Dumitru D. Pârâială Viorica Pârâială

Cristian-George Pârâială

ARITMETICĂ

Exerciții şi probleme rezolvate prin mai multe metode şi procedee

Culegere pentru elevii claselor a III-a – a VI-a şi ai şcolilor normale

– ediția a VI-a revăzută –

EURISTICA

CAPITOLUL I

Exerciții - problemă

Enunțuri

1. Calculați pe ***a***, ***b***, ***c*** și ***d*** din egalitățile: $a + 2 = b$; $b + 2 = c$; $c + 2 = d$; $d + 2 = 12$.

2. Arătați că ***b*** este dublul lui ***a***, dacă: $a = (9 \times 8 + 7 + 6) : [5 \times 4 : (3 + 2) + 1]$;
$b = (1 \times 2 + 3) \times 4 : 5 + 6 + 7 + 8 + 9$.

3. Se dau numerele **40** și **8**, calculați suma dintre suma lor, diferența lor, produsul și câtul lor.

4. Se consideră numerele: $a = (0 \times 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9) : 10$;
$b = 2 + 2 \times 2 + 2 : 2$.
Micșorați de **7** ori câtul dintre produsul și câtul lor.

5. Să se calculeze $10c - 200b - 6a + 4 \times 0$, dacă:
a este întreitul lui ***x*** din $1 + \{2[3 + (4 + x) : 5] - 6\} \times 7 = 15$;
b este jumătatea lui ***y*** din $213 - (230 - 5y) : 7 = 183$;
c este sfertul lui **z** din $(99 + z) - 100 = 175$.

6. Să se determine ***a*** și ***b*** din:
1) $a + b = 85$ și ***a*** mărit cu **14** este mai mic de **2** ori decât ***b*** mărit cu **27**;
2) $a + b = 178$ și ***a*** micșorat cu **42** este mai mare cu **49** decât ***b*** mărit cu **15**;
3) $[(145 - \overline{ab}) \times (1\,000 - 999)] : (18 - 4 \times 4) = 59$;
4) $(136 - ab) : (37 + 6) = 16 - 8 : 2 - 9$.

7. Se știe că: $ab = 32$, $ac = 724$, $yx = 414$ și $ux = 99$.
Calculați: $a(b + c)$; $x(y - u)$.

8. Despre **4** numere naturale se știe că produsul dintre primul și al doilea este **40**, produsul dintre primul și al treilea este **45**, produsul dintre primul și al patrulea este **60**.
Aflați produsul dintre primul număr și suma celorlalte trei.

9. În următoarele egalități determinați numerele cu rol de împărțitor la împărțirea cu rest: a) $8 = 1 \times 6 + 2$; b) $8 = 2 \times 3 + 2$; c) $3 \times 25 + 0 = 75$; d) $2 \times 3 + 3 = 9$.

10. Folosind reguli de calcul rapid, efectuați:
a) $1 + 2 + 3 + \ldots 8 + 9 =$;
b) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1988 + 1989 =$;
c) $0 + 1 + 2 + \ldots + 99 + 100 =$;
d) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 1998 + 2000 =$;

e) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99 + 101 =$;
f) $100\times99 - 99\times98 + 98\times97 - 97\times96 + ... + 4\times3 - 3\times2 + 2\times1 =$.

11. Determinați suma numerelor de la **1** la **99** inclusiv, calculând suma dintre suma numerelor impare și suma numerelor pare din acest șir.

12. Să se determine x din: $x + 2x + 3x + ... + 9x + 10x = 5\times11$.

13. Ce număr trebuie să aibă pagina la care se deschide o carte pentru ca suma numerelor cu care s-au numerotat paginile anterioare să fie **55**?

14. Determinați suma numerelor naturale care împărțite la **25** dau câtul egal cu restul.

15. Se scriu toate numerele de la **1** la **30**, unul după altul, obținându-se astfel alt număr.
a) Câte cifre are numărul?
b) Care este suma cifrelor acestui număr?

16. Fie numerele naturale diferite de zero, a, b, c. Stabiliți ce modificări ale acestor numere se produc în următoarele situații:

1) $a + b = c$

a	b	c
$a + 2$,	$b + 3$,	$c \pm ?$;
$a - 6$,	$b + 6$,	$?$;
$a + 4$,	$b - 3$,	$?$;
$a \pm ?$,	$b + 5$,	$c + 6$;
$a + 3$,	$b \pm ?$	$c - 6$;

2) $a - b = c$

a	b	c
$a + 3$,	$b - 5$,	$c \pm ?$;
$a - 2$,	$b - 2$,	$?$;
$a - 2$,	$b + 2$,	$?$;
$a \pm ?$,	$b + 1$,	$c - 1$;
$a - 3$,	$b \pm ?$,	$c - 2$;
$a + 3$,	$?$,	$c + 5$;

3) $a \times b = c$

a	b	c
$a : 3$,	$b : 6$,	$?$ * ;
$a\times4$,	$b : 8$,	$?$;
$a\times2$,	$b\times3$,	$?$;
$?$,	$b\times2$,	$c\times4$;
$a\times6$,	$?$,	$c\times3$;
$a\times2$,	$?$,	$c : 1$;
$a : 3$,	$?$,	$c\times2$;

4) $a : b = c$

a	b	c
$a\times2$,	$b\times4$,	$?$;
$a : 10$,	$b : 2$,	$?$;
$a\times4$,	$b\times2$,	$?$;
$?$,	$b : 4$,	$c\times2$;
$?$,	$b : 2$,	$c\times1$;
$a\times2$,	$?$,	$c : 1$.

17. Produsul a două numere naturale este **36**; dacă se mărește primul număr cu **7**, produsul devine **99**. Să se afle numerele.

18. Un număr are la început cifra **1**. Mutând această cifră la sfârșit, obținem un număr de **3** ori mai mare. Aflați numărul.

19. Prima cifră a unui număr este **6**. Mutând această cifră la sfârșit, obținem un număr de **4** ori mai mic. Determinați numărul.

---

*adică ce modificări suportă c?

20. Prima cifră a unui număr este **9**. Dacă se ia această cifră de la început şi se aşază la sfârşitul numărului, se obţine sfertul acelui număr. Aflaţi numărul.

21. Un număr are ultima cifră **7**. Dacă se mută această cifră în faţa numărului, se obţine un număr de **5** ori mai mare decât cel dat.
Să se afle primul număr.

22. Găsiţi cifra ***a*** din egalitatea: $\dfrac{\overline{aa}\times\overline{aa}}{\overline{4a4}} = 16$.

23. Să se determine ***x*** din:

a) $1225:\left[\dfrac{(13x-5\times2\times3)\times2^2}{3\times2^2}-10\right]=7$;

b) $8x:6=4x-6$; c) $x+18=3x:2$.

24. Determinaţi cel mai mare număr natural $\overline{ab}$ care îndeplineşte, pe rând, condiţiile:
a) $\overline{ab}+\overline{ba}=99$; b) $\overline{ab}-\overline{ba}=9$.

25. Determinaţi numărul de forma $\overline{ab}$, ştiind că $a+\overline{ab}+\overline{ab}=\overline{ba}$.

26. Determinaţi numărul de două cifre care este, pe rând, egal cu:
1) dublul sumei cifrelor sale;
2) triplul sumei cifrelor sale;
3) împătritul sumei cifrelor sale.

27. Să se afle numărul $\overline{abc}$ dacă:

$\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$.

28. Să se afle ***x***, ***y*** şi ***z***, cifre distincte, din: $\overline{xx}+\overline{yx}+\overline{zx}=\overline{xy3}$.

29. Determinaţi cifrele distincte ***x***, ***y*** şi ***z***, ştiind că:

$\overline{xyz}+\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx}=\overline{xxx}+\overline{yyy}+\overline{zzz}+666$.

30. Să se determine un număr de două cifre în aşa fel încât cifra unităţilor să fie de **4** ori mai mică decât a zecilor, iar dacă scădem din acest număr pe **54** să obţinem răsturnatul său.

31. Cifra unităţilor unui număr de **2** cifre este de **3** ori mai mare decât cifra zecilor. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obţinem un număr cu **36** mai mare decât cel de la început. Să se afle numărul.

32. Cifra zecilor unui număr de **2** cifre este de **2** ori mai mică decât cifra unităţilor. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obţinem un număr cu **27** mai mare decât cel de la început. Să se afle numărul.

33. Fie numerele naturale ***a*** şi ***b***.
1) Care este restul împărţirii lui ***a*** la ***b***?
2) Care este restul împărţirii lui ***b*** la ***a***?

34. Verificaţi prin calcul şi geometric egalitatea:
$(4+2)\times(3+5)=4\times3+2\times3+4\times5+2\times5$.

35. Să se determine ***y***, calculând în mai multe moduri:
$y+3:2+5:2+7:2+9:2=13$.

36. Aflaţi numerele ***a*** şi ***b*** din: $a+b:2=14$ şi $a:2+b=13$.

37. Găsiţi valorile lui ***a*** şi ***b***, ştiind că $\overline{abab}:b=909$.

38. Determinaţi numărul de două cifre a cărui jumătate este de **8** ori mai mare decât media aritmetică a cifrelor din care este format.

39. Care este numărul format din trei cifre consecutive care adunat cu răsturnatul său dă **888**?

40. Un număr natural de două cifre are cifra zecilor cu **3** mai mare decât cifra unităţilor.
Aflaţi numărul, ştiind că este de **7** ori mai mare decât suma cifrelor sale.

41. La o împărţire câtul este de **6** ori mai mic decât diferenţa dintre deîmpărţit şi rest, iar împărţitorul este de **3** ori mai mare decât câtul.
Să se reconstituie împărţirea, ştiind că restul este strict mai mare decât **4**.

42. Să se afle cel mai mic număr natural care îndeplineşte simultan condiţiile: la împărţirea cu **3** dă restul **1**; la împărţirea cu **4** dă restul **2**; la împărţirea cu **5** dă restul **3**; la împărţirea cu **6** dă restul **4**.

43. Determinaţi numărul natural care împărţit la **13** să dea restul **3** şi împărţit la **12** să dea acelaşi cât şi restul **7**.

44. Numerele **100** şi **85** au fost împărţite pe rând la un număr ***n***, obţinându-se respectiv resturile **5** şi **9**. Determinaţi numărul ***n***.

45. Puneţi paranteze, încât să avem $n=m$, cu ***n*** şi ***m*** numere naturale, dacă: $n=3\times5:1-2$, iar $m=5+1\times2-3$.

46. Reconstituiţi împărţirea :
```
869**** : *** = 4***
**0
==9**
  8**
  =***
   6**
   ===
```

47. Reconstituiți înmulțirea:

$$\begin{array}{r} BBB\times \\ \underline{EA} \\ CDA \\ \underline{AGEE\ \ } \\ 27552 \end{array}$$

ştiind că literele distincte notează cifre distincte.

48. Găsiți valoarea lui a din egalitatea: $2a\times(4a-27)=\overline{a0}$.

49. Un elev scrie în ordine crescătoare numerele naturale de la **1** la **20** inclusiv, iar între ele pune semnul "plus", apoi observă că dacă în locul unui semn "plus" pune semnul "egal" se stabileşte o egalitate adevărată.

Între care numere a pus elevul semnul "egal"?

50. Alexandra şi Samuel aveau fiecare câte **26** de alune. După ce a mâncat o parte din ele, Alexandra constată că, dacă din alunele rămase ar face grămezi de câte **4** alune sau de câte **3** alune, ori de câte **2** alune, într-o grămadă i-ar lipsi o alună. Samuel observă că, deşi a mâncat mai puține alune decât Alexandra, poate şi el aplica acelaşi procedeu.

Câte alune mai are fiecare dintre cei doi copii?

51. Să se determine toate perechile de numere naturale (a,b), care verifică pe rând egalitățile:

1) $a\times b=3+5+7+\ldots+57-2-4-6-\ldots-56$;

2) $38-(125+375):100\times4=a:b$, unde $0<b\leq3$;

3) $a-b=(513-206\,856:507):15$, unde $a\leq10$.

52. Efectuați, respectând ordinea operațiilor:

a) $[(235+145:5-119):5+23\times6+101\times3]:10=$

b) $(102-36\times4:8):7+35\times3+8\times(37-5\times7):8=$

c) $(115:5-20)\times[120+(7\times8-224:7)]:9=$

d) $6+6\times\{5+6\times[3+6\times(18-15)]\}=$

e) $30\times\{3+6\times[9+15\times(6+6-9)]\}=$

f) $\dfrac{12\times10:6-(200-20):9+1}{5-(24:8+7:7)}=$

g) $[(25+5^2):5+36:2]:2^2-6:6=$

h) $(79+79:79):(116+29-15\times7)=$

i) $(3\,044+2\,056):17+3\,075:5:3-6\,992:(38\times23)=$

j) $(120\times5-60):5+240\times3-(180-312:12)=$

k) $(750\times306-375\times208):(3\,700:185+630:6)=$

l) $1\,225:(170-15\times9):[(5\times45-50):25]:5=$

m) $1\,003\,040-13\times\{13+15\times[123+13\times(107-91)]\}=$

n) $\dfrac{(137\times25+105\times15):50+145\times28}{13\times8\times(175-25\times3):10}=$

o) $45\times10^3-[(25\times10^5):(5\times10^4)+(6\times10^3):(4\times10^2)]\times45=$

53. Folosind regulile referitoare la ordinea efectuării operațiilor cu numere naturale şi la proprietățile acestora, calculați în mai multe moduri (unele exerciții au sarcini suplimentare):

a) 45 + 22 + 55 =
b) 138 + (129 + 362) =
c) (132 + 1 004 + 609) + 996 =
d) (1 694 + 583) – 694 =
e) (389 + 3 184 + 2 976) – 1 976 =
f) 68 – (32 + 29) =
g) 91 – (54 + 17 + 16) =
h) 36 + (44 – 21) =
i) 153 + (128 – 113) =
j) 36 – (100 – 64) =
k) 159 – (99 – 41) =
l) 20 – 9 + 9 =
m) 130 – 70 + 70 =
n) 100 + 200 – 200 =
o) 78 + 39 – 39 =
p) 100 – 16 – 19 – 64 =
r) 1 986 – 452 – 326 – 109 – 98 =

54. Încercând să scrie în exercițiu (formulă numerică) rezolvarea problemei: "Silviu are **9** lei. Trebuie să dea **11** lei lui Dan, iar de la Cristi trebuie să primească **4** lei. Câți lei va avea Silviu în final?", Alex obține "**9 – 11 + 4 =** "și afirmă că problema nu se poate rezolva. Are dreptate?

55. Scrierea în exercițiu a rezolvărilor unor probleme asemănătoare cu cea de la nr. **54** a dus la exercițiile de mai jos. Le puteți rezolva?

1) 9 000 – 9 868 + 869 =
2) 83 – 91 + 17 =
3) 98 – 101 + 3 + 200 + 117 – 190 =
4) 100 – 90 + 70 – 20 =
5) 900 – 88 – 814 + 6 =
6) 19 – 28 – 16 + 81 – 6 =
7) 3×4 – 5×3 + 3×3 + 7×3 – 3×6 =
8) 2×4×6×5 =
9) 4×8×7×75×25 =
10) (5×6×8)×100 =
11) 14×(9×8×2×5) =
12) 2×(7 + 8) =
13) (4 + 5)×6 =
14) 6×(5 + 15 + 10) =
15) 4×(11 – 7) =
16) (180 – 171)×9 =
17) 10×(72 – 39 – 13) =
18) a) 6×(40 – 32 + 4) =
b) 6×40 + 6×32 =
c) 103 + 5×103 – 103×2 =
19) (200 + 90 + 1)×(10 + 2) =
20) (30 + 15 + 4)×(7 + 6) =
21) (136 + 129)×(10 + 20 + 30 + 40) =
22) 9×63 : 63 =
23) 105×14 : 14 =
24) 4×1 397 : 4 =
25) 864 : 72×72 =
26) 324 : 18×18 =
27) (4×6×5) : 3 =
28) (208×72×96) : 4 =
29) (2 000×387) : 1 000 =
30) 180 : (3×4×5) =
31) 3 240 : (9×3×24) =
32) (9×8×4) : (3×2×4) =
33) (6×9×8) : (2×3×4) =
34) (18×36) : (9×4×3) =
35) (72×2×16) : (8×8) =
36) 324 : (18 : 6) =
37) 18 : (42 : 7) =
38) 63 : (6 : 2) =
39) (55 + 10) : 5 =
40) (63 + 28 + 735) : 7 =
41) (72 – 36) : 9 =
42) (192 – 12 – 36) : 6 =

56. Pe baza modificărilor pe care le suportă termenii (factorii), calculați rezultatele. Verificați apoi, respectând ordinea efectuării operațiilor.

1) 1 009 + 2 991 = 4 000
a) (1 009 + 137) + 2 991 =
b) 1 009 + (2 991 + 248) =
c) (1 009 + 248) + 2 991 =

2) 4 908 + 5 092 = 10 000
a) 4 910 + 5 092 =
b) 4 908 + 5 101 =
c) 4 917 + 5 092 =

3) $\underline{2\,098 + 6\,992 = 9\,090}$
a) $(2\,098 - 2) + 6\,992 =$
b) $2\,098 + (6\,992 - 2) =$
c) $(2\,098 - 87) + 6\,992 =$

4) $\underline{3\,026 + 414 = 3\,440}$
a) $3\,006 + 414 =$
b) $3\,026 + 404 =$
c) $3\,022 + 414 =$

5) $\underline{998 + 2\,002 = 3\,000}$
a) $(998 + 14) + (2\,002 + 14) =$
b) $(998 + 115) + (2\,002 + 115) =$
c) $(998 + 333) + (2\,002 + 115) =$

6) $\underline{3\,900 + 4\,915 = 8\,815}$
a) $3\,903 + 4\,918 =$
b) $3\,909 + 4\,924 =$
c) $3\,910 + 4\,925 =$

7) $\underline{4\,799 + 3\,611 = 8\,410}$
a) $(4\,799 - 54) + (3\,611 - 54) =$
b) $(4\,799 - 45) + (3\,611 - 45) =$
c) $(4\,799 - 1\,000) + (3\,611 - 1\,000) =$

8) $\underline{3\,786 + 916 = 4\,702}$
a) $3\,786 + 616 =$
b) $3\,736 + 866 =$
c) $3\,785 + 915 =$

9) $\underline{46 + 136 = 182}$
a) $(46 + 3) + (136 + 1) =$
b) $(46 + 2) + (136 + 3) =$
c) $(46 + 1) + (136 + 3) =$

10) $\underline{183 + 191 = 374}$
a) $185 + 194 =$
b) $193 + 195 =$
c) $187 + 201 =$

11) $\underline{76 + 189 = 265}$
a) $(76 - 2) + (189 - 3) =$
b) $(76 - 1) + (189 - 2) =$
c) $(76 - 2) + (189 - 1) =$

12) $\underline{397 + 184 = 581}$
a) $387 + 183 =$
b) $297 + 174 =$
c) $396 + 174 =$

13) $\underline{597 + 486 = 1\,083}$
a) $(597 + 5) + (486 - 4) =$
b) $(597 - 5) + (486 + 4) =$
c) $(597 + 1) + (486 - 2) =$

14) $\underline{1\,609 + 896 = 2\,505}$
a) $1\,608 + 898 =$
b) $1\,617 + 893 =$
c) $1\,709 + 696 =$

15) $\underline{938 + 9\,986 = 10\,924}$
a) $(938 + 6) + (9\,986 - 6) =$
b) $(938 + 37) + (9\,986 - 37) =$
c) $(938 - 248) + (9\,986 + 248) =$

16) $\underline{1\,892 + 729 = 2\,621}$
a) $1\,894 + 727 =$
b) $1\,882 + 739 =$
c) $1\,792 + 829 =$

17) $\underline{11\,002 - 398 = 10\,604}$
a) $(11\,002 + 10) - 398 =$
b) $(11\,002 + 344) - 398 =$
c) $(11\,002 + 1) - 398 =$

18) $\underline{3\,007 - 19 = 2\,988}$
a) $3\,010 - 19 =$
b) $3\,107 - 19 =$
c) $3\,008 - 19 =$

19) $\underline{9\,032 - 2\,927 = 6\,105}$
a) $(9\,032 - 32) - 2\,927 =$
b) $(9\,032 - 5) - 2\,927 =$
c) $(9\,032 - 1\,000) - 2\,927 =$

