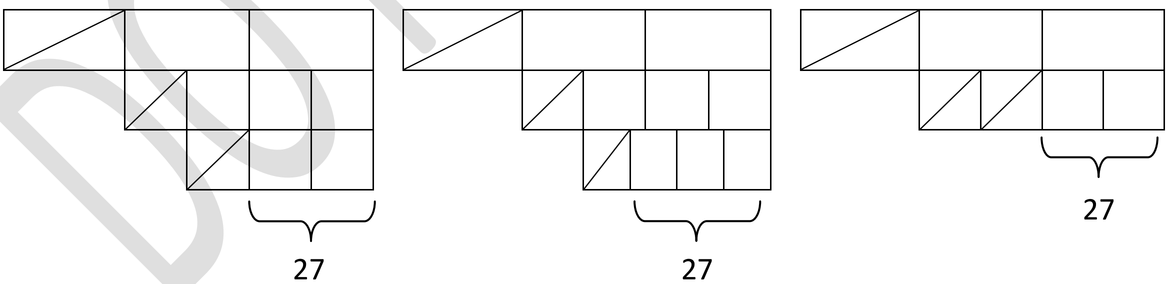
*Ce ai observat interesant la această problemă?

b) Creează o problemă asemănătoare, făcând o singură schimbare, care să modifice rezultatul.

4. Din economiile sale, Andrei cheltuiește o treime pentru o carte, un sfert din rest pentru o jucărie și un sfert din noul rest pentru un cadou. Ce sumă a avut, dacă i-au mai rămas 27 de lei?

Alege reprezentarea corectă, apoi continuă rezolvarea.

a) b) c)




5. Ana a citit o cincime dintr-o carte și încă 60 de pagini, ceea ce reprezintă jumătate din numărul total de pagini. Câte pagini mai are de citit?

6. Află valoarea lui a.

(a x 10 + 10) : 10 – 10 = 10   (b : 2 – 4) x 6 – 8 = 10   (c + 12) x 201 -1002 =21912

**7. Când te-ai născut?**

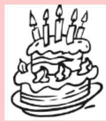
Scrie pe o foaie toate numerele de la 1 la 12. Notează răspunsul lângă numărul cerinței.

Rezultatul ar trebui să fie un număr care conține (de la stânga spre dreapta) luna, ziua și ultimele două cifre ale anului în care te-ai născut.

Ai obținut data la care te-ai născut? Dacă nu, reia pașii pe care i-ai parcurs și găsește greșeala.

*Poți explica de ce această regulă este valabilă, indiferent de data nașterii?

1. Scrie numărul care reprezintă luna în care te-ai născut.
2. Înmulțește-l cu 4.
3. Adună 13.
4. Înmulțește cu 100.
5. Împarte la 4.
6. Scade 200.
7. Adună numărul care reprezintă ziua în care te-ai născut.
8. Înmulțește cu 2.
9. Scade 40.
10. Înmulțește cu 50.
11. Adună numărul format din ultimele 2 cifre ale anului în care te-ai născut.
12. Scade 10500.





8. Gândește-te la un număr întreg oarecare, apoi efectuează următoarele operații:
   1) *Multiplică numărul cu 24.*
   2) *Divide rezultatul cu 3.*
   3) *Multiplică noul rezultat cu 23.*
   4) *Divide cu 4, apoi cu numărul gândit.*
   5) *Adaugă numărul gândit la acest ultim cât și spune rezultatul.*

   *Găsește ”secretul” soluției magice.

9. Ce lungime a avut traseul ales de un ciclist dacă, după ce a parcurs 5/9 din traseu în prima zi, 3/8 din rest a doua zi, 19 km a treia zi, i-au mai rămas de parcurs 26 km?

**10. Află numărul de la pantofi și vârsta!**

Scrie numărul de la pantofi. → Înmulțește-l cu 5. → Adaugă 50. → Înmulțește cu 20. → Adaugă 1015. → Scade numărul anului în care te-ai născut.

## 3.2.COMPUNEREA DE PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODA MERSULUI INVERS

| **Etape** | ***Exemplu*** |
|---|---|
| 1. Alegem mărimea. | 1. pagini dintr-o carte |
| 2. Stabilim valoarea ei totală. | 2. O carte de 240 de pagini |
| 3. Stabilim numărul de etape prin care va trece mărimea și le notăm unele sub altele, pentru reprezentarea grafică a problemei. | 3. este citită de Ana în 4 zile, astfel:<br>I.<br>II.<br>III.<br>IV. |
| 4. Stabilim fracția corespunzătoare cantității pentru prima etapă și o reprezentăm grafic. Marcăm primul rest. | 4. În prima zi a citit 2/5 din total.<br>I. I_____I_____I_____I_____I_____I<br>ziua 1 restul 1 |
| 5. Observăm din ce este alcătuit restul, stabilim convenabil fracția corespunzătoare cantității pentru a doua etapă și o reprezentăm grafic. Marcăm al doilea rest. | 5. A doua zi a citit 1/3 din rest.<br>I. I_____I_____I_____I_____I_____I<br>ziua 1 restul 1<br>II. I_____I_____I_____I<br>ziua 2 restul 2 |
| 6. Observăm din ce este alcătuit noul rest, stabilim convenabil fracția corespunzătoare cantității pentru a treia etapă și o reprezentăm grafic. Marcăm ultimul rest. | 6. A treia zi a citit ¾ din noul rest.<br>III. I__I__I__I__I<br>IV. ziua 3 ziua 4 |
| 7. Precizăm valoarea ultimului rest și o notăm pe desen. | 7. În ultima zi a citit 24 de pagini.<br>IV. I__I__I__I__I<br>24 |
| 8. Formulăm întrebarea problemei. | 8. Câte pagini avea cartea? |
| 9. Verificăm exactitatea datelor problemei, folosind mersul invers. | 9. 24 x 4 = 96 (restul 2)<br>96 : 2 = 48 (pagini citite a doua zi; 1/5 din total)<br>5 x 48 = 240 (pagini în total) |

## EXERSARE PRIN APLICARE

- Compune și rezolvă două probleme prin metoda mersului invers.
- Prezintă etapele elaborării problemelor.
- Precizează elementele ”speciale” ale problemelor, care ar putea sprijini / îngreuna rezolvarea. Justifică alegerea lor.

## IV. METODA REDUCERII LA UNITATE

**DE CE?/ AVANTAJE**

Adeseori ni se prezintă valoarea mai multor produse de același fel, dar noi suntem interesați de o altă cantitate. Metoda reducerii la unitate este o cale ușoară de a afla valoarea cantității care ne interesează.

**CUVINTE CHEIE**

● problemă ●metoda reducerii la unitate ● compararea mărimilor● înmulțire ● împărțire ● exercițiul problemei / rezolvarea printr-un exercițiu

### 4.1. PROBLEME ÎN CARE AMBELE MĂRIMI CRESC SAU SCAD

**OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE**

1. a) Urmărește **etapele rezolvării unei probleme** prin **metoda reducerii la unitate.**

*Exemplu rezolvat*

*Un buchet de 5 crizanteme costă 15 lei.*

*Cât costă un buchet de 9 crizanteme de același fel?*

**Date**

**Plan**

**Rezolvare**

**Răspuns**

**Datele problemei**

5 crizanteme ...........15 lei

9 crizanteme ...........? lei

**Planul rezolvării**

5 crizanteme ...........15 lei

1 crizantemă ........... ? lei → **reducere la unitate**

9 crizanteme ...........? lei

**Rezolvare**

Cât costă o crizantemă? 15 lei : 5 = 3 lei

Cât costă 9 crizanteme? 9 x 3 lei = 27 lei

**SAU**

5 crizanteme ...........15 lei

1 crizantemă ........... 15 lei : 5 = 3 lei

9 crizanteme ........... 9 x 3 lei = 27 lei

**Răspuns**: 27 de lei

**Exercițiul problemei:** 15 : 5 x 9 = 3 x 9 = 27

b) Răspunde la întrebări.

- Ce a însemnat ”reducerea la unitate”?
- La ce folosește aflarea valorii unei ”unități”?
- Ce s-a întâmplat cu prețul, dacă a crescut numărul de crizanteme?
- Cum s-ar fi modificat prețul, dacă ar fi scăzut numărul de crizanteme?

**Metoda reducerii la unitate** constă în:

- identificarea mărimilor date în problemă;
- stabilirea dependenței dintre mărimi (mărimi direct sau invers proporționale);
- aflarea valorii unei unități de mărime;
- efectuarea calculelor pentru aflarea necunoscutei.

Două mărimi sunt **direct proporționale** atunci când cresc sau scad în același timp.

Două mărimi sunt **invers proporționale** atunci când creșterea uneia determină scăderea celeilalte sau invers.

## EXERSARE PRIN APLICARE

2. Rezolvă problema prin metoda reducerii la unitate. *Găsește și alt mod de rezolvare.
   Din 10 kg de roșii, se pot obține 5 l de suc de roșii.
   a) Câți litri de suc de roșii se pot obține dacă se triplează cantitatea de roșii?
   b) Dar dacă se înjumătățește cantitatea de roșii?

3. Alege răspunsul corect.
   3 mingi de tenis costă 12 lei. Cât costă 30 mingi de tenis, de același fel?
   a) 120 lei b) 40 lei c) 400 lei d) 90 lei

4. Observă cu atenție factura de mai jos.
   a) Formulează o problemă, urmărind completarea datelor șterse.
   b) Pentru dezvoltarea problemei, adaugă două întrebări și rezolvările corespunzătoare.

| Nr. crt. | Denumire produs | U.M.[1] | Cantitate | Preț unitar[2] | Valoare | %TVA[3] | TVA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Display cu touchscreen | buc. | 250 | | 72 000 lei | 20% | |
| 2. | Display – IPad Mini | buc. | 125 | | 25 375 lei | 20% | |
| | | | | Subtotal | 97 375 lei | | |
| | | | | Total factură | lei | | |

[1] Unitate de măsură [2] Prețul unui produs [3] Taxa pe valoare adăugată

5. Din 6 m de pânză pot fi confecționate 8 cămăși. Câți metri de pânză sunt necesari pentru a confecționa 100 de cămăși?

### 4.2. PROBLEME ÎN CARE O MĂRIME CREȘTE ȘI CEALALTĂ SCADE SAU O MĂRIME SCADE ȘI CEALALTĂ CREȘTE

| *Exemplu rezolvat* | **Planul rezolvării** |
|---|---|
| *8 constructori zidesc o casă în 6 zile. În câte zile ar fi zidit aceeași casă 12 constructori, lucrând în același ritm?* | 8 constructori ……6 zile<br>1 constructor …… 8 x 6 zile →reducere la unitate<br>12 constructori …..(8 x 6 zile) : 12 = 4 zile |
| **Datele problemei**<br>8 constructori ………..6 zile<br>12 constructori ………..? zile | **Răspuns**: 4 zile<br>**Exercițiul problemei:** (8 x 6) : 12 = 4 |

| *Tipuri de probleme* / *Cum gândim? Etape în* | ***A. Probleme în care ambele mărimi cresc sau scad*** | ***B. Probleme în care o mărime crește și cealaltă scade sau invers*** |
|---|---|---|
| | *4 caiete de același fel costă 20 de lei. Cât costă 7 caiete de același* | *3 combine pot treiera un lan de grâu în 2 ore. În cât timp ar* |