20) $\underline{8\,146 - 987 = 7\,159}$
a) $8\,145 - 987 =$
b) $8\,136 - 987 =$
c) $8\,046 - 987 =$

21) $\underline{501 - 36 = 465}$
a) $501 - (36 + 1) =$
b) $501 - (36 + 10) =$
c) $501 - (36 + 100) =$

22) $\underline{712 - 385 = 327}$
a) $712 - 386 =$
b) $712 - 395 =$
c) $712 - 485 =$

23) $\underline{1\,000 - 786 = 214}$
a) $1\,000 - (786 - 1) =$
b) $1\,000 - (786 - 10) =$
c) $1\,000 - (786 - 100) =$

24) $\underline{3\,101 - 1\,809 = 1\,292}$
a) $3\,101 - 1\,808 =$
b) $3\,101 - 1\,799 =$
c) $3\,101 - 1\,709 =$

25) $\underline{3\,102 - 983 = 2\,119}$
a) $(3\,102 + 2) - (983 + 2) =$
b) $(3\,102 + 20) - (983 + 20) =$
c) $(3\,102 + 200) - (983 + 200) =$

26) $\underline{2\,033 - 637 = 1\,386}$
a) $2\,024 - 638 =$
b) $2\,033 - 647 =$
c) $3\,023 - 1\,637 =$

27) **$1\,713 - 824 = 889$**
a) $(1\,713 - 3) - (824 - 3) =$
b) $(1\,713 - 30) - (824 - 30) =$
c) $(1\,713 - 300) - (824 - 300) =$

28) **$9\,100 - 7\,888 = 1\,212$**
a) $9\,099 - 7\,887 =$
b) $9\,000 - 7\,788 =$
c) $8\,100 - 6\,888 =$

29) **$1\,114 - 367 = 747$**
a) $(1\,114 + 1) - (367 - 1) =$
b) $(1\,114 + 40) - (367 - 40) =$
c) $(1\,114 + 100) - (367 - 100) =$

30) **$2\,100 - 791 = 1\,309$**
a) $2\,101 - 790 =$
b) $2\,110 - 781 =$
c) $2\,200 - 691 =$

31) **$6\,106 - 3\,207 = 2\,899$**
a) $(6\,106 - 1) - (3\,207 + 1) =$
b) $(6\,106 - 100) - (3\,207 + 100) =$
c) $(6\,106 - 1\,000) - (3\,207 + 1\,000) =$

32) **$6\,847 - 1\,978 = 4\,869$**
a) $6\,846 - 1\,979 =$
b) $6\,837 - 1\,999 =$
c) $5\,847 - 2\,978 =$

33) **$162 - 86 = 76$**
a) $(162 + 1) - (86 - 2) =$
b) $(162 + 3) - (86 - 1) =$
c) $(162 + 4) - (86 - 3) =$

34) **$917 - 179 = 738$**
a) $918 - 176 =$
b) $927 - 171 =$
c) $947 - 159 =$

35) **$2\,437 - 978 = 1\,459$**
a) $(2\,437 - 5) - (978 + 4) =$
b) $(2\,437 - 2) - (978 + 13) =$
c) $(2\,437 - 17) - (978 + 15) =$

36) **$14\,766 - 4\,367 = 10\,399$**
a) $14\,765 - 4\,369 =$
b) $14\,666 - 4\,567 =$
c) $12\,766 - 5\,367 =$

37) **$2\,306 - 878 = 1\,428$**
a) $(2\,306 + 4) - (878 + 3) =$
b) $(2\,306 + 3) - (878 + 4) =$
c) $(2\,306 + 2) - (878 + 1) =$

38) **$3\,001 - 186 = 2\,815$**
a) $3\,002 - 188 =$
b) $3\,011 - 187 =$
c) $3\,010 - 196 =$

39) **$1\,597 - 999 = 598$**
a) $(1\,597 - 3) - (999 - 2) =$
b) $(1\,597 - 7) - (999 - 8) =$
c) $(1\,597 - 8) - (999 - 7) =$

40) **$8\,696 - 5\,589 = 3\,107$**
a) $8\,690 - 5\,579 =$
b) $8\,496 - 5\,489 =$
c) $7\,696 - 3\,589 =$

41) **$6 \times 12 = 72$**
a) $(6 \times 6) \times 12 =$
b) $(6 \times 36) \times 12 =$
c) $6 \times (12 \times 4) =$

42) **$13 \times 24 = 552$**
a) $26 \times 24 =$
b) $13 \times 48 =$
c) $52 \times 24 =$

43) **$8\,104 \times 8 = 64\,832$**
a) $(8\,104 : 2) \times 8 =$
b) $8\,104 \times (8 : 2) =$
c) $(8\,104 : 4) \times 8 =$

44) **$48 \times 96 = 4\,608$**
a) $12 \times 96 =$
b) $24 \times 96 =$
c) $48 \times 16 =$

45) **$4 \times 8 = 32$**
a) $(4 \times 2) \times (8 \times 2) =$
b) $(4 \times 3) \times (8 \times 3) =$
c) $(4 \times 5) \times (8 \times 5) =$

46) **$9 \times 6 = 54$**
a) $36 \times 24 =$
b) $90 \times 60 =$
c) $72 \times 48 =$

47) **$174 \times 126 = 21\,924$**
a) $(174 : 2) \times (126 : 2) =$
b) $(174 : 3) \times (126 : 3) =$
c) $(174 : 6) \times (126 : 6) =$

48) **$186 \times 78 = 14\,508$**
a) $62 \times 26 =$
b) $93 \times 39 =$
c) $31 \times 13 =$

49) **$6 \times 8 = 48$**
a) $(6 \times 2) \times (8 \times 4) =$
b) $(6 \times 3) \times (8 \times 2) =$
c) $(6 \times 2) \times (8 \times 3) =$

50) **$36 \times 24 = 864$**
a) $72 \times 72 =$
b) $108 \times 48 =$
c) $144 \times 72 =$

51) $\underline{4\,788 \times 1\,872 = 8\,963\,136}$
   a) $(4\,788 : 4) \times (1\,872 : 2) =$
   b) $(4\,788 : 2) \times (1\,872 : 3) =$
   c) $(4\,788 : 3) \times (1\,872 : 2) =$

52) $\underline{3\,699 \times 1\,872 = 6\,924\,528}$
   a) $1\,233 \times 936 =$
   b) $411 \times 624 =$
   c) $137 \times 468 =$

53) $\underline{2\,024 \times 4\,048 = 8\,193\,152}$
   a) $(2\,024 \times 4) \times (4\,048 : 4) =$
   b) $(2\,024 : 8) \times (4\,048 \times 8) =$
   c) $(2\,024 : 2) \times (4\,048 \times 2) =$

54) $\underline{324 \times 228 = 73\,872}$
   a) $81 \times 912 =$
   b) $108 \times 684 =$
   c) $668 \times 114 =$

55) $\underline{28 \times 36 = 1\,008}$
   a) $(28 \times 4) \times (36 : 2) =$
   b) $(28 : 2) \times (36 \times 6) =$
   c) $(28 \times 2) \times (36 : 4) =$

56) $\underline{324 \times 288 = 93\,312}$
   a) $36 \times 864 =$
   b) $648 \times 48 =$
   c) $81 \times 576 =$

57) $\underline{37 \times 12 = 444}$
   a) $(37 + 10) \times 12 =$
   b) $(37 + 5) \times 12 =$
   c) $37 \times (12 + 6) =$

58) $\underline{92 \times 18 = 1\,656}$
   a) $102 \times 18 =$
   b) $92 \times 28 =$
   c) $92 \times 23 =$

59) $\underline{28 \times 43 = 1\,204}$
   a) $(28 - 10) \times 43 =$
   b) $28 \times (43 - 10) =$
   c) $(28 - 2) \times 43 =$

60) $\underline{394 \times 189 = 74\,466}$
   a) $294 \times 189 =$
   b) $394 \times 89 =$
   c) $384 \times 189 =$

61) $\underline{120 : 4 = 30}$
   a) $(120 \times 2) : 4 =$
   b) $(120 \times 10) : 4 =$
   c) $(120 \times 3) : 4 =$

62) $\underline{133 : 19 = 7}$
   a) $532 : 19 =$
   b) $399 : 19 =$
   c) $1\,064 : 19 =$

63) $\underline{120 : 4 = 30}$
   a) $(120 : 2) : 4 =$
   b) $(120 : 10) : 4 =$
   c) $(120 : 3) : 4 =$

64) $\underline{960 : 24 = 40}$
   a) $192 : 24 =$
   b) $120 : 24 =$
   c) $96 : 24 =$

65) $\underline{120 : 4 = 30}$
   a) $120 : (4 \times 3) =$
   b) $120 : (4 \times 2) =$
   c) $120 : (4 \times 6) =$

66) $\underline{675 : 15 = 45}$
   a) $675 : 45 =$
   b) $675 : 75 =$
   c) $675 : 225 =$

67) $\underline{126 : 18 = 7}$
   a) $126 : (18 : 2) =$
   b) $126 : (18 : 3) =$
   c) $126 : (18 : 9) =$

68) $\underline{432 : 36 = 12}$
   a) $432 : 18 =$
   b) $432 : 9 =$
   c) $432 : 3 =$

69) $\underline{120 : 4 = 30}$
   a) $(120 \times 2) : (4 \times 2) =$
   b) $(120 \times 10) : (4 \times 10) =$
   c) $(120 \times 5) : (4 \times 5) =$

70) $\underline{144 : 12 = 12}$
   a) $288 : 24 =$
   b) $720 : 60 =$
   c) $1\,440 : 120 =$

71) $\underline{4\,944 : 48 = 103}$
   a) $(4\,944 : 2) : (48 : 2) =$
   b) $(4\,944 : 4) : (48 : 4) =$
   c) $(4\,944 : 6) : (48 : 6) =$

72) $\underline{5\,040 : 48 = 105}$
   a) $2\,520 : 24 =$
   b) $1680 : 16 =$
   c) $840 : 8 =$

73) $\underline{13\,392 : 558 = 24}$
   a) $(13\,392 \times 3) : (558 : 3) =$
   b) $(13\,392 \times 9) : (558 : 9) =$
   c) $(13\,392 \times 2) : (558 : 2) =$

74) $\underline{116\,064 : 624 = 186}$
   a) $928\,512 : 78 =$
   b) $464\,256 : 156 =$
   c) $348\,192 : 208 =$

75) $\underline{720 : 4 = 180}$

a) $(720 : 2) : (4 \times 2) =$

b) $(720 : 3) : (4 \times 3) =$

c) $(720 : 6) : (4 \times 6) =$

76) $\underline{471\,744 : 504 = 936}$

a) $157\,248 : 1\,512 =$

b) $235\,872 : 1\,008 =$

c) $78\,624 : 3\,024 =$

77) $\underline{2\,640 : 24 = 110}$

a) $(2\,640 \times 4) : (24 : 2) =$

b) $(2\,640 \times 3) : (24 : 2) =$

c) $(2\,640 \times 2) : (24 : 3) =$

78) $\underline{110\,368 : 388 = 286}$

a) $220\,736 : 97 =$

b) $331\,104 : 194 =$

c) $441\,472 : 194 =$

79) $\underline{10\,656 : 24 = 444}$

a) $(10\,656 : 2) : (24 \times 3) =$

b) $(10\,656 : 6) : (24 \times 2) =$

c) $(10\,656 : 3) : (24 \times 2) =$

80) $\underline{18\,816 : 84 = 224}$

a) $4\,704 : 168 =$

b) $2\,352 : 168 =$

c) $9\,408 : 336 =$

81) $\underline{21\,384 : 594 = 36}$

a) $(21\,384 \times 6) : (594 \times 3) =$

b) $(21\,384 \times 3) : (594 \times 6) =$

c) $(21\,384 \times 9) : (594 \times 3) =$

82) $\underline{43\,776 : 912 = 48}$

a) $87\,552 : 3\,648 =$

b) $175\,104 : 1\,824 =$

c) $87\,552 : 5\,472 =$

83) $\underline{30\,752 : 248 = 124}$

a) $(30\,752 : 4) : (248 : 2) =$

b) $(30\,752 : 2) : (248 : 4) =$

c) $(30\,752 : 4) : (248 : 4) =$

84) $\underline{3\,072 : 384 = 8}$

a) $384 : 96 =$

b) $768 : 192 =$

c) $1\,536 : 96 =$

57. 1) Se ştie că $a + b = 32$. Calculaţi $(60 + b) + a$.

2) Se ştie că $a + b = 3$. Calculaţi $(2 + a) + b$.

3) Se ştie că $18 + a = 20$. Calculaţi $18 + (a + 5)$.

4) Se ştie că $x + 100 = 200$. Calculaţi $(200 + 100) + x$.

5) Se ştie că $20 + x = 35$. Calculaţi $20 + (x + 19)$.

6) Se ştie că $a \times b = 200$. Calculaţi $(4 \times a) \times b$.

7) Se ştie că $a \times 7 = 91$. Calculaţi $(8 \times 7) \times a$.

8) Se ştie că $9 \times a = 630$. Calculaţi $(9 \times 7) \times a$.

9) Se ştie că $a \times 10 = 130$. Calculaţi $a \times (5 \times 2 \times 10)$.

10) Se ştie că $a \times b = 96$ şi $a \times c = 120$. Calculaţi $a \times (b + c)$.

11) Se ştie că $zu = 98$ şi $zy = 140$, calculaţi $z \times (u + y)$.

12) Se ştie că $ab = 288$ şi $ac = 120$, calculaţi $a \times (b - c)$.

13) Se ştie că $m \times n = 128$ şi $m \times p = 48$, calculaţi $m \times (n - p)$.

14) Se ştie că $x = 8$ şi $y + z = 23$. Calculaţi $xy + xz$.

15) Se ştie că $b + c = 19$ şi $a = 18$. Calculaţi $ab + ac$.

16) Se ştie că $y - z = 3$ şi $x = 14$, calculaţi $xy - xz$.

17) Se ştie că $a = 80$ şi $b - c = 5$, calculaţi $ab - ac$.

18) Se ştie că $xy + xz = 476$, calculaţi $2x \times (y + z)$.

19) Se ştie că $ab + ac = 285$, calculaţi $(b + c) \times 3a$.

20) Se ştie că $xy - xz = 26$. Calculaţi $5x \times (y - z)$.

21) Se ştie că $ab - ac = 64$. Calculaţi $(b - c) \times a : 8$.

22) Se ştie că $ab = 608$ şi $ac = 416$. Calculaţi $a(b + c) : 4$ şi $a(b - c) : 6$.

58. Determinaţi numerele naturale consecutive pare a, b şi c, ştiind că $ac - ab = 32$.

59. Determinaţi numerele naturale b şi c, ştiind că $ab + ac = 252$, $a = 21$, iar b este dublul lui c.

60. Ştiind că $xy + xz = 168$, iar x este un număr prim şi par, calculaţi:

a) $x + y + z =$ b) $x + 2y + 2z =$ c) $4x + 4y + 4z =$

d) $10x + y + z =$ e) $x(y + z) \times 7 =$ f) $(y+z) : x =$

61. Fie numerele naturale a, b, c şi d, distincte de zero. Calculaţi :

a) $(ab + ac) : (b + c) : a =$ b) $(ab - ac) : (b - c) : a =$

c) $(\overline{abcd} + \overline{abc} - \overline{bcd} - \overline{bc}) : \overline{aa} =$ d) $(\overline{abcd} - \overline{bcd}) : \overline{a0} - (\overline{bcd} - \overline{cd}) : b =$

62. Scrieţi ca adunare repetată:

a) $5 \times 8 =$ b) $6b =$ c) $ab =$

63. Puneţi semnul de relaţie fără să efectuaţi operaţiile date:

a) $4 \times 7 \ \square \ 6 \times 4$; b) $8 + 8 + 8 + 8 + 8 \ \square \ 4 \times 8$;

c) $2a \ \square \ 3a$.

64. Determinaţi numerele naturale x şi y din:

a) $(x + 3) \times (y - 2) = 12$ b) $(x + 1) \times (y + 4) = 16$

c) $(x - 7) \times (y + 7) = 14$ d) $(x - 10) \times (10 - x) = y$

65. Puneţi semnul de relaţie fără a calcula înmulţirile date, ci efectuând operaţiile ce rezultă din scrierea unora dintre factori ca sume:

a) $9 \times 8 \ \square \ 12 \times 6$; b) $2 \times 6 \ \square \ 3 \times 4$.

66. Puneţi semnul >, < sau = ştiind că fiecare membru din relaţia de mai jos are ca rezultat un număr natural:

$(a - 8) \times (8 - a) \times 8 \ \square \ (8 - a)(a - 8) + 8$.

67. Aflaţi numărul natural a din:

a) $a \times a + a \times a = 18$;

b) $a \times a \times a + a \times a \times a = 54$;

c) $1 \times 2 \times 3 \times a \times 4 = 4 \times 3 \times 3 \times 2$;

d) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 8 \times 9 = 1 \times a \times 8 \times 8 \times 9$;

e) $1 \times 2 \times 3 \times a \times 100 = 100 \times 2 \times 1 \times a \times 3$;

f) $a : a + a - a : a = 100, a \neq 0$

g) $a : b \times b - a \times b : b + a \times b : b + a = 100, a > b \neq 0$;

h) $a : a : 2 + a : a : 4 + a : a : 4 = a, a \neq 0$;

i) $a : a : 2 + a : a : 2 + a = 2, a \neq 0$;

j) $\overline{1a} = 3a$; k) $6a = \overline{3a}$; l) $\overline{2a} = 6a$; m) $6a = \overline{1a}$.

68. Aflaţi în câte cifre identice alăturate se termină produsul primelor **25** de numere naturale nenule.

69. Determinaţi trei numere naturale ştiind că produsul primelor două este **12**, suma dintre primul şi al treilea este **10**, iar produsul ultimelor două numere este **28**.

70. Motivaţi scrierea generalizată a unui număr par, apoi a unui număr impar.

71. Ținând seama de condiția restului, scrieți toate formele numărului natural a care a fost împărțit la: **3**; **4**; **5**.

72. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr par. Cel mai mare dintre ele este număr par sau impar?

73. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr impar. Cel mai mic dintre ele este număr par sau impar?

74. Determinați numerele naturale a din următoarele scrieri:

a) $a:(72:9)=3$;
b) $4\times 9:a=6$;
c) $a\times(42:7:3)\times 8=32$;
d) $a:8=6$ (rest **5**);
e) $a:3=8$ (rest $\neq 0$);
f) $a:7=9$ (rest mai mic decât **1**);
g) $a:9=7$ (rest mai mare decât **6**);
h) $37:a=9$ (rest **1**);
i) $26:a=3$ (rest mai mic decât **6**);
j) $19:a=2$ (rest mai mare decât **1**);
k) $6:a=1$ (rest r);
l) $a:4=c$ (rest egal cu c);
m) $a:3=c$ (rest mai mic de **3** ori decât c);
n) $a:10=c$ (rest mai mare de **4** ori decât c);
o) $a:7=c$ (rest mai mare cu **2** decât c);
p) $a:3=c$ (rest mai mic cu **2** decât c).

75. Determinați cel mai mare număr natural care împărțit la **1 994** să dea un cât:

a) de **8** ori mai mare decât restul;
b) de **8** ori mai mic decât restul.

76. La un concurs de matematică, clasa noastră a fost reprezentată de trei elevi care s-au clasat pe locuri diferite, în primii **5**, fiind toți premiați cu sume de bani. Ştiind că produsul dintre valoarea premiului (număr natural) şi locul obținut este acelaşi pentru toți trei elevii, iar suma acestor produse este **20475**, aflați locul ocupat de fiecare reprezentant al clasei noastre.