| ***rezolvarea problemei*** | *fel?* | *putea treiera același lan 5 combine?* |
|---|---|---|
| *Identificarea mărimilor și notarea datelor problemei* | *4 caiete ............20 de lei*<br>*7 caiete .............? lei* | *3 combine ......2 ore*<br>*2 combine ......? ore* |
| *Analizarea dependenței dintre mărimi* | *Mai multe caiete vor costa mai mult, iar mai puține caiete vor costa mai puțin.* | *Mai multe combine vor termina într-un timp mai scurt, iar mai puține combine vor avea nevoie de mai multe ore pentru a termina lanul.* |
| *Reducerea la unitate* | *Dacă 4 caiete costă 20 de lei, 1 caiet va costa de 4 ori mai puțin. Utilizăm împărțirea.*<br>*4 caiete ...........20 de lei*<br>*1 caiet ...........20 lei :4 = 5 lei* | *Dacă 3 combine treieră tot lanul în 2 ore, atunci 1 combină va avea nevoie de 3 ori mai multe ore.*<br>*Utilizăm înmulțirea.*<br>*3 combine ......2 ore*<br>*1 combină ...3 x 2 ore = 6 ore* |
| *Aflarea răspunsului la întrebarea problemei* | *7 caiete vor costa de 7 ori mai mult decât 1 caiet.*<br>*4 caiete ...........20 de lei*<br>*1 caiet ........... 5 lei*<br>*7 caiete ..........7x5lei = 35 lei* | *2 combine termină de 2 ori mai repede decât 1 combină.*<br>*3 combine ......2 ore*<br>*1 combină ......6 ore*<br>*2 combine .....6ore:2=3 ore* |

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. 5 utilaje asfaltează un drum în 48 de ore. În cât timp s-ar fi terminat asfaltarea aceluiași drum dacă se foloseau 8 utilaje de același fel? Dar dacă se foloseau doar 3 utilaje?

2. 12 tractoare ară un ogor în 8 ore. Lucrând în același ritm, în câte ore ar putea termina de arat același ogor 8 tractoare? Dar 3 tractoare?
3. Formulează probleme, apoi rezolvă-le în două moduri.
   a) 3 mingi de fotbal……165 lei
   24 mingi de fotbal……? lei
   b) 16 kg de prune…….12 kg de gem
   8 kg de prune…… ? kg de gem
   c) 30 copii……….. 18 kg mușețel
   25 de copii….? kg

### 4.3. PROBLEME DE REDUCERE LA UNITATE ÎN CARE INTERVIN 3 MĂRIMI

#### OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

1. Observă planul rezolvării următoarei probleme, apoi scrie rezolvarea formulând întrebări pentru fiecare pas.

*6 copii confecționează în mod egal, în 2 zile, 24 ornamente pentru pomul de Crăciun.*

*Câte ornamente vor confecționa 25 de copii în 5 zile, lucrând în mod egal?*

**Datele problemei**

6 copii ……2 zile …..24 ornamente

25 copii ……5 zile ……? ornamente

**Planul rezolvării**

| copii | zile | ornamente | Explicație |
|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 24 | 6 copii, în 2 zile, fac 24 de ornamente |
| 1 | 2 | 24 : 6 | 1 copil, în 2 zile, face de 6 ori mai puține ornamente, adică 4 ornamente |
| 1 | 1 | 24 : 6 : 2 | 1 copil, într-o zi, face de 2 ori mai puține ornamente decât în 2 zile, adică 2 ornamente |
| 25 | 1 | (24 : 6 : 2) x 25 | 25 de copii, într-o zi, fac de 25 de ori mai mult decât 1 copil, adică 50 ornamente |
| 25 | 5 | (24 : 6 : 2) x 25x5 | 25 de copii, în 5 zile, fac de 5 de ori mai mult decât într-o zi, adică 250 ornamente |

2. Pentru a săpa 16 m de șanț, 4 muncitori, lucrând în același ritm, au nevoie de 2 ore. Câți metri vor săpa, în același ritm, 12 muncitori, în 3 ore? Rezolvă, parcurgând toate etapele recomandate.

## 5.4. COMPUNEREA DE PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODA REDUCERII LA UNITATE

| **Etape** | ***Exemplu*** |
|---|---|
| 1. Alegem mărimile. | 1. Aluat, plăcinte |
| 2. Stabilim valoarea unitară pentru o mărime. | 2. 1 plăcintă ... 600 g aluat |
| 3. Stabilim valorile pentru prima situație. | 3. 5 plăcinte ....5 x 600 g = 3 000 g = 3 kg |
| 4. Formulăm enunțul. | 4. Din 3 kg de aluat se pot face 5 plăcinte. |
| 5. Formulăm întrebarea problemei. | 5. Cât aluat trebuie pentru 8 plăcinte? |
| 6. Aflăm răspunsul. | 6. 8 x 600 g = 4 800 g = 4 kg și 800 g |

### EXERSARE PRIN APLICARE

- Compune și rezolvă două probleme prin metoda reducerii la unitate.
- Prezintă etapele elaborării problemelor.
- Precizează elementele ”speciale” ale problemelor, care ar putea sprijini / îngreuna rezolvarea. Justifică alegerea lor.

## V. METODA FALSEI IPOTEZE

**DE CE?/ AVANTAJE**

Există situații când cunoști cantitatea totală și categoriile de produse, dar nu cunoști cantitatea pe categorii de produse. Astfel de probleme pot fi rezolvate cu metoda falsei ipoteze.

**CUVINTE CHEIE**

●problemă ●metoda falsei ipoteze ● presupunere ● etape în rezolvarea unei probleme ● înmulțire ● diferență ● împărțire ● procente ● fracții

### 5.1. REZOLVAREA DE PROBLEME PRIN METODA FALSEI IPOTEZE

**OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE**

***Exemplu rezolvat***

*360 kg de miere s-au turnat in 12 bidoane, unele de 40 kg, altele de 25 kg.*

*Câte bidoane de fiecare fel au fost folosite?*

**Rezolvarea 1**

- Presupunem că s-au folosit doar bidoane de 40 kg.

  12 x 40 kg = 480 kg

- Constatăm că există o diferență între cantitatea avută și cea obținută.

  480 kg – 360 kg = 120 kg

De ce a apărut această diferență?

Deoarece nu toate bidoanele au fost de 40 kg, ceea ce înseamnă că este nevoie să înlocuim unele bidoane de 40 kg cu altele de 25 kg.

Câte vom înlocui?

- Calculăm diferența dintre capacitățile celor două tipuri de bidoane.

  40 kg – 25 kg = 15 kg

- Calculăm câte înlocuiri sunt posibile.

  120 kg : 15 = 8 (bidoane de 25 kg)

- Calculăm numărul de bidoane din a doua categorie.

  12 – 8 = 4 (bidoane de 40 kg)

Sugestii pentru **Rezolvarea 2**

Presupunem că se folosesc doar bidoane de 25 kg.

12 x 25 kg = 300 kg

360 kg – 300 kg = 60 kg

60 kg : 15 kg = 4 (bidoane de 40 kg)

12 – 4 = 8 (bidoane de 25 kg)

**Verificare**: 4 x 40 + 8 x 25 = 160 + 200 = 360

**Răspuns**: 4 bidoane; 8 bidoane

## EXERSARE PRIN APLICARE

1. Un fermier a cules într-o zi 948 kg de gutui, pe care le-a ambalat în 55 de lăzi de câte 12 kg și 20 kg.

   Câte lăzi de fiecare fel a folosit?

   a) Rezolvă în două moduri.

   b) Ce reprezintă rezultatul fiecărui exercițiu?

      [(55 x 20) - 948] : (20 – 12) =

      [948 - (55 x 12)] : (20 – 12) =

2. O sumă de 3400 de lei este plătită cu 30 de bancnote de câte 200 lei și 100 lei.

   Câte bancnote de fiecare fel s-au folosit?

   a) Rezolvă în două moduri.

   b) Schimbă una dintre datele numerice ale problemei și scrie rezolvarea pentru noua problemă.

3. Într-un bloc sunt 196 de apartamente, cu 2 și cu 3 camere. În total, sunt 438 de camere.

   Câte apartamente cu 2 camere sunt în acel bloc? Dar cu 3 camere?

4. Din 87 de crizanteme, Ana trebuie să obțină 15 buchete de câte 5, respectiv 7 crizanteme. Cum va proceda?

5. În curtea unui gospodar sunt 108 păsări și oi, care, în total, au 380 de picioare.

   a) Câte păsări și câte oi sunt?

   b) Cu câte oi rămâne după ce vinde 50% din ele?

   c) Câte ouă a obținut în luna septembrie, dacă 50% din păsări au ouat câte 1 ou pe zi?

6. La o fermă avicolă, ouăle sunt ambalate în 61 de cartoane de câte 30 sau 24 ouă. Câte cartoane de fiecare fel se folosesc într-o zi, pentru ambalarea unui număr de 1710 ouă?

7. Porumbul recoltat de un gospodar este depozitat în saci de 35 kg, respectiv 50 kg. Câți saci de fiecare fel a umplut gospodarul, știind că a folosit 86 de saci, pentru 1 tonă și 450 kg?

8. 1968 bomboane sunt așezate în 75 cutii de câte 24 sau 36 de bomboane. Câte cutii de fiecare fel s-au folosit?

9. Imaginează-ți că trebuie să așezi 210 de nuci în 5 pungi, câte 30 sau câte 50 nuci în fiecare pungă. Câte pungi vor fi cu câte 30 de nuci? Dar cu câte 50 de nuci?
   a) Rezolvă problema folosind metoda falsei ipoteze.
   b) Mărește de 10 ori numărul de nuci și numărul de pungi. Cum se modifică rezultatele?

10. Un grup de 52 de turiști urcă cu telecabina din Bușteni pentru a vizita Babele. Un bilet Bușteni – Babele – Bușteni costă 70 lei pentru adulți și 38 lei pentru copii.
   a) Câți adulți și câți copii erau în grup, dacă pentru toți s-a plătit suma de 3192 lei?
   b) Plata biletelor s-a efectuat folosind 56 de bancnote de 100 lei și de 50 lei primindu-se un rest de 58 de lei. Câte bancnote de 100 lei s-au folosit? Dar de 50 lei?
   c) Știind că restul a fost primit în 13 bancnote de 10 lei și de 1 leu, află câte bancnote de fiecare fel s-au primit.

11. Dacă ar cumpăra 5 crizanteme și 7 trandafiri, Mircea ar trebui să aibă 78 lei, iar dacă ar alege 7 crizanteme și 5 trandafiri, ar trebui să plătească cu 12 lei mai puțin. Câte crizanteme și câți trandafiri a cumpărat Mircea, dacă a plătit 126 lei pentru 20 de flori? Rezolvă problema folosind combinat metoda comparației și metoda falsei ipoteze.

## 5.2. COMPUNEREA DE PROBLEME CARE SE REZOLVĂ PRIN METODA FALSEI IPOTEZE

| **Etape** | ***Exemplu*** |
|---|---|
| 1. Alegem mărimile. | 1. Oi și gâște |
| 2. Stabilim cantitățile / valorile numerice. | 2. 15 oi și 22 de gâște |
| 3. Alegem un element comun celor două mărimi, pe care îl au în același număr. | 3. Toate au capete. |
| 4. Calculăm suma. | 4. 15 + 22 = 37 (total capete) |
| 5. Alegem un alt element comun, pe care îl au în număr diferit. | 5. Toate au picioare, dar oile au câte 4, iar gâștele câte 2. |
| 6. Calculăm suma. | 6. 15 x 4 + 22 x 2 = 60 + 44 = 104 (total picioare) |
| 7. Formulăm enunțul. | 7. Într-o curte sunt oi și gâște, având în total 37 de capete și 104 picioare. |
| 8. Formulăm întrebarea problemei. | 8. Câte oi și câte gâște sunt în curte? |

### EXERSARE PRIN APLICARE

- Compune și rezolvă două probleme prin metoda falsei ipoteze.
- Prezintă etapele elaborării problemelor.
- Precizează elementele ”speciale” ale problemelor, care ar putea sprijini / îngreuna rezolvarea. Justifică alegerea lor.