77. a) Găsiți toate perechile de numere naturale (a, b), ştiind că $2a+3b=12$.

b) Aflați ultima cifră a rezultatelor din următoarele exerciții:

1) $3\times 4+105\times 2+3\times 11=$
2) $210a+10\times 2+2=$
3) $\overline{ab4}\times 6+\overline{9b3}\times 7+\overline{ab5}\times 1=$
4) $\overline{ab}\times 5+\overline{ab2}\times 5=$
5) $10\times 10\times\overline{ab}+4\times\overline{ab5}\times 9=$
6) $\overline{aa5}-3\times 9=$
7) $\overline{aa1}-\overline{c6}-\overline{d4}=$
8) $\overline{a2}\times 2\times\overline{\cdot\cdot 2}=$
9) $\overline{a7}\times\overline{a7}\times\overline{a7}\times 7=$
10) $3\times\overline{a3}\times\overline{a3}\times 3\times 3=$

c) Determinați numere naturale a, b, c şi d, ştiind că sunt mai mici decât **10**, sunt distincte între ele şi diferite de zero:

1) $500a+100b+15c+2d=753$;
2) $112a+22b+13c=195$;
3) $1\,000a+200b+30c+4d=1\,986$;
4) $200b+1\,010c+10\,001d+1\,011a=81\,111$;
5) $26a=6b+7c$;
6) $81a-101b-101c=1$;
7) $a-b-c=6$;
8) $a-b-3c=2$;
9) $11a+2b=101$;

10) $100\overline{ab} - 99 - \overline{ab} = 1\,089$.

78. Cristi a cumpărat de la un chioşc **4** kg de castraveţi, câţiva ştiuleţi de porumb cu **58** lei bucata şi **2** legături de pătrunjel. Fără să fi făcut calculul, el i-a răspuns vânzătorului că a greşit dacă trebuie să plătească o sumă terminată în **5**. De unde şi-a dat seama Cristi de acest fapt?

79. Aflaţi cele trei numere naturale consecutive, ştiind că:
a) suma lor este cu **109** mai mare decât unul dintre ele. Câte soluţii sunt?
b) unul dintre ele este cu **98** mai mic decât suma lor.

80. La împărţirea numărului natural a la un număr natural b, obţinem câtul q şi restul r. Care este câtul şi restul împărţirii lui $2a$ la $2b$?

81. Având de aflat restul împărţirii **23 000 : 6 000**, cei doi colegi, Camelia şi Dinu au răspuns diferit. Camelia a răspuns că restul este **5**, procedând astfel: **23 ~~000~~ : 6 ~~000~~ = 3** (rest **5**), Dinu a indicat alt rest. Cine are dreptate? Justificaţi!

82. Calculaţi în două moduri:
a) $64 : 8 + 24 : 8 =$ b) $36 : 9 + 54 : 9 =$
c) $56 : 7 + 28 : 7 =$ d) $30 : 6 + 24 : 6 =$
e) $63 : 9 - 27 : 9 =$ f) $56 : 8 - 32 : 8 =$

83. Fie numerele naturale $a \in \{71; 73\}$, $b = 55$ şi $c = 9$. După ce efectuaţi $a : c$, $b : c$ şi $(a + b) : c$, generalizaţi condiţiile în care $a + b$ se împarte exact la un număr c, ştiind că $a = cq + r_1$ şi $b = cd + r_2$.

84. Fie numerele naturale $a \in \{56; 57\}$, $b = 38$ şi $c = 6$. După ce efectuaţi $a : c$, $b : c$ şi $(a - b) : c$, generalizaţi condiţiile în care $a - b$ se împarte exact la un număr c, ştiind că $a = cq + r_1$ şi $b = cd + r_2$.

85. După ce efectuaţi **72 : 7,** calculaţi direct câtul şi restul la următoarele împărţiri, fără a efectua operaţiile din paranteză, apoi verificaţi şi generalizaţi: $(72 + 14) : 7$; $(72 + 21) : 7$; $(72 - 14) : 7$; $(72 - 21) : 7$.

86. Să se efectueze 102×6. Cu ajutorul rezultatului găsit, aflaţi câtul şi restul la următoarele împărţiri:
a) $714 : 102$; b) $614 : 102$; c) $916 : 102$; d) $510 : 102$;
e) $610 : 102$; f) $926 : 102$; g) $296 : 102$.

87. Câte numere sunt:
a) de la **1** la **8**; b) de la **2** la **8**; c) între **1** şi **8**; d) între **2** şi **8**; e) de la 2×3 la 2×8; f) între 2×3 şi 2×8; g) de la 89×91 la 90×91; h) între 89×91 şi 90×91; i) cel puţin egale cu 4×5, dar mai mici decât 4×9; j) cel puţin egale cu 4×5 şi cel mult egale cu 4×9; k) mai mari decât 2×3 şi mai mici decât 2×8; l) între $16 : 2$ şi $24 : 2$; m) de la $20 : 4$ la $32 : 4$.

88. Câte numere impare sunt:
a) de la **1** la **20**; b) de la **4** la **33**; c) de la **1** la **31**; d) de la **15** la **75**.

89. Câte numere pare sunt:
a) de la **6** la **81**; b) de la **9** la **40**; c) de la **1** la **60**; d) de la **8** la **84**.

90. Câte perechi care să aibă aceeaşi sumă se pot forma cu numerele:
a) de la **1** la **70**; b) de la **3** la **85**; c) de la **8** la **94**; d) de la **7** la **36**; e) de la **6** la **51**.

91. Câte perechi care să aibă aceeaşi sumă, se pot forma cu numerele:
a) pare de la **1** la **80**; b) impare de la **1** la **80**; c) pare de la **3** la **85**; d) impare de la **3** la **85**; e) pare de la **8** la **94**; f) impare de la **8** la **94**; g) pare de la **7** la **36**; h) impare de la **7** la **36**; i) pare de la **6** la **51**; j) impare de la 6 la **51**.

92. a) Se consideră două şiruri de numere, ca în desenul de mai jos, în care săgețile indică corespondența, număr cu număr, dintre acestea:

1	**2**	**3**	**4**	. . .	**99**	**100**
↓	↓	↓	↓		↓	↓
100	**99**	**98**	**97**	. . .	**2**	**1**

Ce număr îi corespunde lui **53**? Dar lui **68**?
b) Câte numere naturale mai mici decât **1 000** putem pune în locul lui ***y*** din fiecare exercițiu de mai jos, astfel încât fiecare cât obținut să fie număr natural:
1) $(y+2):2=$ 2) $(y+1):2=$ 3) $(y+5):2=$ 4) $(y+4):2=$

93. Ce numere naturale putem pune în locul lui ***y*** pentru a obține ca rezultat un număr natural:
a) $100:(y+1)=$ b) $100:(y+2)=$

94. Scrieți cel mai mare număr impar de două cifre cu cifra zecilor mai mică decât cifra unităților.

95. Cu cât este mai mic cel mai mic număr de trei cifre identice decât cel mai mare număr de trei cifre diferite?

96. Aflați suma a trei numere naturale consecutive dacă unul dintre ele este **101**.

97. Aflați suma a patru numere consecutive pare, dacă unul dintre ele este **1 002**.

98. Scrieți numărul **33** ca o sumă de termeni al căror produs să fie tot **33**.

99. Aflați suma cifrelor numărului natural ce poate fi scris astfel:
$\underbrace{(2\times5)\times(2\times5)\times\ldots\times(2\times5)}_{\text{n factori}}\times 3+2$, în care $n\neq 0$.

100. Să se afle cel mai mare, apoi cel mai mic număr de **100** de cifre care are **20** de cifre de **1**.

101. Să se determine numărul natural y, cunoscând că:

a) $y + 2$ este predecesorul numărului **17**;
b) $y + 2$ este precedentul numărului **10**;
c) $y + 2$ este succesorul numărului **17**;
d) $y + 2$ este consecutivul numărului **10**;
e) $y + 2$ este consecutivul par al numărului **14**;
f) $y + 2$ este precedentul impar al numărului **9**;
g) $y + 2$ este consecutivul impar al numărului **9**.

102. Aflați numărul natural a din: $91 + a \times (1 + 2 + 3 + ... + 90) = 91 \times 91$.

103. Calculați:

$(2 + 4 + 6 + ... + 1\,000 - 1 - 3 - 5 - ... - 999) : [(2 + 4 + 6 + ... + 100 - 1 - 3 - 5 - ... - 99) \times (2 + 4 + 6 + 8 + 10 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9)] =$

104. Aflați un număr natural știind că:

a) dacă îl adunăm cu jumătatea sa și cu sfertul său, obținem **14**;
b) dacă din dublul său scădem jumătatea sa, obținem **3**;
c) dacă din dublul numărului scădem sfertul lui, obținem **7**;
d) dacă din dublul său scădem îndoitul jumătății sale, obținem **2** ;
e) dacă la dublul său adunăm dublul sfertului său, obținem **10**;
f) dacă la doimea sa adunăm dublul jumătății sale, obținem **3**;
g) dacă la sfertul lui adunăm triplul sfertului său, obținem **4**;
h) dacă la triplul sfertului său adunăm jumătatea sa, obținem **5**;
i) dacă din triplul său scădem întreitul jumătății sale, obținem **3**;
j) dacă din triplul jumătății sale scădem dublul sfertului său, obținem **4**;
k) triplul său este cu **10** mai mare decât dublul său;
l) jumătatea sfertului său este **8**;
m) jumătatea jumătății sale este **4**.

105. Să se afle numerele naturale a, b și c, știind că $a + b + c = 11$, $ab + bc = 10$, iar $a = 2c + 1$.

106. Să se determine numărul natural de forma $\overline{abc}$, știind că:
$\overline{abc} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + a + b + c = 342$.

107. Să se determine numerele naturale ce constituie primul membru în egalitățile de mai jos (a se vedea și exercițiile **24 – 41**):

a) $\overline{ab} = 5(a + b)$;
b) $\overline{ab} = 6(a + b)$;
c) $\overline{ab} = 7(a + b)$;
d) $\overline{ab} = 8(a + b)$;
e) $\overline{ab} = 9(a + b)$;
f) $\overline{abc} = 11(a + b + c)$;
g) $\overline{abc} = 13(a + b + c)$;
h) $\overline{abc} = 14(a + b + c)$;
i) $\overline{abc} = 5 \cdot \overline{bc}$;
j) $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{bc}$;
k) $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ac}$;
l) $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 1\,506$;
m) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{bac} = 900$;
n) $\overline{xyz} = \overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz}$;
o) $\overline{xy} : 21 = x - y$.

108. Să se determine numărul natural de forma $\overline{xyz}$, ştiind că $7x+5y-z=8$ şi $y+z=11$.

109. Să se determine numerele naturale a şi b din:

1) $a+ab=7$; 2) $b+ab=3$;

110. a) Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr de **3** cifre care împărţite la **8** dau un cât şi restul **6**.

b) Câte numere de **3** cifre împărţite la **8** dau restul **6**?

111. a) Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr de **4** cifre care la împărţirea cu **39** să dea restul **16**.

b) Aflaţi suma numerelor de **4** cifre care împărţite la **39** dau restul **16**.

112. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$, unde b nu este neapărat distinct de a, care la împărţirea cu **15** dau restul **6**.

113. La o împărţire de numere naturale se ştie că deîmpărţitul este **142**, restul este **10**, iar câtul este mai mare decat împărţitorul. Care este acea împărţire?

114. Să se găsească două numere naturale astfel încât înmulţind de **4** ori primul număr cu dublul celui de-al doilea să se obţină **224**, iar dublul primului număr să fie cu **1** mai mare decât al doilea număr.

115. Suma a **3** numere naturale diferite este **24**. Ştiind că primul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două şi că fiecare se împarte exact la **4**, să se afle cele trei numere.

116. Determinaţi cele două numerele naturale care împărţite dau câtul **9** şi un rest strict mai mare decât **6**, dar cu **80** mai mic decât suma dintre deîmpărţit şi împărţitor.

117. Aflaţi trei numere consecutive, ştiind că suma ultimelor două este triplul primului număr.

118. **10** băieţi şi **11** fete au strâns împreună **272** kg de fructe de pădure. Cu câte kilograme au strâns mai mult băieţii decât fetele? Are mai multe soluţii problema?

119. În anul **1960**, cei patru prieteni, Alin, Barbu, Costel şi Didel, au constatat că:

a) vârsta lui Alin era reprezentată de numărul format de ultimele două cifre ale anului său de naştere;

b) vârsta lui Barbu era reprezentată de dublul numărului format de ultimele două cifre ale anului său de naştere;

c) vârsta lui Costel era reprezentată de triplul numărului format de ultimele două cifre ale anului său de naştere;

d) vârsta lui Didel era reprezentată de împătritul numărului format de ultimele două cifre ale anului său de naştere. Ştiind că toţi s-au născut după anul **1 901**, aflaţi anul de naştere al fiecăruia dintre cei patru prieteni.

120. În anul **1 971**, trei fraţi au constatat că fiecare are vârsta egală cu dublul sumei cifrelor anului său de naştere. Câţi ani a împlinit fiecare în **1 971** şi în ce an s-a născut?

121. Determinaţi numărul natural $\overline{ab}$, ştiind că:
$\mathbf{2(\overline{ab}+\overline{ab}):(a+b)\times\overline{ab}=308}$.

122. Determinaţi numărul natural $\overline{ab}$, ştiind că :
a) $(\overline{ab}-7)\cdot(\overline{ab}-6)\cdot(\overline{ab}-5)=6\cdot7\cdot5$;
b) $(\overline{ab}-11)\cdot(\overline{ab}-10)\cdot(\overline{ab}-9)=3\cdot2$;
c) $(\overline{ab}-18)\cdot(\overline{ab}-16)\cdot(\overline{ab}-17)=60$.

123. Produsul a două numere consecutive este **156.** Aflaţi numerele.

124. Dacă la un număr natural de două cifre adunăm **5**, iar rezultatul îl împărţim la **6**, obţinem acelaşi număr ca atunci când din numărul dat scădem **6**, iar diferenţa o împărţim la **5.** Aflaţi numărul.

125. Să se determine numărul natural $\overline{ab}$, ştiind că $a+b=11$, iar câtul împărţirii cu rest a lui a la b este **4**.

126. Ştiind că $\overline{af}+\overline{eb}=\overline{ch}+\overline{gd}=99$, calculaţi: $\overline{abcd}+\overline{efgh}$.

127. Ştiind că $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2\,167$ şi $c+d=7$, calculaţi: $\overline{abcd}:1\,952$.

128. Ştiind că $\overline{abab}-\overline{baba}=909$, calculaţi: $\overline{abab}:101$.

129. Ştiind că $\overline{abcd}-\overline{abc}-\overline{ab}-d=1\,264$, **iar** $\overline{abcd}:16=q$ **(rest 0)**, determinaţi $\overline{abcd}$.

130. Ştiind că $7\cdot\overline{aaa}=\overline{caaa}-c$, să se calculeze: $\overline{ac}:32$.

131. Dacă $\overline{xyztu}:4=\overline{utzyx}$, calculaţi: $(\overline{xyztu}+\overline{utzyx}):10989$, literele notând cifre distincte.

132. Să se determine cel mai mic număr de forma $\overline{abcd}$ cu cifre distincte, dacă:
1) $\overline{abcd}:\overline{ab}=q_1,\ q_1\in\mathbf{N}$; 2) $\overline{abcd}:\overline{cd}=q_2,\ q_2\in\mathbf{N}$.

133. Să se recostituie împărţirea: $\overline{dcba}:\overline{abcd}=4$.

134. Să se determine numărul natural de forma $\overline{xyz}$, ştiind că la împărţirea prin **3** se obţine câtul $\overline{yz}$ şi restul x.

135. Determinaţi numărul natural de forma $\overline{abc}$, ştiind că împărţit la răsturnatul său dă câtul **5** şi restul **36**.

136. La înmulțirea a două numere de câte **3** cifre, un elev a transcris de pe tablă, din greşeală, fiecare cifră a primului factor cu o unitate mai mică şi a obținut produsul **15 129** în loc de **28 782**. Care era înmulțirea corectă?

137. Având de efectuat înmulțirea $\overline{ab}\times\overline{cd}$, un elev a transcris greşit de pe tablă, încât cifrele celui de-al doilea factor au devenit $c+1$ şi, respectiv, $d-1$, obținând astfel produsul **1 495** în loc de **1 288**. Care era înmulțirea ce trebuia să o efetueze elevul?

138. Fie **5** numere naturale. Dacă le ordonăm crescător, observăm că fiecare este mai mare decât precedentul cu acelaşi număr, iar al treilea este **7**.

a) Aflați suma celor **5** numere.

b) Determinați cele **5** numere. Câte soluții sunt?

139. Dacă un număr natural este adunat cu zecile şi cu unitățile sale obținem **182**. Care este numărul? Sunt mai multe soluții?

140. Reconstituiți operațiile următoare:

a) $\overline{2a6}+\overline{6b}=\overline{c53}$;

b) $\overline{a9b}+\overline{c7}=640$;

c) $\overline{4ab}-\overline{c37}=\overline{d65}$;

d) $\overline{a8b}-\overline{5c6}=85$;

e) $\overline{7aba5}-\overline{2f2c}=\overline{ed089}$;

f) $\overline{6a2a1}-\overline{bcd9e}=809$;

g) $\overline{UNU}+\overline{UN}+\overline{U}=\overline{8U2}$;

h) $\overline{UNU}+\overline{UN}+\overline{U}=\overline{6UN}$;

i) $\overline{SANDA}+\overline{DANA}+\overline{AN}=\overline{DIANA}$;

j) $\overline{PLUS}+\overline{PLUS}+\overline{PLUS}+\overline{PLUS}=\overline{3P{*}04}$;

k) $\overline{PERELE}+\overline{RELE}+\overline{ELE}+\overline{LE}+\overline{E}=906\,985$;

l) $\overline{aa}+\overline{2b}=\overline{ccc}$;

m) $\overline{aa}+2\cdot\overline{b}=\overline{ccc}$;

n) $\overline{aaa}:b=\overline{bc}$.

141. Reconstituiți adunarea $n=x+y$, ştiind că: $x=\overline{2a7b}$, $y=\overline{51c6}$, iar $n=\overline{8d94}$.

142. Reconstituiți înmulțirile:

1)
$$\begin{array}{r} 36\times \\ \underline{\overline{ab}} \\ {*}\,{*}\,{*} \\ \underline{{*}\,{*}\,{*}} \\ 1\,{*}\,{*}\,4 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} \overline{ab}\times \\ \underline{\overline{c2}} \\ 7\,{*} \\ \underline{{*}\,0\,{*}} \\ {*}\,{*}\,{*}\,{*} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} \overline{NOI}\times \\ \underline{\overline{VOI}} \\ {*}\,{*}\,{*}\,{*} \\ {*}\,{*}\,{*} \\ \overline{ŞAPTE}, \end{array}$$
unde litere distincte notează cifre distincte.

4)
$$\begin{array}{r} \overline{5ab}\times \\ \underline{\overline{c3d}} \\ {*}\,{*}\,0\,{*} \\ {*}\,{*}\,{*}\,1 \\ \underline{{*}\,{*}\,{*}} \\ {*}\,{*}\,{*}\,1\,3 \end{array}$$

5) Determinați numărul $\overline{abcde}$ dacă:
$\overline{abcde}\cdot\overline{yztu}=95\,713+\overline{{*}{*}{*}{*}{*}{*}0}+\overline{{*}{*}{*}{*}{*}{*}00}+\overline{{*}{*}{*}{*}{*}000}=$
$=\overline{{*}{*}{*}{*}{*}{*}603}$.

6) $\overline{abcba}\cdot 33\,333=\overline{{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}085}$.

143. Reconstituiți împărțirile:

a) $\overline{6a7b8} : \overline{c7d} = \overline{1fg}$

$$\begin{array}{l} \ast 7 \ast \\ \hline 3\ast 64 \\ \ast 9 \ast 8 \\ \hline =2\ast 6\ast \\ \ \ast 9\ast 8 \\ \hline \ ==== \end{array}$$

b) $\overline{abcde} : \overline{g6} = \overline{4zt}$

$$\begin{array}{l} \ast\ast\ast \\ \hline ==9d \\ \quad \ast 2 \\ \hline \quad 1\ast e \\ \quad \ \ast 8e \\ \hline \quad === \end{array}$$

c) $\overline{dcba} : \overline{abcd} = 4$;

d) $\overline{abc} : \overline{cba} = 2$ **(rest 100)**, iar $a - c = 4$.

144. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, cu cifre nu neapărat distincte, știind că la împărțirea diferenței dintre acesta și răsturnatul său prin produsul cifrelor sale se obține $a - b$.

145. Care sunt numerele de forma $\overline{abc}$ care au cifra zecilor de patru ori mai mare decât cifra unităților și de **2** ori mai mare decât cifra sutelor?