# VI. PROBLEME DE MIȘCARE

**DE CE?/ AVANTAJE**

Deplasarea între două locații este o necesitate pentru persoanele de orice vârstă. Pe jos sau cu diverse mijloace de transport, deplasarea presupune o bună gestionare a resurselor de timp, combustibil, bani.

**CUVINTE CHEIE**

●problemă ●viteză ● distanță ● timp ● etape în rezolvarea unei probleme ● înmulțire ● diferență ● împărțire ● procente ● fracții

Problemele de mișcare presupun mișcarea rectilinie[1] și uniformă[2] a unui mobil (bicicletă, motocicletă, autoturism, tren, avion etc.), exprimată prin legea:

**distanța = viteză x timp.**

$$d = v \cdot t$$

Clasificarea problemelor de mișcare

| Criterii | Tipuri de probleme de mișcare |
|---|---|
| 1) sensul mișcării | 1) probleme în care mobilele se deplasează în același sens (probleme de urmărire)<br><br>2) probleme în care mobilele se deplasează în sens contrar<br> |
| 2) datele cunoscute | 1) probleme în care se dau viteza și timpul și se cere distanța **($d = v \cdot t$)**<br>2) probleme în care se dau distanța și timpul și se cere viteza **($v = d / t$)**<br>3) probleme în care se dau distanța și viteza și se cere timpul **($t = d / v$)** |

[1] rectilinie = în linie dreaptă
[2] uniformă = constantă, fără variații; care are aceeași viteză pe toată întinderea sau durata deplasării

## 6.1. PROBLEME ÎN CARE MOBILELE SE DEPLASEAZĂ ÎN ACELAȘI SENS

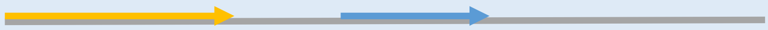
### OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

*Exemplu rezolvat*

Doi motocicliști pleacă în același timp și în același sens din două localități diferite, A și B, situate pe aceeași șosea. Distanța dintre cele două localități este de 30 km. Cel care pleacă din A circulă cu o viteză de 70 km/oră, iar cel care pleacă din B, circulă cu o viteză de 60 km/oră. După cât timp îl ajunge motociclistul care pleacă din A pe cel care pleacă din B?

**Reprezentarea grafică a datelor problemei**

A 30 km B



v1 = 70 km/h v2 = 60 km/h

**Plan și rezolvare**

| | |
|---|---|
| Ce distanță recuperează motociclistul din A într-o oră?<br>70 km – 60 km = 10 km | Comparăm vitezele și observăm că, într-o oră, motociclistul care pleacă din A se apropie de celălalt cu 70 km – 60 km = 10 km. Altfel spus, după o oră, distanța dintre cei doi se micșorează cu 10 km. Generalizând, după plecare, distanța dintre cei doi motocicliști se micșorează cu 10 km/h. |
| În cât timp va recupera întreaga distanță motociclistul din A?<br>30 km : 10 km = 3<br>**Răspuns**: 3 ore | Deci, motociclistul care pleacă din A îl ajunge pe cel care pleacă din B după 3 ore. |

### EXERSARE PRIN APLICARE

1. Distanța Bucureşti – Ploieşti este de 60 Km. Din cele două oraşe pleacă în acelaşi timp două trenuri mergând în acelaşi sens. Cel care pleacă din Bucureşti merge cu viteza de 100 km/oră, iar cel care porneşte din Ploieşti cu 80 km/oră. După cât timp îl va ajunge primul tren pe al doilea?

2. Doi pietoni parcurg distanța dintre două localități, A şi B, pornind în acelaşi timp din A. Primul pieton a ajuns în B cu 2 ore mai târziu decât al doilea. Viteza primului pieton a fost de 3 km/oră, iar a celui de-al doilea de 5 km/oră. Să se determine distanța dintre cele două localități.

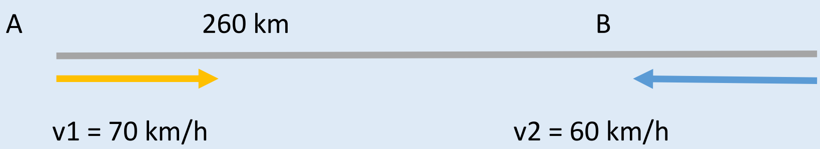
## 6.2. PROBLEME ÎN CARE MOBILELE SE DEPLASEAZĂ ÎN SENS CONTRAR

### OBSERVARE ȘI ÎNVĂȚARE PRIN DESCOPERIRE

***Exemplu rezolvat***

*Doi motocicliști pleacă în același timp, unul către celălalt, din două localități diferite, A și B, situate pe aceeași șosea. Distanța dintre cele două localități este de 260 km. Cel care pleacă din A circulă cu o viteză de 70 km/oră, iar cel care pleacă din B, circulă cu o viteză de 60 km/oră. După cât timp se vor întâlni?*

**Reprezentarea grafică a datelor problemei**




**Plan și rezolvare**

| | |
|---|---|
| Ce distanță recuperează motocicliștii într-o oră?<br>70 km + 60 km = 130 km | După o oră, distanța dintre cei doi se micșorează cu 70 km + 60 km = 130 km. Generalizând, după plecare, distanța dintre cei doi motocicliști se micșorează cu 130 km/h. |
| După cât timp se vor întâlni (d = 0)?<br>260 km : 130 km = 2<br>Răspuns: 2 ore | De câte ori se cuprind cei 130 km, parcurși într-o oră, în distanța totală, de 260 km? |

### EXERSARE PRIN APLICARE

1. Distanța dintre două localități este de 620 km. Două automobile pornesc unul spre celălalt, în același timp, și se întâlnesc după 4 ore. Știind că viteza unuia este cu 5 km/h mai mare decât a celuilalt, să se afle în cât timp parcurge fiecare întreaga distanță.