146. Determinați numărul de forma $\overline{5a}$ care la împărțirea prin **7** dă restul **6**.

147. Determinați numărul de forma $\overline{7a}$ care la împărțirea prin **9** dă restul maxim.

148. Determinați numerele naturale care satisfac egalitatea:

$a \cdot b(a + b) = 30$.

149. Determinați numărul natural $\overline{aa}$, știind că:

$a \times a \times a = a + a + a + a + a + a + a + a + a$.

150. Aflați două numere naturale egale știind că împărțind produsul la suma lor obținem câtul **14**.

151. Găsiți trei numere naturale distincte al căror produs să fie egal cu suma lor.

152. Găsiți nouă numere naturale nu neapărat distincte, care au suma egală cu produsul lor.

153. Găsiți numărul natural a care satisface egalitatea: $a + a = a \times a = a^a$.

154. Arătați că dacă se mărește cu **1** produsul a două numere naturale consecutive pare sau impare se obține pătratul unui număr natural.

155. Să se afle numerele naturale x, y, z distincte de **1**, știind că $xy = 21$, $yz = 15$, $zx = 35$.

156. Determinați numărul $\overline{ab}$, știind că:

$\overline{ab} - 2 = \overline{cd}$, iar $\overline{cd} = 2q$; $\overline{ab} - 5 = \overline{ef}$; $\overline{ef} = 5x$; $\overline{ab} - 7 = \overline{gh}$; $\overline{gh} = 7y$.

157. Să se afle cifrele x şi y din: $\overline{xyyy} - \overline{yyyx} = \overline{xxx}$.

158. Suma a două numere este $\overline{aa}$. Aflaţi numerele dacă:

1) ultima cifră a primului număr este **2**, iar al doilea număr este cu **2** mai mare decât primul;

2) ultima cifră a primului număr este **7**, iar al doilea număr este cu **5** mai mare decât primul.

159. Dacă dintr-un număr natural scădem pe **20**, pe **19**, pe **21** şi pe **24**, apoi adunăm cele patru resturi, obţinem o sumă egală cu numărul iniţial. Care este acel număr?

160. Să se afle câte numere naturale mai mici decât **213** există astfel încât, dacă înmulţim pe oricare dintre ele cu **3**, obţinem un număr cel puţin egal cu **213**.

161. La sfârşitul primului trimestru, cei patru colegi, Diana, Ştefănel, Oana şi Dan, au, respectiv,următoarele note la matematică:

1) **7; 8; 9; 8;** 2) **9; 9; 10; 8;**

3) **8; 10; 10; 8;** 4) **10; 8; 10; 10; 10.**

Care dintre ei va avea media trimestrială mai mare la această disciplină? Puteţi calcula în două moduri?

162. În patru grămezi sunt, respectiv, **70** kg, **80** kg, **48** kg şi **42** kg de mere. Câte kg de mere va conţine unul dintre cele patru coşuri, dacă în fiecare se pune aceeaşi cantitate?

163. Un turist a străbătut distanţa dintre două localităţi astfel: în prima zi **100** km, în a doua zi **111** km, iar în a treia zi, **95** km. Câţi km străbate într-o zi un alt turist care a plecat şi a ajuns o dată cu primul, parcurgând aceeaşi distanţă, dar străbătând în fiecare zi acelaşi număr de kilometri?

164. Media aritmetică a două numere este **9**. Unul dintre numere este **12**. Care este celălalt număr?

165. Media aritmetică a trei numere este **18**. Al doilea număr este cu **4** mai mare decât primul, dar cu **13** mai mic decât al treilea număr. Să se afle numerele.

166. Trei numere au, două câte două, media aritmetică respectiv egală cu **21**, **22**, **25**. Care sunt numerele?

167. Arătaţi că media aritmetică a trei numere naturale este un număr natural, dacă:

a) sunt numere consecutive;

b) diferenţa dintre al doilea şi primul număr este egală cu diferenţa dintre al treilea şi al doilea număr.

168. Elena avea la limba română trei note distincte pe baza cărora putea să obţină exact media **7**. Ce note avea Elena? Câte soluţii sunt?

169. Lăsând neschimbată ordinea cifrelor de mai jos, puneți între ele semne ale operațiilor aritmetice în aşa fel încât să se obțină egalități adevărate:

a) **1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1**; b) **123456789 = 1**.

170. Fie cifrele de mai jos. Puneți între ele semne ale operațiilor aritmetice şi, la nevoie, paranteze, pentru a obține pe rând rezultatele indicate în paranteze:

a) patru cifre de **1** (rezultate: numerele de la **0** la 4);
b) patru cifre de **2** (**0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12**);
c) patru cifre de **3** (numerele de la **0** la **10**);
d) patru cifre de **4** (**3; 6; 7; 8; 24; 32**);
e) patru cifre de **5** (**2; 3; 5; 6; 7; 9; 26; 30**);
f) patru cifre de **8** (**1; 2; 4; 10; 15**);
g) patru cifre de **9** (**1; 2; 7; 8; 9; 10; 19**);
h) patru cifre de **6** (**1; 5; 6; 8; 12; 24; 30**);
i) patru cifre de **7** (**1; 3; 8; 13; 15**).

171. Cu ajutorul a trei cifre de **5** şi a două cifre de **1**, folosind numai adunarea, obțineți:

a) printr-un singur mod sumele: **17**; **35**;
b) prin două moduri sumele: **26**; **62**;
c) prin trei moduri, suma **71**.

172. Determinați numerele naturale a, b, c, d şi e care satisfac simultan egalitățile:

1) $e+e+e=90-58-e$; 3) $d-12=c$; 5) $b+b=a$.
2) $d=e+e$; 4) $b=c+6$;

173. Determinați numerelede forma $\overline{ab}$, ştiind că $(a+b):b=b$.

174. Aflați două numere naturale ştiind că ultima cifră a primului număr este **5**, al doilea număr este cu **5** mai mare decât primul număr, iar suma lor este de forma $\overline{aaa}$.

175. Determinați toate numerele naturale de două cifre al căror sfert întrece semiprodusul cifrelor cu un sfert din cifra unităților (G. M. 2-3 /1 993).

176. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$, atunci să se arate că egalitatea $\frac{\overline{aa}\cdot b}{a+b}=a\cdot b$ este adevărată. (G. M. 2-3/1 993).

177. Care este valoarea lui a pentru ca fracțiile următoare să fie echiunitare?

1) $\frac{5a-a\cdot 3}{8}$; 2) $\frac{5a+a\cdot 3}{8}$.

178. Care este valoarea minimă a lui a, număr natural, diferit de zero, pentru ca fracțiile să fie, pe rând, subunitare şi supraunitare:

1) $\frac{a-3}{7}$; 2) $\frac{a+3}{7}$; 3) $\frac{a\cdot 3+1}{7}$; 4) $\frac{a:3}{7}$, unde a se împarte exact la **3**, iar $a\geq 3$.

CAPITOLUL al II–lea

Probleme de sumă şi diferenţă

Metoda de bază: metoda figurativă sau grafică; alte metode şi procedee: prin aproximaţii succesive, prin particularizarea formulei, metoda algebrică.

Metoda figurativă sau grafică constă în reprezentarea (figurarea) mărimilor din probleme şi a relaţiilor dintre ele prin diferite *elemente grafice*: desene, figuri geometrice plane, segmente de dreaptă, puncte, ovale, semiovale, litere sau combinaţii de litere, alte simboluri şi semne convenţionale.

Această metodă este aplicabilă în orice problemă în care se poate apela la figurare şi, prin caracterul lor intuitiv, este indispensabilă în rezolvarea de către elevii claselor primare a multora dintre problemele de aritmetică.

Sugestii în utilizarea metodei grafice, folosind segmentele de dreaptă (această reprezentare este cel mai des întâlnită în practică):

a) la început se vor rezolva probleme în care mărimile se pot reprezenta unidimensional, fără alte convenţii, (exemplu: două bucăţi de sfoară, de sârmă etc, adică mărimi "continue"), pentru că în mintea elevului de 6-8 ani, un număr de pagini, o sumă de bani, o cantitate, un număr abstract nu pot fi reprezentate printr-un segment de dreaptă;

b) cantităţile pot fi reprezentate prin grămezi, dreptunghiuri, pătrate, linii curbe închise, pe baza diagramelor mulţimilor;

c) într-o altă fază, se stabilesc convenţii, astfel: încercăm să numărăm elementele (banii, kilogramele, litrii etc.) şi, pentru fiecare unitate, punem câte un punct; neştiind câte unităţi sunt pentru fiecare mărime, unim punctele printr-un segment de dreaptă; mărimea mai mare va fi reprezentată printr-un segment tot atât de lung cât este şi celălalt şi încă un segment ce va reprezenta diferenţa;

d) cel mai des folosită reprezentare este cea în care suma este redată printr-o acoladă (a se vedea rezolvarea de la ex. **1**), nu printr-un segment care cuprinde cele două mărimi; avantajul este mai clar când intervin mai multe mărimi şi transferuri între acestea;

e) în clasele a III-a şi a IV-a trebuie să se revină asupra acestor probleme, încercându-se şi alte metode de rezolvare, cât şi enunţuri mai complicate;

f) dată fiind importanţa deosebită a redării pe scurt a problemelor, trebuie planificate ore în acest scop;

g) datorită ritmului lent de scriere al elevilor din clasa a II-a, cât şi necesităţii de a le forma o scriere lizibilă şi frumoasă, în redarea pe scurt a problemelor se pot folosi *simboluri*, stabilite pe bază de convenţii orale; de aceea, în multe din soluţiile prezentate în această lucrare, am convenit ca mărimile (vârsta, cantitatea, lungimea, suma de bani etc.) să fie notate prin cifre romane (**I**, **II**, **III** etc.) sau prin litere.

Enunțuri

1. Astă-vară, Dan şi George au vândut împreună Centrului de Achiziții a Fructelor din Deleni **166** kg de vişine.

Câte kg a vândut fiecare, dacă Dan a vândut cu **6** kg mai mult decât George?

2. Fie trei numere naturale consecutive. Suma primelor două este egală cu al treilea număr. Aflați numerele.

3. Diferența a două numere este **19**. Dacă împărțim suma lor la diferență, obținem câtul **18** şi restul **17**.

Aflați cele două numere.

4. Suma a două numere naturale este **14**. Dacă împărțim suma lor la diferență, obținem câtul **3** şi restul **2**.

Care sunt cele două numere?

5. La o fermă pomicolă s-au plantat într-o primăvară **1 986** de pomi fructiferi. Câți pomi s-au plantat de fiecare fel, ştiind că erau **1 224** de meri şi peri la un loc, **1324** de meri şi cireşi, iar peri şi cireşi erau la un loc **1424**.

6. Un val de tifon de **18** m a fost tăiat în două bucăți, în aşa fel încât diferența dintre ele este de **8** metri. Ştiind că una dintre bucăți costă cu **208** lei mai mult decât cealaltă, aflați câți lei costă fiecare.

7. O echipă a participat la împădurirea unui deal. Aflați câți puieți de fiecare fel a plantat echipa, ştiind că **495** de puieți erau fagi şi stejari, **480** erau stejari şi tei, iar **435** de puieți erau fagi şi tei.

8. La Societatea Comercială "M.A.–S.A." a intrat în reparații, în luna decembrie, un număr de tractoare, semănători şi combine.

Ştiind că **10** din acestea nu sunt tractoare, **13** nu sunt semănători, iar **15** nu sunt combine, aflați câte maşini agricole de fiecare fel au intrat în reparații, în acea lună.

9. Cristian şi Bogdan au economisit împreună **666** lei. Dacă Bogdan i-ar da lui Cristian **13** lei, ei ar avea sume egale.

Câți lei are fiecare?

10. În două magazii erau depozitate **142** t de porumb. După ce din prima magazie s-au transportat în a doua **23** de t, cantitățile de porumb din cele două magazii au devenit egale.

Ce cantități de porumb erau la început în fiecare magazie?

11. În două silozuri erau **4 768** kg de grâu. După ce din primul siloz s-au transportat în celălalt **1 216** kg, în al doilea siloz sunt cu **486** kg mai mult decât în primul. Ce cantități au fost inițial în fiecare siloz?

12. În două depozite erau **1 200** chintale de grâu. După ce din primul depozit se transportă în al doilea **30** de chintale, acesta din urmă conține cu **18** chintale mai puțin decât primul depozit.
Câte chintale de grâu au fost inițial în fiecare depozit?

13. La un aprozar s-au adus **324** kg de fructe. După ce s-au vândut **52** kg de mere şi s-au mai adus **40** kg de pere, atunci fiecare dintre aceste cantități era cu **6** kg mai mare decât cantitatea de prune existentă.
Câte kg de fructe de fiecare fel s-au adus inițial la acest aprozar?

14. Ion, Petru şi Gheorghe au împreună o sumă cuprinsă între **192** de lei şi **198** de lei. Dacă Petre îi dă lui Ion **15** lei şi lui Gheorghe **8** lei, atunci ei au sume egale, reprezentate de numere naturale. Ce sumă are fiecare?

15. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr cuprins între **61** şi **65**. Aflați numerele.

16. Florin şi Ionel au împreună **898** de lei. După ce Florin îi dă lui Ionel **248** de lei, Ionel are cu **150** lei mai mult decât Florin.
Câți lei a avut fiecare la început?

17. Pe partea dreaptă a unei străzi sunt cu **4** pomi mai mulți decât pe partea stângă. Pe altă stradă, pe fiecare parte, e un număr dublu de pomi față de numărul total de pomi de pe prima stradă.
Câți pomi sunt pe fiecare parte a fiecărei străzi, dacă în total, pe cele două străzi, sunt **220** de pomi?

18. În trei coşuri sunt **324** de mere. Când din primul s-au pus în al doilea **6** mere, în fiecare coş a rămas acelaşi număr de fructe. Câte mere au fost inițial în fiecare coş?

19. Trei copii au economisit fiecare câte o sumă de bani, în total **680** de lei. Ce sumă a economisit fiecare, ştiind că dacă primul i-ar da celui de-al doilea **25** de lei, ei ar avea sume egale, însă al treilea ar avea acum cu **65** de lei mai mult decât fiecare din ceilalți doi.
Ce sumă a economisit fiecare copil?

20. Doi copii au împreună **32** de bile. Primul spune celuilalt: "Dacă eu îți dau o bilă şi tu îmi dai **2** bile, atunci vom avea acelaşi număr de bile".
Câte bile avea fiecare copil?

21. Suma a trei numere naturale este **1 522**. Dacă din fiecare număr se scade acelaşi număr, se obțin numerele **101**, **1 008** şi **107**.
Care sunt cele trei numere?

22. Tatăl împarte celor trei fii suma de **250** de lei, în aşa fel încât, dacă fiecare mai adaugă la suma primită şi suma pe care o mai avea, au aceeaşi sumă de bani. Câți lei primeşte fiecare fiu, dacă primul mai avea **15** lei, al doilea cu **5** lei mai mult, al treilea cu **12** lei mai mult decât primul?

23. Pentru efectuarea unei lucrări, nişte zidari şi nişte dulgheri au primit suma de **31 900** lei. Zidarii au primit câte **500** de lei fiecare, iar dulgherii câte **600** lei fiecare. Toți dulgherii au primit cu **3 100** lei mai puțin decât zidarii.
Câți zidari şi câți dulgheri au fost?

24. Patru bucăți de pânză au o lungime totală de **32** de m. Ştiind că prima bucată este mai mare cu **8** m decât celelalte trei luate la un loc, iar lungimea fiecăreia dintre ultimele trei bucăți, începând cu a doua şi terminând cu a patra, este reprezentată de numere consecutive pare, aflați ce lungime are fiecare bucată.

25. Când eu aveam **12** ani, fratele meu avea **2** ani. Acum avem împreună **56** de ani. Câți ani avem fiecare?

26. Aflați cât costă o carte şi cât costă un caiet, dacă **2** cărți costă mai mult decât **2** caiete cu **20** de lei, iar o carte şi un caiet costă **30** de lei.

27. Aflați lungimea şi lățimea unui dreptunghi al cărui perimetru este de **2 036** m, lungimea lui fiind cu **278** m mai mare decât lățimea.

28. Mama împarte celor trei copii ai săi **30** de mere. Al treilea primeşte cu **6** mai multe decât primul copil, iar al doilea primeşte cu **3** mere mai puțin decât al treilea. Câte mere primeşte fiecare copil?

29. Dacă la $\frac{5}{9}$ dintr-un număr adăugăm $\frac{3}{7}$ din alt număr obținem **1 605**. Să se afle cele două numere, ştiind că $\frac{5}{9}$ din primul număr reprezintă cu **855** mai mult decât $\frac{3}{7}$ din al doilea număr.

30. Scrierea pe scurt a unei probleme a dus la următoarele relații:
$x+y+z=270$; $x-a=24$; $y-a=81$; $z-a=132$; $x=?$; $y=?$; $z=?$.
Compuneți o problemă folosind aceste relații, apoi rezolvați-o.

31. Un biciclist a parcurs **42** de km în **3** ore. În fiecare oră, biciclistul şi-a micşorat viteza cu **1** km. Câți km a străbătut în fiecare oră?

32. Media aritmetică a trei numere este **8**, al doilea este cu **7** mai mare decât primul, dar cu **4** mai mic decât al treilea. Să se afle numerele.

33. Să se determine trei numere naturale care au, două câte două, media aritmetică egală respectiv cu **6**, **9**, **7**.

34. Există două numere naturale a căror diferență să fie **7** şi a căror medie aritmetică să fie **10**?

35. Să se determine toate numerele naturale de **2** cifre care îndeplinesc condițiile:
a) cifrele sunt consecutive şi descrescătoare;
b) suma cifrelor se împarte exact la **3**.

CAPITOLUL al III–lea

Probleme de sumă şi raport

Metoda de bază: metoda figurativă sau grafică;
Alte metode şi procedee: metoda falsei ipoteze,
metoda proporțiilor,
metoda algebrică,
prin particularizarea formulei.

Problemele de sumă şi raport cer determinarea părților, cunoscându-li-se suma (întregul), dar e necesară transformarea părții (părților) mai mari în unități la fel de mari (echivalente) cu partea mai mică.

Se obține astfel o problemă în care întregul (suma) este constituit dintr-un număr de părți echivalente. Esențială este determinarea numărului de părți şi a valorii unei unități. Celelalte părți sunt determinate prin operația de multiplicare a părții mai mici.

La început, în reprezentarea grafică, este mai uşor să se pornească de la mărimea mai mică, iar celelalte să fie figurate în raport de aceasta.

Ca urmare, relațiile de tipul "***a*** este mai mic decât ***b*** de ***x*** ori" vor fi transformate în "***b*** este mai mare decât ***a*** de ***x*** ori". Într-o altă etapă, această transformare nu mai este necesară. În reprezentarea grafică se poate pleca şi de la mărimea mai mare, celelalte fiind figurate prin operația de divizare a segmentului ce o reprezintă pe cea dintâi.

Enunțuri

1. Aflați câte pagini a citit fiecare dintre doi copii, ştiind că Mitruț a citit de **3** ori mai mult decât George, iar împreună au citit **84** de pagini.

2. Florin, Andrei şi Cezar au împreună **154** de timbre. Câte timbre are Cezar, dacă acesta are cât jumătate din numărul timbrelor lui Andrei, iar acesta are cât jumătate din numărul timbrelor lui Florin? Dar ceilalți doi?

3. Un pix şi un stilou costă la un loc **267** lei. Dacă micşorăm prețul pixului cu **2** lei şi mărim prețul stiloului cu **10** lei, atunci stiloul costă de **10** ori mai mult decât pixul.

Câți lei costă stiloul? Dar pixul?

4. În două coşuri sunt mere şi pere, în total **210** kg. După ce s-au vândut **26** kg de mere şi **14** kg de pere, cantitatea de mere rămasă este de **4** ori mai mare decât cea de pere.

Câte kg de fructe de fiecare fel au fost inițial?

5. O familie a recoltat în trei zile **2 510** kg de struguri. În a doua zi a recoltat de **4** ori mai mult decât în prima zi şi încă **10** kg, a treia zi a recoltat cu **8** kg mai puţin decât jumătate din cantitatea culeasă în prima zi.
Câte kg se struguri a recoltat familia în fiecare zi?