   * *Cum putem dezvolta această problemă?*

2. Doi biciclişti pleacă în acelaşi timp, Aurel din oraşul A, iar Bogdan din oraşul B. Aurel se deplasează cu o viteză medie de 25 km/oră, iar Bogdan are o viteză mai mare cu 2 km/oră. Distanța dintre cele două oraşe este de 260 km. După cât timp şi la ce distanţă de oraşul A se vor întâlni?

3. Un pieton pleacă din orașul A spre orașul B, deplasându-se cu o viteză de 4 km/h. In același moment, un biciclist pleacă din B spre A, cu viteza de 22 km/h. Distanța dintre orașele A și B este de 130 km.
   După cât timp se întâlnește pietonul cu biciclistul? La ce distanță de orașul B se întâlnesc?

4. Un tren pleacă din Bacău spre București la ora 11:20, cu viteza de 75 km/h. Un alt tren pleacă din București spre Bacău la ora 11:40, cu viteza de 80 km/h. Distanța dintre gările Bacău și București este de 335 km. La ce oră și la ce distanță față de punctele lor de plecare se întâlnesc cele două trenuri?

## AM ÎNVĂȚAT DESPRE...

1. Pentru 6 porții de găluște din cartofi cu brânză și ceapă sunt necesare: 900 g cartofi, 360 g făină, 300 g brânză de vaci, 300 g ceapă, 240 g unt. Ce cantități sunt necesare pentru 10 porții?

2. Trei torturi cântăresc 7 kg și 200 g. Cel de ciocolată cântărește de 3 ori mai mult decât cel de frișcă, iar cel de fructe cântărește cu 700 g mai mult decât cel de frișcă.
   a) Cât cântărește fiecare tort?
   b) Cât costă fiecare tort, dacă prețurile sunt cele afișate?

| | lei/kg |
|---|---|
| Tort de ciocolată | 110 lei |
| Tort de frișcă | 85 lei |
| Tort de fructe | 95 lei |

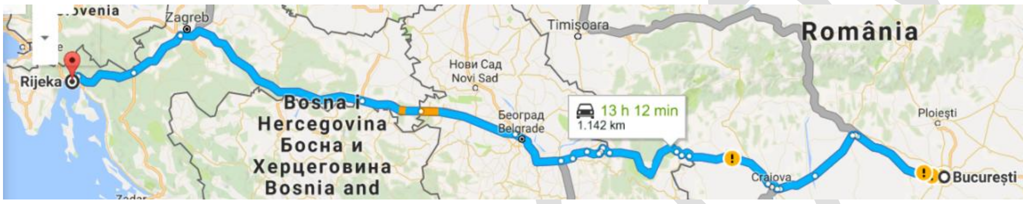
3. Într-o fructieră erau de 4 ori mai multe nuci decât mere. După ce Ana și Matei își iau câte un măr și o nucă, rămân de 7 ori mai multe nuci decât mere. Câte nuci și câte mere erau la început?

4. 175 kg de nuci sunt așezate în saci de 3 kg și 8 kg, în total fiind folosiți 25 de saci.
   a) Câte kg de nuci au fost așezate în saci de 3 kg?
   b) Compară numărul sacilor de 3 kg cu cel al sacilor de 8 kg. Exprimă relația dintre aceste numere în cel puțin 3 moduri, inclusiv prin reprezentare grafică.

5. După rețeta bunicii Anei, din 10 kg de gutui se pot obține 9 kg de dulceață.
   a) Ce cantitate de dulceață se poate obține din 28 de gutui a câte 500 g fiecare?
   b) Pentru dulceața obținută din cele 28 de gutui, Ana folosește 17 borcane de 300 g și de 800 g. Câte borcane mici a folosit? Rezolvă în două moduri.

6. 3 kiwi și 7 mere cântăresc 1080 g, iar 5 kiwi și 4 mere cântăresc 880 g. Cât cântărește fiecare fruct?

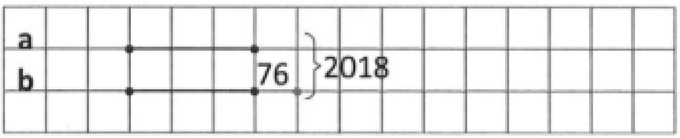
7. Din 4 portocale și 5 mere se obțin 500 ml suc. Din 3 portocale și 3 mere se obțin 330 ml suc.
   a) Cât suc se obține dintr-o portocală? Dar dintr-un măr?
   b) Câte portocale și câte mere sunt necesare pentru obținerea unui litru de suc? Găsește 2 variante.
   c) De câte portocale este nevoie pentru a obține un pahar de o jumătate de litru de suc?
   d) De câte mere este nevoie pentru a obține un pahar de ¼ litri de suc? Argumentează răspunsul.