6. Determinaţi numărul de **2** cifre în condiţiile următoare: dacă schimbăm ordinea cifrelor sale şi adunăm numărul obţinut astfel la cel de la început obţinem **88**; dacă împărţim numărul iniţial la numărul obţinut prin shimbarea ordinii cifrelor sale, obţinem câtul **2**, restul **10**.

7. Determinaţi cele **2** numere naturale a căror sumă este **462**, ştiind că dacă înlăturăm cifra unităţilor, care este zero, de la primul număr, obţinem al doilea număr.

8. În trei săptămâni, o familie a consumat **74** kwh energie electrică. Ştiind că în prima săptămână a consumat cât trei sferturi din cantitatea de energie consumată în a doua săptămână, iar în aceasta cât trei sferturi din cantitatea consumată în a treia săptămână, aflaţi câţi kwh de energie electrică a consumat familia în fiecare săptămână.

9. Patru elevi au împreună suma de **288** lei. Al doilea are de două ori mai mult decât primul, aceştia împreună au de două ori mai mult decât al treilea, iar toţi trei au împreună de trei ori mai mult decât al patrulea.
Ce sumă are fiecare?

10. Suma a două numere este **90**. Diferenţa lor este numărul mai mic.
Aflaţi cele două numere.

11. Suma a două numere este **88**, iar diferenţa lor este a cincea parte din numărul mai mic.
Care sunt cele două numere?

12. Un număr adunat cu sfertul lui este egal cu **95**.
Care este numărul?

13. Doi elevi au împreună **120** lei. Primul a cheltuit din bani de **2** ori mai mult decât al doilea şi amândoi au primit rest câte **30** lei.
Câţi lei avea fiecare?

14. Două numere au suma **93**. Dacă le împărţim obţinem câtul **5** şi restul **3**. Care sunt cele două numere?

15. Suma a trei numere este **540**. Primul număr este de **2** ori mai mare decât al doilea şi de **3** ori mai mic decât al treilea.
Să se afle cele trei numere.

16. Vârsta tatălui împreună cu vârstele celor doi fii ai săi este de **70** de ani. Care este vârsta fiecăruia, ştiind că vârsta tatălui este de **2** ori mai mare decât a fiului mare, iar vârsta fiului cel mic este jumătate din vârsta fratelui său.

17. O jumătate din suma economisită de un elev este egală cu o treime din suma celui de-al doilea şi cu o cincime din cea economisită de al treilea. Ştiind că ei au împreună **2 000** lei, să se afle cât a economisit fiecare.

18. La un cros, Cristi observă că numărul participanţilor ce se aflau, la un moment dat, în faţa lui reprezintă o treime din numărul celor care erau în urma sa. Aflaţi al câtelea era Cristi, ştiind că numărul total al participanţilor la acel cros era **17**.

19. Anul trecut un teren agricol de **112** ha a fost reamenajat, fiind împărţit în parcele egale. Anul acesta fiecare parcelă a fost micşorată cu o optime, astfel încât s-a obţinut o parcelă în plus, egală cu celelalte.

Câte ha avea o parcelă anul trecut şi câte ha anul acesta?

20. Scrieţi numărul **169** ca o sumă de trei termeni, încât fiecare termen să fie triplul precedentului.

21. Dacă îmi dai $\frac{2}{5}$ din suma ta, eu voi avea atunci tot atât cât îţi rămâne ţie.

Câţi lei avem fiecare, dacă împreună avem **120** lei?

22. Într-o cutie sunt în total **70** de bile roşii, galbene şi albastre. După ce am scos **7** bile roşii, **6** bile galbene şi **8** bile albastre, în cutie au rămas de **2** ori mai multe bile galbene decât roşii şi de **2** ori mai multe bile albastre decât galbene.

Câte bile de fiecare fel au fost la început în cutie?

23. O bluză, o pereche de pantofi şi un costum de haine costă împreună **4720** lei. Cât costă fiecare articol, dacă preţul bluzei este de **15** ori mai mic decât preţul pantofilor şi al costumului luate împreună, iar preţul pantofilor reprezintă a patra parte din costul costumului?

24. Cantitatea de **2 250** litri de apă este turnată în nişte butoaie numerotate de la **1** la **4**, astfel încât fiecare butoi să conţină cât jumătate din cantitatea turnată în butoiul ce are numărul mai mic cu **1** decât al său. Câţi litri de apă sunt în fiecare butoi?

25. Suma a **4** numere este **480**. Ştiind că al doilea este de **3** ori mai mic decât primul, al treilea este cât media aritmetică a primelor două, iar al patrulea este cât media aritmetică a primelor trei numere, să se afle numerele.

26. O veveriţă aduce câte o alună în vizuină la fiecare **120** secunde. Cât de departe de alun se află vizuina ei, dacă veveriţa fuge fără alune **6** m într-o secundă şi cu alune **3** m într-o secundă, ştiind că ea nu se opreşte deloc în cele **120** secunde?

27. Într-un sac sunt **46** kg de făină, iar în altul **54** kg.

Câte kg de făină trebuie să transferăm dintr-un sac în altul, ca raportul dintre cantităţi să fie **9**?

28. Doi elevi au împreună **210** lei. Dacă primul dă celui de-al doilea $\frac{1}{6}$ din cât are, al doilea elev va avea $\frac{1}{2}$ din cât îi rămâne primului.

Câți lei are fiecare elev?

29. Când merge la bunica, Bogdan parcurge cei **80** de km astfel: o oră cu bicicleta, o oră cu autobuzul şi o oră pe jos.

Ştiind că viteza bicicletei este de **4** ori mai mică decât a autobuzului, iar distanța parcursă pe jos este de **3** ori mai mică decât cea parcursă cu bicicleta, să se afle:

a) ce distanță parcurge Bogdan cu autobuzul;

b) viteza autobuzului.

30. Notăm cu m suma a două numere.

Câtul împărțirii numărului mai mare la cel mai mic este **6**, iar restul r. Să se exprime prin m şi r numărul mai mic.

31. Dacă s-ar împărți un teren dreptunghiular, cu perimetrul de **150** metri, în două loturi cu arii egale, s-ar obține două pătrate.

Care sunt dimensiunile dreptunghiului?

32. Printr-un gard paralel cu lățimea, un teren dreptunghiular de **27** metri pătrați se desparte în două parcele, prima având formă de pătrat şi o suprafață de **2** ori mai mică decât a doua.

Aflați ce lungime are gardul care împrejmuieşte a doua parcelă, ştiind că dimensiunile ambelor parcele sunt exprimate în numere naturale.

33. Să se afle cele două numere a căror sumă este **170**, iar unul este de **2** ori mai mare decât dublul celuilalt.

34. Dinu, Camelia şi Irina au împreună un număr de timbre filatelice cuprins între **91** şi **95**.

Câte timbre are fiecare, ştiind că numărul de timbre pe care le are Camelia este cât $\frac{2}{5}$ din numărul timbrelor lui Dinu şi de **3** ori mai mare decât numărul de timbre pe care le are Irina?

35. Tiberiu a cumpărat trei feluri de caiete.

Numărul caietelor de matematică cumpărate a fost de **3** ori mai mare decât al celor de dictando şi de **4** ori mai mare decât al celor de biologie.

Stabiliți dacă numărul total de caiete cumpărate de Tiberiu putea fi strict mai mic decât **19**.

CAPITOLUL al IV–lea

Probleme de diferență şi raport

Metoda de bază: metoda grafică;
Alte metode şi procedee: metoda falsei ipoteze, prin proporții derivate, prin particularizarea formulei, metoda algebrică

În problemele de diferență şi raport, hotărâtoare este definirea diferenței ca un întreg constituit dintr-un număr de părți echivalente, fiecare parte având aceeaşi valoare ca şi numărul mai mic. Pentru determinarea întregului mai mare este necesară luarea în considerare a numărului de părți cu aceeaşi valoare, folosind relația de multiplicitate.

Problemele în care este dublu raport sunt cele mai dificile, iar metoda grafică poate avea mai multe variante (exemplu: **25.**).

Enunțuri

1. Diferența a două numere naturale este **114**, iar unul este mai mic decât celălalt de **4** ori. Determinați numerele.

2. Într-un vas sunt **35** litri de apă, iar în altul **8** litri. În fiecare vas se mai toarnă câte **1** litru în fiecare minut.

Peste câte minute primul vas va conține o cantitate de **2** ori mai mare decât al doilea vas?

3. Tatăl unui băiat are **53** de ani, iar băiatul **11** ani. Cu câți ani în urmă tatăl avea de **7** ori vârsta băiatului?

4. Vârsta unei fete este în prezent cu **21** de ani mai mică decât vârsta mamei sale. Peste **9** ani vârsta mamei sale va fi de **2** ori mai mare decât vârsta fiicei sale.

Găsiți vârsta pe care o are fiecare în prezent.

5. Într-o pungă sunt cu **10** bomboane mai multe decât în alta. Dacă trec din prima pungă în a doua **15** bomboane, atunci în aceasta din urmă ar fi de **6** ori mai multe decât în cealaltă.

Câte bomboane sunt în fiecare pungă?

6. Câtul împărțirii lui ***a*** la ***b*** este ***c*** şi restul **5**. Restul este egal cu unul dintre numerele ***b*** sau ***c***.

Stabiliți care număr este tot **5**, apoi determinați celelalte două numere, ştiind că diferența dintre acestea este **41**.

7. Diferența a două numere naturale este **7**. Împărțind cele două numere, se obține câtul **1** și un rest. Aflați restul.

8. La un atelier de confecții erau două bucăți de stofă. Numărul metrilor din prima bucată era egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul metrilor din bucata a doua. Din bucata a doua s-au confecționat **8** rochii și au mai rămas **5** m. Din bucata mai mică nu au ajuns **2** m ca să se confecționeze tot atâtea rochii.

Câți m de stofă au fost necesari pentru o rochie și câți m de stofă au fost în fiecare bucată?

9. Un elev a citit într- o zi un număr de pagini dintr-o carte. În a doua zi a citit de **5** ori mai multe pagini decât în prima zi, iar în a treia zi de **7** ori mai multe decât în prima zi.

Știind că în a doua zi a citit cu **32** de pagini mai puține decât în a treia zi, aflați câte pagini are cartea.

10. Diferența a două numere este **20**. Știind că $\frac{3}{8}$ din primul număr reprezintă cât $\frac{2}{8}$ din al doilea, să se afle numerele.

11. Într-o familie sunt **3** copii: Bogdan, Cristian și Valentin.

Știind că Bogdan este mai mare decât Cristian cu **3** ani, dar mai mic decât Valentin cu **3** ani și că, în urmă cu **2** ani, Valentin avea vârsta cât ceilalți doi la un loc, aflați câți ani are fiecare copil în prezent.

12. Un tată de **41** de ani are patru copii de **8** ani, **6** ani, de **4** ani și de **2** ani. După câți ani tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor?

13. Tatăl are **39** de ani, fiul **4** ani și fiica **2** ani.

Peste câți ani tatăl va avea dublul vârstelor copiilor?

14. Adunând **388** la un număr, suma obținută este de **5** ori mai mare decât numărul dat. Aflați numărul.

15. Diferența a două numere naturale este **900**. Unul dintre numere se obține din celălalt prin adăugarea la sfârșit a unui zero.

Care sunt cele două numere?

16. Doi muncitori primesc o sumă de bani. Primul primește cu **218** lei mai puțin decât al doilea. Știind că primul primește cât $\frac{5}{7}$ din cât primește al doilea, aflați câți lei primește fiecare.

17. Doi frați citesc două cărți având același număr de pagini.

În prima zi unul citește a cincea parte din cartea sa, iar celălalt citește a șaptea parte, constatând că a citit cu **16** pagini mai puține decât primul.

Câte pagini mai are de citit fiecare?

18. Micşorând cu **10** triplul unui număr, obținem un număr cu **100** mai mare decât dublul numărului inițial.

Aflați numărul inițial.

19. Dacă măresc de **4** ori suma pe care o am, atunci voi avea cu **10** dolari mai mult decât $\frac{2}{3}$ din suma inițială.

Câți dolari am?

20. Dacă aş avea de **3** ori mai puțini bani decât am, aş avea cu **80** de ruble mai puțin decât $\frac{2}{3}$ din cât am.

Câte ruble am?

21. **4** copii aveau fiecare aceeaşi sumă de bani. După ce fiecare a cheltuit câte **9** lei, constată că le-au rămas la un loc tot atâția lei câți lei avusese fiecare la început. Câți lei a avut fiecare copil?

22. Un bazin se umple cu apă printr-un robinet. Dacă robinetul ar fi deschis numai **3** ore, s-ar constata că ar mai trebui încă **150** litri pentru a fi umplută o treime din capacitatea bazinului.

După **4** ore însă, se constată că s-a depăşit cu **200** litri o treime din capacitatea bazinului. Câți litri încap în acel bazin?

23. Câtul a două numere este $\frac{1}{3}$, iar diferența dintre ele este **18**.

Aflați cele două numere.

24. Să se determine numărul $\overline{ab}$, în baza **10**, ştiind că reprezintă $\frac{5}{6}$ din răsturnatul său.

25. Cristi este de **5** ori mai mic decât tatăl său, dar peste **21** de ani tatal va fi mai mare numai de **2** ori față de băiat. Ce vârstă are fiecare?

26. Într-o clasă sunt de **4** ori mai mulți băieți decât fete.

Dacă vin **4** băieți şi **4** fete, atunci numărul băieților este de **3** ori mai mare decât al fetelor.

Câți elevi sunt în acea clasă?

27. Într-o clasă numărul fetelor este de **3** ori mai mic decât al băieților.

Dacă pleacă **4** băieți şi **4** fete, atunci numărul băieților va fi de **4** ori mai mare decât al fetelor.

Câți băieți şi câte fete sunt în acea clasă?

28. Bogdan are de **9** ori mai multe timbre decât Cristian.

Dacă Bogdan i-ar da lui Cristian **25** de timbre, atunci Cristian ar avea cât un sfert din numărul timbrelor pe care le-ar avea Bogdan.

Câte timbre are fiecare?

29. În pauză, elevii claselor întâi sunt în curte şi în clase.

La început numărul celor din clase era de **8** ori mai mic decât al celor din curte.

Învăţătorul de serviciu a mai trimis în clase **20** de copii şi astfel numărul acestora a fost cât jumătate din numărul celor care se mai aflau în curte.

Câţi elevi sunt în clasa întâi la acea şcoală?

30. Câtul a două numere este **6**. Dacă măresc primul număr cu **4**, iar pe al doilea îl micşorez de **4** ori, câtul devine **26**.

Aflaţi numerele.

31. Barbu avea de **7** ori mai mulţi bani decât Costel. După ce Barbu cumpără hârtie de scris de **4** lei şi îi dă lui Costel **2** lei, constată că suma lui e mai mare decât suma lui Costel de **3** ori.

Câţi lei are fiecare?

32. Determinaţi cele două numere care îndeplinesc următoarele condiţii:

– dacă la al doilea număr adaug **81**, numărul obţinut este egal cu primul;

– dacă la primul adaug **171**, numărul obţinut va fi de **5** ori mai mare decât al doilea număr.

33. Câtul a două numere este **9**.

Primul mărit cu **37** este de **8** ori mai mare decât al doilea număr mărit cu **5**. Să se afle numerele.

34. În două bidoane se află lapte, în primul de **2** ori mai mult decât în al doilea. Când din primul s-au scos **30** de litri, iar din al doilea **20** de litri, în primul a rămas lapte de **3** ori mai mult decât în al doilea.

Câţi litri de lapte erau la început în fiecare bidon?

35. Determinaţi cele două numere care îndeplinesc simultan condiţiile:

a) produsul este de **4** ori mai mare decât câtul lor;

b) diferenţa dintre produsul şi câtul lor este **6**.

36. Să se afle două numere ştiind că primul număr este de **5** ori mai mare decât al doilea, iar diferenţa dintre dublul primului şi triplul celui de-al doilea număr este **245**.

37. Un elev are un număr de bile în două cutii, ***A*** şi ***B***.

Dacă la bilele din cutia ***A*** s-ar fi adăugat încă **4**, atunci în cutia ***B*** ar fi de **4** ori mai mult decât în ***A***; dacă la cutia ***B*** s-ar adăuga **2** bile, atunci în această cutie ar fi de **6** ori mai multe bile decât în ***A***.

Câte bile au fost în fiecare cutie?

38. Cu **8** ani în urmă, vârsta fiului reprezenta $\frac{1}{8}$ din vârsta tatălui.

Peste **2** ani, vârsta fiului va fi cât $\frac{2}{3}$ din vârsta tatălui.

Câţi ani are fiecare?

39. Pentru a egala numărul de cărți din cele două corpuri ale bibliotecii noastre este suficient să transfer **16** cărți din al doilea în primul corp.

Dacă transferul ar avea loc în sens invers, al doilea corp ar conține un număr de cărți de **2** ori mai mare decât numărul de cărți rămase în primul corp.

Câte cărți sunt în fiecare corp al bibliotecii?

40. Oana şi Mihaela se joacă cu nişte castane.

Oana spune: "Dă-mi **5** din castanele tale şi vom avea amândouă tot atâtea".

Mihaela răspunde: "Dă-mi tu mie **10** din ale tale şi voi avea de **2** ori mai multe decât cele ce-ți rămân ție".

Câte castane avea fiecare?

41. Ioan zice lui Gheorghe: "Dă-mi o pară şi voi avea îndoit cât vei avea tu". Gheorghe răspunde: "Dă-mi tu o pară şi voi avea şi eu cât tine".

Câte pere avea fiecare?

42. Fata babei îi spune fetei moşneagului: "Îmi mai trebuie **3** gheme ca să pot spune că am tors cât tine". Fata moşneagului îi răspunde: "Iar eu dacă aş mai avea încă **3** gheme, aş fi tors de **4** ori mai mult decât tine". Câte gheme a tors fata cea harnică?

43. (d). Tatiana are în două puşculițe o sumă de bani.

Dacă ar transfera **40** de ruble din prima puşculiță în cealaltă, aceasta din urmă ar conține o sumă de **3** ori mai mare decât suma rămasă în prima puşculiță. Dacă transferul ar avea loc în sens invers, prima puşculiță ar conține o sumă de **2** ori mai mare decât suma rămasă în a doua puşculiță.

Câte ruble erau în fiecare puşculiță?

44. Găsiți cei doi factori ai unei înmulțiri în condițiile următoare: dacă primul factor ar fi **4**, atunci produsul ar fi cu **6** mai mic decât cel căutat; dacă primul factor ar fi **7**, atunci produsul ar fi mai mare cu **12** decât produsul căutat.

45. Într-o magazie era de **5** ori mai multă făină decât în alta. Dacă din prima magazie se scoate o cantitate de **1 000** kg, iar în cea de-a doua se mai depozitează încă **480** kg, atunci cantitățile din cele două magazii devin egale.

Care sunt cantitățile inițiale?

46. În fața blocului meu nu sunt **24** de trandafiri. Dacă ar fi de **5** ori mai mulți trandafiri decât sunt, atunci ar depăşi numărul **24** cu tot atâția câți lipsesc.

Câți trandafiri sunt?

47. Irina are cu **8** ruble mai mult decât Ghennadi.

Dacă Irina cheltuieşte un sfert din suma sa, iar băiatul o jumătate din suma sa, fetița are tot cu **8** ruble mai mult.

Ce sumă avea fiecare copil?

48. La un număr natural adunăm **24**. Dacă la o pătrime din această sumă

adunăm **21**, obținem numărul inițial.
Care este numărul inițial?

49. Dacă Andreea ar avea cu **3** lei mai mult decât are, atunci suma ar fi de **5** ori mai mare decât suma lui Vlăduț, iar dacă ea ar avea cu **384** lei mai puțin, atunci suma lui Vlăduț ar fi de **2** ori mai mare decât suma pe care ar avea-o Andreea.
Câți lei are fiecare copil?

50. Într-o magazie sunt **930** kg de pere şi **170** kg de mere.
În fiecare zi se scot câte **30** kg de pere şi **30** kg de mere.

După câte zile cantitatea de pere din magazie va fi cât $\frac{3}{4}$ din cantitatea de mere?

51. Într-o clasă numărul elevilor absenți era $\frac{1}{8}$ din numărul celor prezenți. Când din clasă au mai plecat doi elevi, numărul celor absenți a devenit $\frac{1}{5}$ din numărul celor prezenți. Câți elevi erau prezenți în clasă?

CAPITOLUL al V–lea

Probleme în care sunt combinate relațiile de sumă, diferență şi raport

Enunțuri

1. În curtea unui țăran sunt curci, rațe şi găini. **27** din ele nu sunt găini şi **39** nu sunt curci. Numărul găinilor este de **2** ori mai mare decât al curcilor.
Câte păsări de fiecare fel sunt?

2. Un pix, o carte şi un caiet costă împreună **63** de lei. Pixul costă cu **5** lei mai puțin decât cartea, iar aceasta împreună cu pixul costă cu **7** lei mai mult decât jocul.
Să se afle prețul fiecărui obiect în parte.

3. Tatăl, mama, fiul şi fiica au împreună **71** de ani. Câți ani are fiecare dintre ei, dacă tatăl şi fiul au la un loc de **6** ori vârsta fiicei, iar mama cu fiica ei au împreună de **7** ori vârsta fiului; fiul este cel mai mic membru al familiei, iar vârstele fiului şi fiicei sunt reprezentate de numere consecutive?

4. Suma a două numere este **15.** Dacă primul număr se măreşte de **3** ori, iar al doilea de **5** ori, atunci suma lor va fi **61**.
Care sunt cele două numere?

5. Câtul a două numere este **2**, iar restul **10.** Dacă adunăm deîmpărțitul, împărțitorul, câtul şi restul obținem **76**.
Care sunt cele două numere. Verificați!

6. Câtul rezultat din împărțirea a două numere este **3**, iar restul ***r***. Notăm cu ***D*** deîmpărțitul, cu ***Î*** împărțitorul. Dacă se adună deîmpărțitul, împărțitorul, câtul şi restul obținem un număr reprezentat prin ***a***.
Să se exprime numărul care reprezintă împărțitorul.

7. Rezolvând probleme pentru concursul de matematică, Mihai constată că, dacă ar mai rezolva încă un sfert din cât a rezolvat şi încă **2**, ar fi rezolvat **127** de probleme.
Câte probleme rezolvase Mihai?

8. Un vânzător vinde în trei zile **1 809** kg de cartofi. În prima zi vinde de **3** ori mai mult decât în a doua zi şi încă **1** kg de cartofi. În a treia zi vinde cu **1** kg de cartofi mai puțin decât jumătate din cât a vândut în a doua zi.
Câte kg de cartofi a vândut în fiecare zi?

9. Suma a trei numere este **500**. Al doilea număr este de **3** ori mai mare decât primul şi cu **45** mai mic decât al treilea.
Să se afle cele trei numere.

10. Suma a trei numere este **75**. Primul număr este jumătate din al treilea. Dacă împărțim pe al doilea la al treilea, obținem câtul **2** şi restul **5**. Aflați cele trei numere.

11. Suma a **4** numere este **100**. Dacă îl mărim pe primul număr cu **4**, pe al doilea îl micşorăm cu **4**, pe al treilea îl mărim de **4** ori, iar pe ultimul îl micşorăm de **4** ori, numerele devin egale. Care sunt numerele?

12. Suma a **5** numere este **100**. Dacă măresc primul număr cu **2**, pe al doilea îl micşorez cu **3**, pe al treilea îl măresc de **4** ori, pe al patrulea îl micşorez de **5** ori, obțin de fiecare dată al cincilea număr.
Aflați numerele.

13. La un concurs sportiv s-au acordat trei premii în valoare totală de **252** lei. Aflați ce sumă a primit fiecare, ştiind că sportivul situat pe locul întâi a primit cu **24** de lei mai mult decât al doilea, iar acesta primeşte jumătate din suma primită de primul şi al treilea la un loc.

14. Suma a trei numere este **199**. Primul este cu **14** mai mic decât al doilea şi cu **5** mai mare decât triplul celui de-al treilea.
Să se afle numerele.

15. Suma a trei numere este **986**. Să se afle numerele, ştiind că al doilea este cu **2** mai mare decât primul şi de **2** ori mai mic decât al treilea.

16. Împărțiți numărul **222** în două părți, astfel încât prima parte micşorată cu **2** să fie egală cu a doua parte micşorată de **4** ori.

17. Suma a trei numere naturale de o cifră este **14**. Al doilea număr este de **2** ori mai mare decât primul număr. Care sunt cele trei numere dacă al doilea este mai mic decât al treilea.

18. Într-o cutie sunt bile de trei culori. Bilele albe şi roşii constituie $\frac{1}{2}$ şi, respectiv, $\frac{1}{3}$ din celelalte bile. Ştiind că sunt **10** bile galbene, aflați câte bile sunt în acea cutie.

19. (d) Suma a trei numere naturale este **100**. Se împarte primul număr la al doilea şi se obține câtul **1** şi un rest egal cu al treilea număr. Aflați numerele, ştiind că al doilea este cu **10** mai mare decât al treilea.

20. (d) În parcul din fața şcolii sunt trandafiri, lalele şi garoafe, în total **96** de fire. Aflați câte flori sunt de fiecare fel, ştiind că trandafirii şi lalelele sunt cât dublul numărului de garoafe, iar trandafirii sunt cât lalelele şi garoafele la un loc.

21. La o librărie, în două teancuri sunt **100** de caiete. Dacă s-ar dubla numărul de caiete din primul teanc cu caiete luate din al doilea teanc, în acesta din urmă ar mai rămâne cu **4** caiete mai multe decât ar fi în primul teanc. Câte caiete sunt în fiecare teanc?

22. Trei copii doresc să cumpere o minge de **450** lei. Numărându-şi banii ei constată că le-ar mai trebui **300** lei şi că al doilea are de **5** ori mai puţin decât primul şi cu **17** lei mai puţin decât al treilea. Câţi lei mai trebuie să adune fiecare pentru a contribui la cumpărarea mingii cu sume egale?

23. Suma a trei numere este **540**. Suma primelor două este mai mare decât suma ultimelor două cu **60**, iar al doilea număr este cu **30** mai mare decât al treilea număr. Să se afle cele trei numere.

24. Suma a trei numere este **29**. Ştiind că această sumă este de **4** ori primul număr, plus **1**, să se afle numerele, cunoscând că cel de-al doilea număr este cu **6** mai mare decât cel de-al treilea.

25. (d) Într-o clasă sunt **30** de băieţi şi fete. Câţi băieţi şi câte fete sunt, ştiind că, dacă ar fi cu **2** băieţi mai puţin, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de **2** ori mai mult decât a treia parte din numărul fetelor.

26. (d) La un concurs de matematică a participat un număr de fete şi băieţi.

Ştiind că numărul băieţilor era cu **12** mai mic decât $\frac{2}{3}$ din numărul total al participanţilor, iar al fetelor cât $\frac{2}{3}$ din numărul băieţilor, aflaţi câţi elevi au participat la acel concurs.

27. Să se determine cele trei numere naturale consecutive ştiind că suma lor este egală cu unul dintre ele plus **124**.

28. Trei ţărani aveau fiecare câte o turmă de oi, în total **176** oi. După ce primul vinde un număr de oi, al doilea cu **2** mai mult decât dublul numărului de oi vândute de primul, iar al treilea cu **3** mai mult decât dublul numărului de oi vândute de al doilea, fiecăruia îi rămân tot atâtea oi câte au vândut împreună. Câte oi a avut la început fiecare ţăran?

29. Suma unor numere naturale consecutive impare este **32**.
Să se afle numerele. Câte soluţii are problema?

30. Un băiat afirmă că are tot atâtea surori cât şi fraţi. O soră a băiatului afirmă că are de **2** ori mai mulţi fraţi decât surori.
Câţi copii sunt în acea familie?

31. Suma a două numere este cu **10** mai mare decât diferenţa lor, iar numărul mai mic este cu **2** mai mare decât diferenţa.
Care sunt cele două numere?

32. Un număr ***a*** este de **3** ori mai mare decât un număr ***b***. Dacă adunăm **12** la ***b***, iar din ***a*** scădem **14**, atunci diferența dintre cele două numere modificate este **6**.

a) Care sunt numerele ***a*** şi ***b***?

b) Câte soluții sunt?

33. Să se afle cele trei numere care satisfac condițiile:

a) primul împărțit la al doilea dă câtul **1**, restul **4**;

b) al treilea împărțit la suma primelor două dă câtul **2**, restul **4**;

c) diferența dintre suma a două dintre cele trei numere şi numărul mai mic este **100**.

34. După un spectacol, **174** de spectatori au plecat acasă pe jos, iar ceilalți cu tramvaiul, ocupând **18** vagoane. În fiecare vagon au urcat cu **5** persoane mai multe decât locurile prevăzute pe scaune.

Dacă spectatorii care au plecat cu tramvaiul nu ocupau decât scaunele, atunci ar mai fi fost nevoie de încă **3** vagoane, în ultimul vagon rămânând **6** locuri libere.

Care a fost numărul total de spectatori?

35. Să se afle **3** numere pare consecutive, ştiind că dacă le adunăm cu jumătate din suma lor obținem **27**.

36. Câtul dintre triplul sumei a trei numere consecutive şi **17** este **6** şi rest **6**. Care sunt numerele?

37. Suma a **4** numere naturale este **170**. Diferența dintre primele două numere este **4**, iar câtul dintre suma acestor două numere şi al treilea număr este **4**, rest **4**. Al patrulea număr este cu **4** mai mare decât împătritul celui de-al treilea număr.

Care sunt cele **4** numere?

38. Suma a trei numere naturale este **563**. Al doilea număr este cu **2** mai mare decât dublul primului număr, iar al treilea de **2** ori mai mic decât diferența primelor două numere. Aflați numerele.

39. Suma a patru numere este **3 522**. Aflați numerele, ştiind că primul este cât un sfert din suma următoarelor două, câtul dintre al treilea şi al patrulea este **5**, rest **16**, iar al patrulea număr cât o doime din suma primelor două.

40. Să se afle vârsta tatălui şi a fiecăruia dintre cei trei fii ai săi, ştiind că tatăl are cu **1** an mai mult decât triplul vârstei băiatului mare, a cărui vârstă este egală cu suma vârstelor celor doi frați mai mici, între care este o diferență de **1** an, iar peste **7** ani vârstele copiilor vor însuma exact vârsta ce o avea tatăl atunci.

41. Într-o familie sunt **3** copii. Ionuț este cu **3** ani mai mic decât Sandu, iar acesta este cu **6** ani mai mare decât Cătălina.

a) Ce vârstă are în prezent fiecare copil, dacă acum **2** ani vârsta lui Sandu era cât suma vârstelor celorlalți copii?

b) Ce vârstă au părinții copiilor, dacă tata este cu **2** ani mai mare decât mama, iar suma vârstelor lor actuale este cât suma vârstelor pe care cei trei copii le vor avea peste **14** ani?

42. Vârsta mamei este cu **16** ani mai mare decât suma vârstelor celor doi fii ai săi, Alex şi Rareş.

Dacă peste **18** ani mama va avea de două ori vârsta lui Rareş, aflați cu câți ani este mai mare Alex decât Rareş.

43. Media aritmetică a trei numere naturale este **8**, iar cea a ultimelor două numere este **6**. Aflați cele trei numere, ştiind că împărțind al treilea număr la al doilea, se obține câtul **1** şi restul **2**.

44. Aflați cele patru numere naturale, ştiind că media lor aritmetică este **120**, al patrulea este media aritmetică a primelor trei numere, al doilea număr este cu **4** mai mare decât jumătate din primul număr, iar al treilea este cu **4** mai mare decât diferența primelor două numere.

45. Diana are **8** ani. Ce vârstă are mama ei, dacă atunci când Diana va avea vârsta actuală a mamei, mama va avea **60** de ani?

46. Tatăl lui Dinu îi spune: "Acum **28** de ani în urmă eu aveam vârsta pe care o ai tu, dar peste **4** luni eu voi avea de **4** ori vârsta ta."

Aflați câți ani are tatăl şi câți ani are Dinu.

47. Suma a trei numere este **38**. Primul număr este **13**. Care sunt celelalte două numere, ştiind că diferența acestora este **7**?

48. Suma a două numere este **32**. Dacă din sumă scădem diferența celor două numere obținem **8**. Care sunt numerele?

49. Diferența a două numere este **8**. Dacă din sumă lor scădem diferența obținem **14**. Care sunt numerele?

50. Dacă la suma a două numere adunăm diferența lor obținem **28**, iar dacă din sumă scădem diferența obținem **16**. Aflați numerele.

51. Diferența a două numere este **5**. Dacă adunăm suma numerelor cu diferența lor obținem **32**. Aflați numerele.

52. Suma a două numere este **19**. Dacă la sumă adunăm diferența lor obținem **26**. Aflați numerele.

53. Suma a trei numere este **30**. Primele două sunt egale, iar al treilea este cu **2** mai mare decât suma primelor două. Care sunt numerele?

54. Suma a cinci numere este **64**. Primele două sunt consecutive impare. Următoarele două au suma **36** şi sunt consecutive pare. Aflați numerele.

55. Suma a două numere este **28**. Dacă împărţim această sumă la diferenţa numerelor, obţinem câtul **14**. Care sunt numerele?

56. Diferenţa a două numere este **8**. Dacă împărţim suma lor la diferenţă, obţinem câtul **4**. Aflaţi numerele.

57. Suma a două numere este **64**. Dacă împărţim suma la îndoitul diferenţei lor obţinem câtul **4**. Care sunt numerele?

58. Suma a două numere este **36**. Dacă împărţim suma la jumătatea diferenţei lor obţinem câtul **6**. Aflaţi numerele.

59. Diferenţa a două numere este **16**. Dacă împărţim suma la sfertul diferenţei lor obţinem **8**. Care sunt numerele?

60. Aflaţi cele două numere naturale ştiind că diferenţa lor este **4**, iar la împărţirea dintre suma lor şi triplul diferenţei obţinem **4**.

61. Aflaţi cele două numere naturale, ştiind că diferenţa lor este **10**, iar la împărţirea dintre suma lor mărită de **5** ori şi diferenţa lor mărită de **4** ori obţinem câtul **2**.

62. Suma a două numere este **80**. Dacă împărţim jumătatea acestei sume la îndoitul diferenţei lor obţinem câtul **2**. Care sunt numerele?

63. Aflaţi cele trei numere naturale ştiind că, două câte două, au suma egală respectiv cu **10**, **6** şi **8**.

64. Suma a trei numere naturale este **17**. Aflaţi numerele, ştiind că suma dintre primele două este **11**, iar suma dintre ultimele două este **15**.

65. Într-o cutie sunt bile de trei culori: albe, galbene şi roşii. Ştiind că **8** nu sunt albe, **12** nu sunt galbene, iar **10** nu sunt roşii, aflaţi câte bile de fiecare fel sunt în cutie.

66. În două vaze sunt **12** flori. Dacă aş transfera două flori dintr-o vază în cealaltă în fiecare ar fi acelaşi număr de flori. Câte flori sunt în fiecare vază?

67. Alex, Dinu şi Tibi au împreună o sumă cuprinsă între **16** lei şi **20** lei. Dacă Dinu i-ar da lui Alex **4** lei şi lui Tibi **6** lei, ei ar avea sume egale, reprezentate de numere naturale. Ce sumă are fiecare?

68. Pe două rafturi sunt **33** cărţi. Dacă am transfera **9** cărţi de pe primul raft pe celălalt, pe al doilea ar fi cu **3** cărţi mai mult decât pe primul raft. Câte cărţi sunt pe fiecare raft?

69. În două teancuri sunt **39** de caiete. Dacă aş transfera **7** caiete din al doilea teanc în primul, al doilea ar avea cu **3** caiete mai mult decât ar fi în primul teanc. Câte caiete sunt în fiecare teanc?

70. Oana, Diana şi Irina au împreună **85** de lei. Dacă Oana i-ar da Irinei **6** lei, atunci Diana ar avea cu **2** lei mai mult decât Irina, dar cu **3** lei mai puţin decât Oana. Câţi lei are fiecare?

71. Să se determine cinci numere naturale a căror sumă este **996**, dacă al doilea este cu **9** mai mare decât primul, dar cu **3** mai mic decât al treilea, iar al patrulea este cu **4** mai mare decât al treilea, dar cu **18** mai mic decât al cincilea.

72. Adunând **7** la diferenţa a două numere obţinem **19**. Să se afle cele două numere, ştiind că micşorând de **8** ori suma lor obţinem **5**.

73. Aflaţi numerele ***a***, ***b*** şi ***c***, ştiind că sunt numere consecutive pare şi satisfac egalitatea: $\mathbf{104 + 104 + a + 104 + b + c + 104 + 104 = 598}$.

74. Media aritmetică a patru numere naturale este **24**. Ştiind că media aritmetică a primelor trei numere este **20**, media aritmetică a ultimelor trei este **22**, iar două dintre numerele mai mici sunt consecutive pare, determinaţi numerele.

75. Produsul dintre numărul elevilor participanţi la un concurs şcolar şi numărul ce reprezintă diferenţa dintre numărul fetelor şi numărul băieţilor prezenţi este **51**. Câţi băieţi şi câte fete au participat la acel concurs? Câte soluţii sunt?

76. Resturile pe care le primesc trei copii în urma unor cumpărături sunt reprezentate de numere consecutive impare ce au suma egală cu media aritmetică a sumelor iniţiale, care erau reprezentate tot de trei numere consecutive impare. Ştiind că primul şi ultimul copil au avut împreună **2 046** lei, aflaţi ce sumă a cheltuit fiecare copil.

77. Resturile pe care le primesc patru copii, după ce au făcut nişte cumpărături, sunt reprezentate de patru numere consecutive pare a căror sumă este egală cu media aritmetică a sumelor iniţiale şi care erau reprezentate de patru numere consecutive impare. Care este suma cheltuită de către fiecare copil, ştiind că ultimii doi au avut în total **268** lei?

78. a) Suma a două numere este **32**, iar diferenţa lor este dublul numărului mai mic. Care sunt cele două numere?

b) Suma a două numere este **35**, iar diferenţa lor este cât a treia parte din numărul mai mic. Aflaţi cele două numere.

79. Să se afle două numere naturale, ştiind că al doilea este de **4** ori mai mare decât primul, iar suma dintre dublul celui de-al doilea şi triplul primului este **99**.

80. Suma a trei numere naturale este **240**. Primul este de **2** ori mai mare decât triplul celui de-al treilea şi de două ori mai mare decât al doilea. Care sunt numerele?

81. Suma a două numere este **91**. Aflați numerele, ştiind că un sfert dintr-un număr este de **3** ori mai mare decât celălalt număr.

82. Trei copii aveau împreună suma de **8 960** lei. După ce primul a cheltuit o parte din suma sa, al doilea, dublul sumei cheltuite de primul, iar al treilea copil, dublul cât al doilea, fiecare are o sumă egală cu cât au cheltuit toți trei la un loc. Aflați ce sumă a avut fiecare copil.

83. Patru muncitori îşi împart suma primită pentru o lucrare efectuată. Primul ia cât o jumătate din ceea ce a luat al doilea, acesta cât două treimi din ceea ce a luat al treilea, iar acesta cât trei sferturi din ceea ce a luat al patrulea. Ştiind că media aritmetică a sumelor luate este **20 000**, aflați câți lei a încasat fiecare.

84. În anul **1 994**, suma vârstelor mamei şi fiicei este de **52** ani. În anul **1 998**, vârsta mamei va fi dublul vârstei fiicei. Câți ani a avut fiecare în anul **1 993**?

85. În trei rafturi ale bibliotecii din camera lui Vlad sunt **90** de cărți. După ce Vlad transferă de pe raftul al doilea jumătate din numărul cărților pe primul raft, iar de pe raftul al treilea ia un sfert din numărul cărților şi îl mută pe raftul al doilea, cele trei rafturi au acelaşi număr de cărți. Câte cărți erau la început pe fiecare raft?

86. Să se afle un număr natural, ştiind că: a) dacă îl înmulțim cu **3**, obținem acelaşi rezultat ca atunci când îl adunăm cu **20**; b) dacă îl înmulțim cu $\frac{2}{3}$, obținem acelaşi rezultat ca atunci când scădem **20** din el; c) dacă îl înmulțim cu $\frac{2}{3}$, obținem acelaşi rezultat ca atunci când îl scădem din **20**; d) dacă îl împărțim la **3**, obținem acelaşi rezultat ca atunci când scădem **20** din el; e) dacă îl împărțim la **3**, obținem acelaşi rezultat ca atunci când îl scădem din **20**; f) dacă îl adunăm cu **15**, obținem acelaşi rezultat ca atunci când îl scădem din **17**.