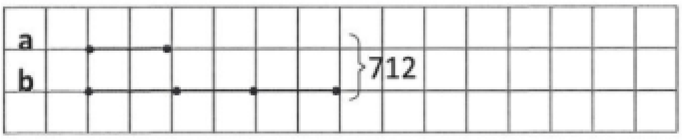


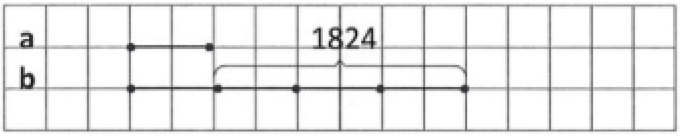

8. Un grup de turiști au parcurs traseul București - Rijeka (Croația) astfel: în prima zi ½ din drum, a doua zi 2/3 din rest, a treia zi 4/5 din ce a rămas, iar a patra zi ultimii 40 km. Ce lungime a avut traseul? *Configurează pe internet acest traseu și identifică localitățile de popas pentru fiecare din cele 4 zile.

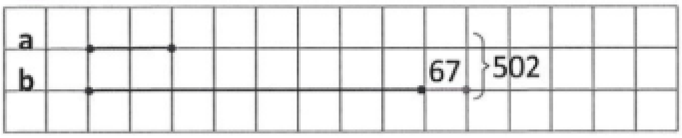
## VREAU SĂ ȘTIU MAI BINE!

Compune și rezolvă probleme pornind de la reprezentarea grafică a datelor sau de la datele problemei.

1. 


2. 


3. 


4. 

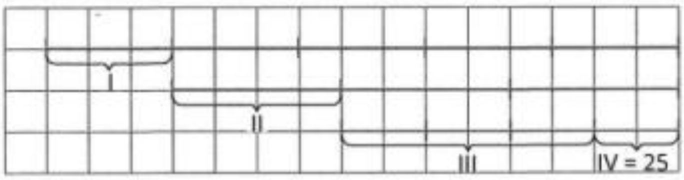

5. 3 kg gogoșari .... 4 kg vinete ....... 46 lei

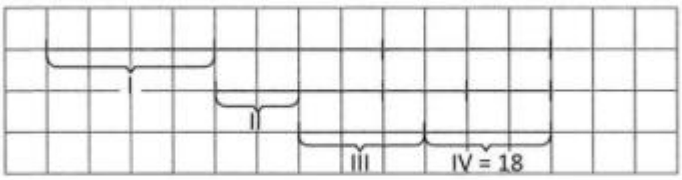
   5 kg gogoșari .... 6 kg vinete ....... 72 lei

   1 kg gogoșari = ? lei 1 kg vinete = ? lei

6. 4 caiete ....... 5 penare ....... 59 lei și 10 bani
   7 caiete ....... 10 penare ......112 lei și 80 bani

   1 caiet = ? lei 1 penar = ? lei

7. 


8. 

9. 50 globulețe ............... 200 lei
12 globulețe de același fel ...? lei

10. 9 muncitori ...........un gard ..........18 zile
a) 11 muncitori .......... același gard .......? zile
b) 5 muncitori ............ același gard ...... ? zile

11.

a)

173 lei — 25 caiete — 6 lei și 50 bani — ? caiete
173 lei — 25 caiete — 8 lei — ? caiete

b)

2x100 lei pentru plata caietelor — restul — 5 lei — ? bancnote
2x100 lei pentru plata caietelor — restul — 1 leu — ? bancnote

## VREAU SĂ ȘTIU MAI MULT!

1. Dacă, pe o hartă, 5 cm reprezintă 250 km în teren, află câți kilometri reprezintă în teren x cm de pe hartă.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X cm | 8 cm | 12 cm | 25 cm | 40 cm | 52 cm |

2. Distanța București – Ploiești este de 60 km. Pe harta alăturată, măsoară segmentul București – Ploiești. Folosind datele culese, calculează distanțele marcate pe hartă prin segmente.
   *Calculează și alte distanțe, cel puțin trei, între diverse localități ale țării. Organizează datele într-un tabel.

   *Verifică pe internet informațiile obținute.

   Cât de apropiate de realitate sunt aceste informații? De unde crezi că provin eventualele diferențe?


3. Un hanorac costă 63 de lei la Supermarket și 60 de lei la magazinul online. La Supermarket au reducerea „Cumperi și plătești două treimi din preț”, iar la magazinul online este o reducere de 25%.
   Care preț este mai avantajos?

4. Un schior urcă o pârtie cu telescaunul, cu viteza de 9 km/oră și coboară aceeași pârtie pe schiuri, cu viteza de 24 km/oră, urcarea și coborârea pârtiei durând, în total, 22 de minute. Calculează lungimea pârtiei.

   Presupunem că pârtia are ca lungime cel mai mic multiplu comun al numerelor 9 și 24.

5. Un grup de turiști pleacă într-o excursie cu autocarul. Câți turiști și câte locuri sunt în autocar, știind că, dacă de așază câte 1 pe o banchetă, rămân 12 în picioare, iar dacă se așază câte 2 pe o banchetă, rămân 2 banchete libere?

   1 banchetă are 2 locuri

## Indicații și răspunsuri

### I. METODA FIGURATIVĂ

1.1. AFLAREA A DOUĂ NUMERE CUNOSCÂND SUMA ȘI DIFERENȚA LOR

1. 37; 52

2. 167; 168; 169

1.2. AFLAREA A DOUĂ NUMERE CUNOSCÂND SUMA ȘI CÂTUL LOR

1. 128; 896

2. 260

3. 404

4. 1059; 353; 706

1.3. AFLAREA A DOUĂ NUMERE CUNOSCÂND DIFERENȚA ȘI CÂTUL LOR

1. a) 125; 625; b) 1225; 725

2. 150; 600; 650

3. 1 l; 250 ml

1.4. ALTE CATEGORII DE PROBLEME CARE POT FI REZOLVATE CU METODA GRAFICĂ

1. 40 flori; 10 vaze

2. 35 persoane; 9 mese

### II. METODA COMPARAȚIEI

2.a) 500 ml sticle apă; 1500 ml sticle suc; b) 81 lei minge volei; 90 lei minge baschet

4. 21 lei /fular; 18 lei / căciulă

5. a) 25 bomboane/pungă; 15 bomboane /cutie; b) 35 lei /pălărie; 17 lei / șapcă; c) 300 ml / cană; 400 ml / pahar; d) x = 120; y = 900

6. 600 bile roșii

7. 50 kg / sac făină; 40 kg / sac grâu

8. Se grupează de două ori câte două situații și se elimină aceeași mărime. Exemplu (1) cu (2) și (1) cu (3) și se elimină gutuile. Se obține o nouă situație, cu doar două mărimi, apoi se continuă cu etapele obișnuite ale metodei comparației. 6 lei / kg struguri; 30 lei / kg nuci; 11 lei / kg gutui

9. 24 mere; 28 gutui

10. 3 ouă / cozonac; 2 ouă / plăcintă

**III. METODA MERSULUI INVERS**

2. 85 lei

3. 175 pagini

4. 72 de lei

5. 200 de pagini

6. a = 19; b = 14; c = 102

8. Soluție: Efectuează în gând diferența: rezultat - 46.
9. 162 km
10. **Răspuns**: numărul pe care îl porți la pantofi și vârsta.

**IV. METODA REDUCERII LA UNITATE**

4.1. PROBLEME ÎN CARE AMBELE MĂRIMI CRESC SAU SCAD

2. a) 15 l; b) 2 l și 500 ml

3. a)

5. 75 m

4.2. PROBLEME ÎN CARE O MĂRIME CREȘTE ȘI CEALALTĂ SCADE SAU O MĂRIME SCADE ȘI CEALALTĂ CREȘTE

1. 30 de ore; 80 de ore

2. 12 ore; 32 de ore

3. a) 1320 lei; b) 7 kg și 500 g; c) 15 kg

4.3. PROBLEME DE REDUCERE LA UNITATE ÎN CARE INTERVIN 3 MĂRIMI

2. 72 m

V. **METODA FALSEI IPOTEZE**

1. a) 19 lăzi de câte 12 kg; 36 lăzi de câte 20 kg

2. 26 bancnote de 100 lei; 4 bancnote de 200 lei

3. 150 cu 2 camere, 46 cu 3 camere

4. 9 buchete de câte 5 crizanteme, 6 buchete de câte 7 crizanteme

5. a) 26 de păsări și 82 de oi; b) 41 de oi; c) 390 de ouă

6. 20 cartoane de 24 de ouă; 41 cartoane de 30 de ouă

7. 18 saci de 35 kg; 68 saci de 50 kg

8. 61 de cutii de 24 bomboane; 14 cutii de 36 de bomboane

9. a) 2 pungi cu câte 30 de nuci și 3 pungi cu câte 50 de nuci; b) crește de 10 ori și numărul de pungi de fiecare fel

10. a) 38 adulți, 14 copii; b) 47 bancnote de 50 de lei, 9 bancnote de 100 de lei; c) 8 bancnote de 1 leu și 5 bancnote de 10 lei

11. 9 crizanteme și 11 trandafiri

**VI. PROBLEME DE MIȘCARE**

6.1. PROBLEME ÎN CARE MOBILELE SE DEPLASEAZĂ ÎN ACELAȘI SENS

1. 3 ore

2. 15 km

6.1. PROBLEME ÎN CARE MOBILELE SE DEPLASEAZĂ ÎN SENS OPUS

**1.** 7 h 45 min; 8 ore 16 min

2. 5 ore; 125 km

3. 5 ore; 110 km

4. 13:40; 175 km față de Bacău și 160 km față de București

**AM ÎNVĂȚAT DESPRE…**

1. 1500 g cartofi; 600 g făină; 500 g brânză de vaci; 500 g ceapă; 400 g unt

2. a) 3900 g tortul de ciocolată, 1300 g tortul de frișcă, 2000 g tortul de fructe; b) 429 lei tortul de ciocolată, 110 lei și 50 de bani tortul de frișcă, 190 lei tortul de fructe

3. 4 mere și 16 nuci

4. a) 15 kg de nuci

5. a) 12 kg și 600 g dulceață; 2 borcane mici, de 300 g

6. 120 g 1 măr; 80 g 1 kiwi

7. a) 50 ml dintr-o portocală; 60 ml dintr-un măr; b) 8 portocale și 10 mere; 14 portocale și 5 mere; c) 10 portocale; d) 5 mere (4 x 60 ml = 240 ml)

8. 1200 km

**VREAU SĂ ȘTIU MAI MULT!**

3. 42 lei

4. 2400 m

5. 48 turiști, 52 locuri

## BIBLIOGRAFIE


- **Dumitrescu, I.,** Ciobanu, N., Birta, C. A., (2015). *Matematică pentru clasa a III-a. Teorie și exerciții*, București: Editura CDPress.
- **Dumitrescu, I.,** Ciobanu, N. (2016). *Matematică. Clasa a IV-a. Manual digital.* București: Editura CDPress.
- **Dumitrescu, I.,** Ciobanu, N. (2016). *Matematică. Teorie și exerciții. Clasa a IV-a.* București: Editura CDPress.
- **Dumitrescu, I.** (2015). *Evaluarea Altfel. Antrenament e-istet pentru evaluarea elevilor din clasa a IV-a, la Limba și literatura română și Matematică.* București: Editura BradBrand.
- **Dumitrescu, I.** (2017). *Verific ce știu. Evaluare finală clasa a IV-a. Limba română. Matematică.* București: Editura Litera
- **Roșu, M.**, (2006). *Matematică pentru formarea profesorilor din învățământul primar*. București: Editura METEOR PRESS
- **Roșu, M.**, (2017). *Elemente de matematică pentru profesorii învățământului primar*. București: Editura Aramis
- **Vrînceanu, N.** G., **Dumitrescu, I., Toderiuc, M. L.,** (2017). *Lecția de matematică. Clasa a V-a*. București: Editura Litera
- *Manuale de matematică pentru clasele III-V*