87. Aflați două numere naturale, ştiind că o jumătate din primul număr este de **3** ori mai mică decât celălalt număr, iar diferența dintre ele este **1 000**.

88. Diferența dintre o doime şi o pătrime dintr-un număr este **8**. Care este numărul?

89. Să se determine numărul $\overline{ab}$, în baza **10**, ştiind că reprezintă $\frac{3}{8}$ din răsturnatul său.

90. Ştiind că o treime din lungimea unui segment este egală cu trei pătrimi din lungimea altui segment şi că diferența dintre cele două segmente este de **35** cm, aflați lungimea fiecăruia.

91. Dan zice lui George: “Eu am **1 600** lei.” George răspunde: “Eu am cât tine şi încă jumătate din suma mea.” Câţi lei are George?

92. Patru copii aveau fiecare aceeaşi sumă de bani. După ce primul a cheltuit **90** lei, al doilea **120** lei, al treilea **150** lei, iar al patrulea **153** lei, le-au rămas la un loc tot atâţia lei cât avusese fiecare la început. Câţi lei a avut fiecare copil?

93. Rada are într-o puşculiţă o sumă mai mică decât **800** lei. Dacă ar mări de **4** ori suma pe care o are, ar depăşi **800** lei cu tot atâţia lei câţi lipsesc pentru a avea această sumă. Câţi lei are Rada? (*Problemă compusă de eleva Rada Borza*)

94. Ioana are cu **880** lei mai mult decât Vera. Dacă fiecare ar mai avea câte **100** lei, atunci Ioana ar avea de **5** ori mai mulţi bani decât ar avea Vera. Câţi lei are fiecare?

95. Tatăl are **46** ani, fiul are **19** ani. a) Ce vârstă avea tatăl când fiul avea **13** ani? b) Ce vârstă va avea fiul când tatăl va avea **51** ani? c) Cu câţi ani în urmă tatăl era de **4** ori mai în vârstă decât fiul? d) Peste câţi ani tatăl va fi de **2** ori mai în vârstă decât fiul?

96. Dany are de **7** ori mai puţini bani decât Tibi. După ce Tibi cheltuieşte **200** lei, iar Dany primeşte cu **70** lei mai mult decât de **3** ori suma pe care a avut-o, sumele lor devin egale. Ce sumă a avut fiecare?

97. Vlad are de **5** ori mai mulţi bani decât Florina. Aceasta cheltuieşte **40** lei, iar Vlad o jumătate din cât a cheltuit Florina. În acest mod, fata are de **8** ori mai puţini bani decât băiatul. Câţi lei au rămas fiecăruia dintre cei doi copii?

98. Un copil are **12** ani, iar tatăl său **36** ani. Este posibil ca peste un număr de ani tatăl să aibă de **4** ori vârsta fiului? De ce?

99. Fie trei numere naturale. Dacă se împarte primul la al doilea, se obţine câtul **3** şi restul **3**, iar dacă se împarte al treilea la al doilea se obţine câtul **5** şi restul **2**. Ştiind că diferenţa dintre al treilea şi primul număr este **121**, aflaţi cele trei numere.

100. Dan se gândeşte: “Dacă aş mai avea **300** lei, suma mea ar fi de **2** ori mai mare decât suma pe care o are George, iar dacă aş avea cu **300** lei mai puţin, suma mea ar fi cu **100** lei mai mică decât suma lui.“ Puteţi afla ce sumă are fiecare dintre cele două persoane?

101. Într-o familie sunt patru copii. În absenţa mezinului, primii trei îşi împart suma de **100** lei astfel: primul ia o jumătate, al doilea cât un sfert din sumă, iar al treilea cât jumătate din suma luată de primul. Când apare mezinul, mama face parte dreaptă. Cum procedează?

102. Împărţiţi numărul **34** în trei părţi, astfel încât partea a doua să fie cu **6**

mai mare decât prima, iar partea a treia să fie egală cu dublul părții întâi care a fost *micşorată* cu **2**.

103. Suma a **6** numere este **71**. Primele două sunt consecutive impare. Următoarele două au suma **25**, iar unul este mai mic decât celălalt de **4** ori. Ultimele două au diferența **18**, iar unul este mai mare decât celălalt de **4** ori. Aflați numerele.

104. Aflați **3** numere naturale, ştiind că suma lor este **21**, primul număr este îndoitul celui de-al doilea, dar cu **6** mai mic decât al treilea.

105. Suma a **3** numere naturale este **30**. Aflați numerele, ştiind că primul număr este cu **3** mai mare decât al doilea, iar acesta este cât jumătate din suma celorlalte două numere.

106. Suma a **3** numere naturale este **416**. Primul număr este de **3** ori mai mic decât suma celorlalte două, iar diferența dintre al treilea şi al doilea este jumătate din al doilea număr plus **2**. Care sunt cele trei numere?

107. Suma a **6** numere este **87**. Primele două sunt consecutive pare. Următoarele două au suma **21**, iar unul este dublul celuilalt. Diferența dintre ultimele două este **24**, iar unul dintre ele este de **5** ori mai mare decât celălalt. Aflați numerele.

108. Dacă adunăm triplul unui număr cu triplul altui număr obținem **150**. Aflați numerele, dacă sunt îndeplinite pe rând condițiile:

a) dublul diferenței dintre numerele astfel obținute este **96**;

b) dublul diferenței dintre numerele inițiale (nemodificate) este **40**.

109. Suma a trei numere naturale este **882**. Primul este cu **108** mai mic decât al doilea, iar acesta este de **4** ori mai mare decât al treilea. Aflați numerele.

110. Suma a **3** numere naturale este **852**. Ea întrece cu **204** întreitul celui de-al treilea număr, iar diferența dintre primele două numere este **8**. Aflați numerele.

111. Suma a trei numere naturale este **777**. Primul număr este cu **7** mai mare decât triplul celui de-al treilea şi cu **7** mai mic decât al doilea număr. Aflați cele trei numere.

112. Mărind cu **10** triplul unui număr natural, obținem un număr cu **358** mai mare decât numărul inițial. Care este numărul?

113. Triplul unui număr este cu **50** mai mare decât jumătatea lui. Aflați numărul.

114. Suma dintre câtul şi restul unei împărțiri a două numere naturale nenule este **33**. Ştiind că restul este cu **1** mai mare decât întreitul câtului, aflați cel mai mic deîmpărțit care îndeplineşte aceste condiții.

115. Determinați cele două numere naturale ***a*** și ***b***, știind că: 1) dacă le împărțim obținem câtul **4** și restul **3**, iar dacă adunăm pe **17** la îndoitul lui ***b*** obținem numărul ***a***; 2) ***a*** este dublul lui ***b*** și cu **100** mai mare decât ***b* – 34**; 3) ***b*** este mai mare cu **3** decât **2•(*a* + 2)**, dar cu **1** mai mic decât triplul lui ***a***.

116. Dinu are cu **16** lei mai mult decât Camelia. Dacă numărul care reprezintă suma lui Dinu s-ar împărți la numărul care reprezintă suma Cameliei, câtul ar fi **2**, iar restul **1**. Câți lei are fiecare?

117. Suma a **3** numere este **33**. Să se afle numerele, știind că primul este de **3** ori mai mare decât al treilea, iar al doilea este cu **1** mai mic decât sfertul acestuia din urmă.

118. Suma a trei numere este **17**. Să se afle numerele, știind că primul este îndoitul celui de-al treilea, iar al doilea este cu **3** mai mare decât sfertul primului număr.

119. Suma a **3** numere este **61**. Aflați numerele, știind că această sumă este mai mare cu **7** decât triplul dublului celui de-al treilea număr, iar al doilea este cu **40** mai mare decât triplul primului număr.

120. Dublul unui număr natural ***a*** este mai mic decât triplul aceluiași număr cu **8**. Dacă am aduna numărul ***a*** cu alte două numere consecutive impare, am obține suma **20**.

Care sunt cele două numere consecutive impare?

121. Dublul unui număr natural este mai mare decât sfertul său cu **28**. Care este acel număr?

122. O sârmă lungă de **95** cm a fost tăiată în **2** bucăți mai mari și **3** bucăți mai mici, rămânând **5** cm. Fiecare dintre bucățile mari era de **2** ori mai lungă decât bucățile mici luate la un loc. Ce lungime are fiecare bucată de sârmă?

123. La piață, un producător a vândut într-o zi mere și pere, în total **180** kg. A doua zi a vândut de **3** ori mai multe fructe și anume de **2** ori mai multe pere și de **5** ori mai multe mere decât în prima zi. Câte kilograme de fructe de fiecare fel s-au vândut în a doua zi?

124. Suma a două numere este mai mare cu **8** decât diferența lor. Aflați cele două numere, știind că produsul lor este **20**.

125. La adunarea triplului unui număr natural ***a*** cu dublul numărului natural ***b*** obținem **1 110**. Aflați numerele știind că triplul diferenței celor două numere inițiale este **90**. Câte soluții are problema?

126. Dacă adunăm triplul unui număr natural ***a*** cu dublul unui număr natural ***b***, obținem suma **3 240**, iar dacă efectuăm diferența dintre cele două numere astfel modificate, obținem diferența **720**. Care sunt numerele ***a*** și ***b***? Câte soluții are problema?

127. Suma a două numere naturale este **24**. Dacă mărim primul număr cu suma lor, obținem de **7** ori al doilea număr. Care sunt numerele?

128. Diferența a două numere naturale este **14**. Dacă mărim primul număr cu **14**, obținem de **8** ori al doilea număr. Care sunt numerele?

129. Fie două numere naturale ***a*** şi ***b***. Dacă împărțim pe ***a*** la ***b***, obținem câtul **3**. Dacă la alt număr natural ***c*** adunăm **1**, obținem jumătate din numărul mai mare, ceea ce este cu **6** mai mult decât celălalt. Care este suma numerelor ***a*** şi ***c***?

130. Având câte **1 000** de lei, Mihai şi Viorica au plecat după cumpărături. Aflați câți lei a cheltuit fiecare, dacă resturile sunt respectiv numere consecutive pare, care valorează la un loc cât suma cheltuită de Viorica.

131. Diferența a două numere naturale este de **3** ori mai mică decât suma lor, dar cu **50** mai mică decât dublul sumei lor. Aflați numerele.

132. Suma a două numere este mai mare decât diferența lor cu **658**. Dacă împărțim suma la diferența lor, obținem câtul **3** şi restul **60**. Aflați cele două numere naturale.

133. Un lot dreptunghiular este împrejmuit cu un gard lung de **84** m. Lățimea este cu **2** m mai mare decât a patra parte din lungimea lotului. Se împarte lotul în **3** parcele, astfel încât două să fie egale, iar una mai mare cu **40** m^2 decât celelalte două la un loc. Care este aria fiecărei parcele?

134. Aflați aria unui dreptunghi care are perimetrul de **618** m, ştiind că, dacă mărim cu **4** m o treime din lățime, obținem cu **1** m mai mult decât o treime din lungime.

135. Perimetrul unui dreptunghi este de **336** m. Aflați aria lui, ştiind că, dacă mărim cu **10** m jumătate din lățime, obținem cu **4** m mai puțin decât jumătate din lungime.

136. Dacă s-ar mări lungimea unui dreptunghi cu **6** m, atunci lățimea ar deveni jumătate din aceasta. Care sunt dimensiunile dreptunghiului, ştiind că perimetrul este de **60** m?

137. Câte monede de fiecare fel au fost dacă suma de **1 400** lei a fost plătită numai în monede de **20** lei şi de **50** lei, ştiind că: a) cele două feluri de monede erau în număr egal; b) suma plătită în monede de **20** lei era egală cu suma plătită în monede de **50** lei; c) numărul monedelor de **20** lei era diferit de numărul monedelor de **50** lei.

138. S-a încasat suma de **139 200** lei pentru **113** kg de fructe de trei calități: cu **1 400** lei/kg, cu **1 200** lei/kg şi cu **1 000** lei/kg.

Câte kg de fructe s-au vândut din ultimele două calități, dacă din prima calitate s-au vândut **52** kg?

139. Suma a două numere este **56**. Dacă împărțim primul număr la **4**, iar al doilea la **2**, se obțin două numere a căror sumă este **19**. Aflați cele două numere.

140. Într-un an, **5** cai consumă **170** q de fân. Câte vaci se pot hrăni cu fânul pe care l-ar fi mâncat **3** cai într-un an, dacă o vacă mănâncă câte **17** q în aceeaşi perioadă de timp?

141. Din **20** l lapte se obțin **2** kg de smântână, iar din **10** kg de smântână se obțin **3** kg de unt. Câți litri de lapte trebuie pentru **60** kg de unt?

142. Trei brigăzi de muncitori ar fi terminat o lucrare astfel: prima în **4** zile, a doua în **6** zile, a treia în **8** zile. S-a alcătuit o echipă formată din $\frac{1}{6}$ din efectivul primei brigăzi, $\frac{1}{4}$ din efectivul brigăzii a doua şi $\frac{1}{3}$ din efectivul brigăzii a treia. În cât timp s-a terminat lucrarea?

143. În vederea acordării premiilor la un concurs, Ştefănel a mers după cumpărături, având **3 000** lei. El a văzut că din suma pe care o are poate lua **6** pixuri şi **36** creioane sau **6** pixuri şi un stilou ori un stilou, un pix şi **20** creioane. Câți lei costă un articol de fiecare fel?

144. Cu suma de **1 288** lei s-au cumpărat **7** radiere, **9** creioane şi **2** ascuțitori. Ştiind că un creion costă cu **8** lei mai mult decât o radieră şi de **4** ori mai puțin decât o ascuțitoare, aflați câți lei costă un articol de fiecare fel.

145. Patru copii au cumpărat caiete în valoare de **42 628** lei. Primul a cumpărat **22** caiete de dictando, al doilea **16** caiete de matematică, al treilea **18** caiete de biologie, iar al patrulea **12** caiete de notițe. Ştiind că un caiet de matematică a costat cu **7** lei mai mult decât un caiet de dictando, un caiet de de biologie a costat cu **5** lei mai puțin decât un caiet de matematică, iar un caiet de notițe cu **3** lei mai puțin decât caietul de matematică, aflați ce sumă a cheltuit fiecare copil.

146. Câți lei costă **1** kg de mere, dacă Bogdan a cumpărat **5** kg, plătind **9 600** lei şi o cincime din prețul unui kg de mere?

147. Să se afle de câte ori este mai mare perimetrul unui dreptunghi decât perimetrul unui pătrat, ştiind că lățimea dreptunghiului este egală cu latura pătratului, iar aceasta din urmă reprezintă o treime din lungimea dreptunghiului. Particularizați.

148. Găsiți valoarea lui f din:

a) $20 - 4 = a$; $a + 3 = b$; $b + 20 = c$; $c - 7 = d$; $d - 11 = e$; $e + f = 46$;

b) $198 - 99 = a$; $a - 16 = b$; $b + 18 = c$; $c - 57 = d$; $d - 9 = e$; $f - e = 102$.

149. Dacă la un număr se adaugă **17**, apoi se scade **9**, obținem diferența numerelor **203** şi **18**. Aflați numărul inițial.

150. Din care număr trebuie scăzut de **7** ori câte **7** pentru a se obține un număr cu **7** mai mare decât **7**?

151. Jumătatea unui număr mărită cu sfertul numărului **1 004** dă **1 007**. Care este numărul?

152. Suma dintre jumătatea şi sfertul unui număr este mai mică cu **230** decât suma dintre număr şi **8**. Care este numărul?

153. Din ce număr se scade **16** pentru a se obține diferența numerelor **37** şi **20**?

154. Ce număr se scade din **100** pentru a se obține suma numerelor **29** şi **18**?

155. Suma a două numere este **708**. Dacă din fiecare se scade numărul **108**, unul dintre ele devine **97**.
Ce rest rămâne din celălalt număr?

156. Diferența a două numere este cel mai mare număr impar de trei cifre. Unul dintre ele este **1 000**.
Care este celălalt număr? Câte soluții sunt?

157. Dacă împărțim suma numerelor **266** şi **198** la diferența dintre numărul **103** şi un alt număr necunoscut ***a***, obținem câtul **77** şi restul **2**. Aflați numărul ***a***.

158. Micşorați cu **10** diferența dintre dublul câtului numerelor **81** şi **9** *şi* triplul lui **3** micşorat cu **2**.

159. Determinați ***y*** din:

a) $(72 : 3 - y - y) : y = y$;

b) $(44 - y + 4) : y - 4y = y$;

c) $24 : y + 4 + y : y = 11$;

d) $17 : y + y - y : y = 17$;

e) $y \times 23 : 4 + y \times 23 : 4 = 184$;

f) $3 \cdot (y : 2 \times 4) + 2(y : 2 \times 4) = 60$.

160. Determinați ***x*** din:

$$1 + \{16\,000 - [(6x + 3\,708) : x + 1\,008] \cdot 13 - 60\} : 80 = 2$$

161. Rezolvați în două moduri următoarele exerciții:

$7 \times 6 : 6 =$ $\quad$ $18 : 2 \times 8 =$

$9 \times 8 : 3 =$ $\quad$ $12 \cdot (6 : 3 + 4) =$

$(20 : 4 + 5) \times 8 =$ $\quad$ $9 \cdot (a : 3 + a) =$

apoi determinați numărul ***a*** din:

1) $8 + 4 \cdot \{3 + 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2)] : 6\} : 31 = 12$;

2) $128 - \{46 + [a - 4 \cdot (a : 8 + 6) + 90] : 5\} : 4 + 7 = 110$;

3) $13\,230 : (a \cdot a - 32) - 8\,080 : (7 \times 86 - 18 \times 29) = 169$.

162. Determinați numărul natural ***x*** din:

a) $28 + 8 \cdot (x - 8 : (1\frac{3}{4} + 0{,}75 + 1\frac{1}{2}) : (\frac{3}{4} + 0{,}75 + \frac{1}{2})] = 100$;

b) $\dfrac{(1:3+2:3+1)\cdot(1:3+2:3)+2}{x+(1:7+3:7+4:7+6:7)}=4-(2:5+8:5).$

163. Din bomboanele pe care le-a avut, Diana a servit cu câte **2** pe fiecare dintre colegii săi, iar restul l-a împărțit în mod egal cu cele trei surori ale sale. Aflați câte bomboane a avut inițial Diana, dacă sora sa cea mică a primit **4** bomboane, iar toți cei **30** de elevi ai clasei au fost prezenți.

164. La o fermă de păsări, numărul curcilor este $\frac{1}{4}$ din totalul păsărilor. Numărul rațelor era cât $\frac{1}{4}$ din numărul rațelor, găinilor şi al gâştelor la un loc. Numărul gâştelor era cu **2 754** mai mare decât $\frac{1}{4}$ din numărul gâştelor şi al găinilor la un loc. Ştiind că erau **5 508** găini, aflați câte păsări de fiecare fel erau.

165. Anca împarte **48** de mere în **3** grămezi neegale ca număr. Apoi ia din prima grămadă câte mere sunt în a doua şi le adaugă la a doua grămadă. Ia din a doua câte mere sunt în a treia şi le adaugă la a treia grămadă. Apoi ia din a treia câte mere sunt acum în prima şi le adaugă la aceasta din urmă. Câte mere erau la început în fiecare grămadă, ştiind că după modificările menționate, ele conțin acelaşi număr de mere?

166. În trei grămezi sunt respectiv **7**, **11** şi **8** nuci. Transferând nuci de la toate grămezile, de fiecare dată punând în fiecare grămadă tot atâtea nuci câte conține ea în momentul respectiv, după **3** mutări, se obțin grămezi de nuci egale ca număr. Care sunt cele trei mutări?

167. În două bidoane **A** şi **B** de aceeaşi capacitate se găseşte lapte: în primul lipsesc **3** sferturi din capacitatea sa, iar în bidonul **B** ar mai trebui **2** litri ca să se umple. Turnăm din bidonul **B** lapte în bidonul **A** cu **2** l mai mult decât jumătatea cantității existente în **A**. După această operație, rămân **6** litri în plus în **B** față de cantitatea obținută în **A**. Aflați cantitatea inițială de lapte din fiecare bidon.

168. Trei frați şi-au împărțit **24** mere, luând fiecare un număr egal cu vârsta sa de acum **3** ani în urmă. În continuare, cel mic îşi ia numai o doime din numărul merelor ce i se cuvin, restul împărțindu-l în mod egal celorlalți doi. Mijlociul îşi opreşte o doime din numărul merelor ce le avea acum, restul împărțindu-l celorlalți doi în mod egal. Cel mare îşi opreşte o jumătate din ce are acum, restul împărțindu-l în mod egal celorlalți doi. În acest mod, copiii aveau acelaşi număr de mere. Câți ani are fiecare?

169. Pe trei rafturi erau cărți. Alex ia jumătate din numărul cărților de pe primul raft şi o repartizează în mod egal în celelalte două rafturi. Lui Bogdan nu îi place această aranjare a cărților şi atunci ia jumătate din numărul cărților ce le-a găsit pe al doilea raft şi o repartizează, la fel, în celelalte două rafturi. Când vine Cristian, vrând ca pe fiecare raft să fie câte **16** cărți, el ia jumătate din numărul cărților pe care le-a găsit pe al treilea raft şi o repartizează în celelalte două rafturi, în mod egal. Cum puteți afla câte cărți erau la început pe fiecare raft?

170. Determinați numărul natural y din:

a) $\{[(3y+5)\cdot 3+5]\cdot 3+5\}\cdot 3+5=281$;

b) $2+2\cdot\{2+2\cdot[2+2\cdot(2-2:y)]\}=22$;

c) $1+\{2\cdot[3+(y-4)\cdot 5]:6\}\cdot 7=8$.

171. Cu trei sferturi din banii pe care îi are, un elev cumpără un pix. Cu o treime din banii rămaşi, cumpără două creioane a câte **63** lei fiecare. Câți lei a costat pixul?

172. Mama a pus pe masă un număr de mere şi le-a spus celor trei băieți ca, atunci când se vor întoarce de la şcoală, să şi le împartă în mod egal. Întâi a venit Bogdan, care şi-a luat partea ce i se cuvenea din numărul merelor şi a plecat. Apoi s-a întors Cristian care, crezând că este primul sosit, îşi ia partea ce socoteşte că i se cuvine şi pleacă. Apoi a venit Cosmin care, fiind încredințat că el este primul, îşi ia partea sa, lăsând pe masă **8** mere. Câte mere a pus pe masă mama băieților?

173. Mircea a făcut o excursie de **3** zile. Cu ce sumă a plecat el de acasă dacă în prima zi a cheltuit cu **350** lei mai mult decât un sfert din suma întreagă, a doua zi un sfert din rest mai puțin **50** lei, în a treia zi o jumătate din noul rest plus **1 000** lei şi i-au mai rămas **4 800** lei? Aflați apoi câți lei a cheltuit Mircea în fiecare zi.

174. Andrei are **1 000** lei, iar Alexandra **1 060** lei. Mai primesc de la tatăl lor suma de **1 000** lei pe care şi-o împart astfel încât să aibă sume egale. Câți lei a luat fiecare din suma de **1 000** lei?

175. Tatăl a doi copii are **50** ani, iar un copil este mai mic decât celălalt cu **4** ani. Ştiind că peste **8** ani tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor celor doi copii, aflați ce vârstă are fiecare copil.

176. a) Un tată are patru copii de **11**, **9**, **7** şi respectiv de **5** ani. El are **32** ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi jumătate din suma vârstelor copiilor săi?

b) Aflați vârstele celor două prietene, Monica şi Irina, ştiind că acum **4** ani vârsta Monicăi era de patru ori mai mare decât diferența vârstelor lor, iar peste **4** ani suma vârstelor acestora va fi cu **12** ani mai mare decât dublul vârstei actuale a Irinei.

177. Determinați y, numărul natural, din:

a) $[3(121:11+2y)-(6\,060:505+5y)]:7=5$;

b) $\dfrac{y+1}{y}=\dfrac{2\{2+2[2+2(2+2\cdot 2)]\}}{3[3(3:3+3)-3]+3}$;

c) $10(1-0,001)-y=\dfrac{11}{10}+\dfrac{89}{100}$;

d) $199^2 - 199 - 198 = 198y$;

e) $3(y + 2) > 2 + 5y$;

f) $3(y + 4y) \leq 30$.

178. Aflați numărul **z**, ştiind că dacă $\frac{3}{7}$ din **211 407** se adună cu două jumătăți din **9 397**, iar suma obținută se împarte la **z** se obține numărul **100**.

179. De ziua tatălui său, un băiat se gândeşte: " În anul **2 002**, tata va împlini o jumătate de veac, iar mie mi-ar mai trebui încă **4** ani ca să am vârsta pe care o avea el la naşterea mea".

Aflați în ce an s-a născut băiatul.

180. Un biciclist, mergând dintr-un sat spre oraş, parcurge această distanță la dus cu viteza de **10** km/oră, iar la întoarcere cu viteza de **8** km/oră. El a mers în total **9** ore.

Care este distanța de la sat la oraş?

181. Fiind întrebată ce vârstă are, Eliza a răspuns: "Cu **5** ani în urmă aveam de **3** ori mai puțin decât voi avea peste **7** ani".

Câți ani are Eliza acum?

182. A spune lui B: "Cu **6** ani în urmă aveam vârsta ta actuală, iar peste **6** ani voi avea de $2\frac{1}{2}$ ori cât ai tu acum". Ce vârstă are A?

183. Raportul dintre numărul salariaților din două ateliere ale unei societăți comerciale este $\frac{2}{3}$. Transferând **5** salariați din atelierul al doilea în primul, unde erau mai puțini, acesta din urmă ar avea un număr de salariați cu **1** mai mare decât numărul celor care ar rămâne în al doilea atelier.

Câți salariați erau inițial în fiecare atelier?

184. Trei muncitori au primit, pentru lucrarea efectuată, suma de **19 058** lei.

Ce sumă se cuvine fiecăruia, dacă primul a lucrat **7** zile, al doilea **9** zile, al treilea **11** zile şi dacă, pentru o zi de lucru, al doilea trebuia să primească cu **5** lei mai mult decât primul, iar al treilea cu **7** lei mai puțin decât al doilea?

185. Suma a şase numere este **294**. Dacă scădem din primele trei numere respectiv **32**, **25** şi **13**, iar la ultimele trei adunăm respectiv **32**, **25** şi **13**, obținem de fiecare dată acelaşi număr.

Care sunt cele şase numere?

186. Irina a cumpărat un număr de caiete cu **49** lei bucata şi tot atâtea caiete cu **65** lei bucata. Pentru caietele mai scumpe, ea a plătit mai mult cu **96** lei.

Câți lei a cheltuit Irina pe caietele cumpărate?

187. Suma de **32 800** lei a fost plătită în bancnote de **1 000** lei, de **500** lei şi de **100** lei.

Ştiind că în total au fost **47** de bancnote şi că raportul dintre numărul bancnotelor de **100** lei şi numărul bancnotelor de **500** lei era de $\frac{4}{7}$, aflaţi câte bancnote de fiecare fel au fost.

188. Alex, Dinu, Rareş şi Tiberiu s-au luat la întrecere în aruncarea mingii de oină la ţintă mobilă. Au formulat următorul regulament: "Fiecare să arunce mingea de **15** ori; pentru fiecare atingere a ţintei să se acorde **2** puncte, iar pentru fiecare atingere nereuşită să se scadă un punct".

La sfârşitul întrecerii, punctajul a fost următorul: Alex **12** puncte, Dinu **9** puncte, Rareş **3** puncte, Tiberiu **0** puncte.

Câte aruncări reuşite ale mingii de oină a avut fiecare?

189. Având fiecare aceeaşi sumă de bani, Oana şi Alexandra au cumpărat caiete. Oana a plătit **63** de lei pentru fiecare caiet şi i-au rămas **35** de lei. Alexandra, plătind **47** de lei bucata, a cumpărat cu **2** caiete mai mult şi a primit rest **21** de lei.

Aflaţi ce sumă a avut fiecare şi câte caiete a cumpărat.

190. Un bazin, în care încap **5 370** litri de apă, este umplut în **3** ore prin intermediul a **9** robinete de două categorii: unele cu debitul de **210** litri/oră, altele cu **190** litri/oră.

Să se afle câte robinete de fiecare fel sunt.

191. Două echipe de muncitori pot termina împreună o lucrare în **6** ore. După ce au lucrat împreună **3** ore, o echipă a plecat, iar cealaltă a terminat restul lucrării în **9** ore.

Aflaţi în câte ore ar termina lucrarea fiecare echipă, lucrând singură.

192. Trei robinete, cu acelaşi debit, curgând împreună, umplu cu apă un bazin în **2** ore. Curgând împreună, primele două robinete umplu bazinul în **3** ore, iar ultimele două, în **4** ore.

În câte ore ar umple bazinul fiecare robinet?

193. Un muncitor poate să termine o lucrare în **8** zile. Alt muncitor poate să facă aceeaşi lucrare în **12** zile. Ei au lucrat împreună un anumit număr de zile, după care primul muncitor a fost mutat la altă lucrare, iar celălalt a terminat partea rămasă din lucrare în **2** zile.

Câte zile a lucrat primul muncitor lângă al doilea?

194. Pentru o lucrare care putea fi terminată de **6** muncitori în **13** ore, s-au plătit **7 488** lei.

Aflaţi în câte ore a fost terminată lucrarea şi câţi lei a primit fiecare muncitor, dacă **4** muncitori au efectuat mai mult cu câte o optime din norma pe care o aveau de realizat.

195. Din suma pe care o avea la el, Laurențiu a cheltuit o doime şi încă **12** lei, rămânându-i o sumă de **4** ori mai mică decât a cheltuit.

Ce sumă a avut inițial Laurențiu?

196. La un concurs gen: "Cine ştie câştigă", sumele primite de cei doi participanți au fost acordate în funcție de (proporțional cu) numărul răspunsurilor corecte. Primul concurent a răspuns corect la **20** de întrebări, iar al doilea la **18** întrebări.

Ştiind că $\frac{1}{10}$ din suma cuvenită primului participant împreună cu $\frac{1}{9}$ din suma cuvenită celui de-al doilea reprezintă cu **10 200** lei mai puțin decât sumele primite de ei la un loc, aflați ce sumă a primit fiecare concurent.

197. La o tonetă, s-au pus în vânzare **16** cutii cu bomboane de aceeaşi calitate, fiecare bomboană cântărind **14** grame. Dintr-o greşeală de fabricație, într-o cutie, fiecare bomboană cântăreşte **13** grame.

Cum descoperă vânzătorul cutia respectivă, făcând o singură cântărire?

198. Un număr de muncitori aveau de săpat două şanțuri, unul trebuind să fie mai lung decât celălalt de **2** ori.

După o jumătate de zi de lucru la şanțul mai lung, ei au hotărât ca o doime din numărul lor să lucreze la şanțul al doilea.

La sfârşitul zilei, primul sanț a fost terminat, iar din al doilea a mai rămas o parte ce putea fi efectuată într-o zi de **4** muncitori.

Câți muncitori erau inițial?

199. Suma a trei numere este **98**.

a) Dacă la fiecare se adună acelaşi număr, se obțin respectiv numerele: **46**, **45**, **67**.

b) Dacă din fiecare se scade acelaşi număr, se obțin respectiv numerele: **6**, **5**, **27**.

Aflați numerele.

200. Suma de **640** lei a fost încasată numai în monede, astfel:

a) numărul monedelor de **50** lei era cu **3** mai mare decât al celor de **10** lei;

b) numărul monedelor de **20** lei era cu **8** mai mare decât al celor de **10** lei, iar cele de **5** lei erau cât cele de **10** lei şi de **20** lei la un loc.

Câte monede de fiecare fel au fost în fiecare situație?

201. Aflați diferența dintre suma numerelor pare şi suma celor impare, care sunt de forma $\overline{xyzt}$, cu $y - 3x = 2$ şi $x + y + z + t = 12$.

202. Cu o sumă de bani s-au cumpărat un stilou, un penar şi o carte.

Cu $\frac{5}{7}$ din sumă s-ar fi cumpărat numai stiloul şi penarul şi s-ar fi cheltuit cu **270** lei mai mult decât ar fi rămas.

Ştiind că penarul a costat cu **10** lei mai mult decât stiloul, să se afle preţul unitar al fiecărui obiect cumpărat.

203. De **1** iunie, un învăţător a cumpărat pentru elevii din clasa lui de **4** ori mai multe bomboane decât napolitane. Fiecare copil a primit câte **2** napolitane şi câte **7** bomboane şi au rămas nedistribuite **5** napolitane şi **52** de bomboane. Câţi elevi erau în clasă?

204. Doi copii s-au luat la întrecere la fugă.

Pasul primului copil era de **2** ori mai mic decât triplul pasului celui de-al doilea. În timp ce primul copil făcea **4** paşi, cel de-al doilea făcea **5** paşi. Când primul făcuse **16** paşi, distanţa dintre cei doi concurenţi era de **2** metri.

Să se afle:

a) care copil a câştigat întrecerea;

b) lungimea pasului fiecărui copil.

205. La o fabrică de ciment se încarcă vagoanele contractate, de **15** tone şi de **20** tone. Dacă se încarcă numai vagoanele de **15** tone, rămân în depozit **3 940** tone din cantitea de ciment ce trebuia expediată, iar dacă se încarcă numai vagoanele de **20** tone, rămân în depozit **6 200** tone. Încărcându-se toate vagoanele contractate, rămân în depozit **140** tone de ciment.

Să se afle:

a) cantitatea de ciment ce trebuia expediată;

b) câte vagoane de fiecare fel au fost contractate.

206. Dacă împărţim suma a trei numere naturale la **3**, obţinem numărul **12**. Ştiind că primul număr este mai mic cu **3** decât al doilea şi de **3** ori mai mic decât suma celorlalte două, aflaţi numerele.

207. Pe două rafturi erau câte **35** de cărţi. De pe primul raft se ia un număr de cărţi, iar de pe al doilea atâtea câte au rămas pe primul raft.

Aflaţi câte cărţi rămân pe ambele rafturi.

208. La un concurs de circulaţie, s-au acordat premii în valoare totală de **21 500** lei. Un premiu **I** avea valoarea de **2 000** lei, un premiu **II** valora **1 500** lei, iar un premiu **III**, **1 000** lei.

Ştiind că toate premiile **I** valorau cu **4 500** lei mai puţin decât toate premiile **II** şi cu **1 000** lei mai mult decât toate premiile **III**, aflaţi câte premii de fiecare fel au fost acordate.

209. Aflaţi ce sumă au împărţit trei copii, dacă primul a luat o jumătate din sumă şi încă **4** lei, al doilea cât o jumătate din suma luată de primul copil şi încă **4** lei, iar cel de-al treilea mai puţin cu **2** lei decât jumătatea sumei luate de al doilea copil.

210. Aflându-se la bunici, Sandu vrea să numere păsările din curte. El observă că le poate grupa astfel încât la **5** găini să corespundă **2** raţe, iar la **3** raţe să corespundă o gâscă. Ştiind că în curte erau **46** de păsări, aflaţi câte păsări de fiecare fel a numărat Sandu.

211. Dimitrie are de **7** ori mai multe timbre decât George.

Dacă Dimitrie ar fi avut cu **31** timbre mai puţin, iar George cu **7** timbre mai mult decât are, atunci primul copil ar fi avut de **3** ori mai multe timbre decât ar fi avut al doilea.

Câte timbre are fiecare dintre cei doi copii?

212. Bogdan îi spune lui Cristian: "Am cu **4** ani mai mult decât aveai tu când eu aveam vârsta pe care o ai, iar când vei avea vârsta pe care o am, suma vârstelor noastre va fi de **28** ani".

Aflaţi vârsta lui Cristian.

213. Suma a trei numere naturale este **432**. Dacă dublăm primul număr, îl obţinem pe cel de-al doilea, iar dacă din al treilea îl scădem pe al doilea, obţinem primul număr.

Care sunt cele trei numere?

214. S-au cumpărat stilouri şi cărţi, pentru care s-au plătit **2 835** lei. Ştiind că pentru un stilou s-au plătit **247** lei, iar pentru o carte **200** lei, să se afle câte stilouri şi câte cărţi de acest fel s-au cumpărat.

215. 4 kg de mere şi **6** kg de roşii costă **940** lei.

Câţi lei se vor plăti pentru **1** kg de mere şi $\mathbf{1\frac{1}{2}}$ kg de roşii?

216. Cristina a rezolvat într-o săptămână un număr de exerciţii şi de probleme. Numărul exerciţiilor reprezenta $\mathbf{\frac{3}{8}}$ din numărul problemelor.

Dacă ar mai rezolva încă **15** exerciţii, numărul acestora ar reprezenta o doime din numărul total de exerciţii şi probleme care ar fi rezolvate.

Câte exerciţii şi câte probleme a rezolvat Cristina?

217. De la fereastra apartamentului în care locuieşte, Tinu scapă o minge. El observă că aceasta, până "se linişteşte", atinge pământul şi sare în sus de **3** ori. Ştiind că de fiecare dată mingea se ridică la o înălţime de **2** ori mai mică decât distanţa pe care o străbate când se îndreaptă spre pământ şi că ultima dată s-a ridicat la înălţimea de **1** m, aflaţi înălţimea de la care a fost scăpată mingea.

218. Mitruţ a cheltuit într-o excursie de patru zile o sumă de bani. În prima zi a cheltuit a patra parte din acea sumă, a doua zi de **3** ori mai puţin decât îi rămăsese, a treia zi jumătate din noul rest, iar a patra zi ultimii **150** lei.

Câţi lei a cheltuit Mitruţ în acea excursie?

219. Un autoturism merge **4** ore cu o anumită viteză, apoi încă **5** ore cu o viteză care este cu **15** km/oră mai mică decât în prima parte, parcurgând în total **420** de km. Să se afle viteza autoturismului.

220. Un biciclist face la urcuş **8** km/oră şi la coborârea aceleiaşi pante

26 km/oră. Ştiind că timpul la urcuş este cu **9** ore mai mare decât timpul la coborâre, aflaţi lungimea acelei pante.

221. Două vapoare, primul cu viteza de **35** km/oră, al doilea cu viteza de **21** km/oră, pornesc în acelaşi timp dintr-un port, dar primul ajunge la destinaţie cu **4** ore înaintea celui de-al doilea.
Aflaţi distanţa parcursă de primul vapor.

222. Din două localităţi, pleacă în acelaşi timp, una spre alta, două maşini. Una are viteza de **60** km/oră, iar cealaltă **50** km/oră.
Când se întâlnesc, prima a trecut de jumătatea drumului cu **10** km. Ce distanţă este între cele două localităţi?

223. Două bucăţi de sârmă aveau aceeaşi lungime. După ce s-au luat **7** m din prima bucată şi **16** m din a doua, aceasta din urmă rămâne cu o lungime de **4** ori mai mică decât lungimea sârmei rămase în cealaltă bucată.
Câţi metri de sârmă au fost iniţial în fiecare bucată?

224. Într-un coş sunt cu **9** mere mai multe decât în alt coş.
Dacă trecem **17** mere din primul coş în al doilea, acesta din urmă va avea de **6** ori mai multe mere decât vor rămâne în primul coş.
Câte mere sunt în fiecare coş?

225. Un ţăran are de **4** ori mai multe găini decât raţe. Vinde o găină şi cumpără **2** raţe şi astfel numărul găinilor devine de **3** ori cât al raţelor.
Câte găini şi câte raţe a avut ţăranul?

226. La împărţirea a două numere naturale diferenţa dintre deîmpărţit şi rest este **5**. Aflaţi numerele.

227. Să se afle cel mai mic, apoi cel mai mare număr natural de trei cifre care împărţite la un număr de două cifre dau restul **97**.

228. Suma a trei numere naturale este **432**. Dacă dublăm primul număr, îl obţinem pe cel de-al doilea, iar dacă din al treilea îl scădem pe al doilea, obţinem primul număr.
Care sunt cele trei numere?

229. Să se determine trei numere naturale consecutive pare, ştiind că suma lor este cu **54** mai mare decât numărul mai mic.

230. Să se determine cinci numere impare consecutive ştiind că, dacă din suma lor scădem suma numerelor pare ce se află între ele, vom obţine **35**.

231. Pe baza scrierii **180 + 79 – 250 = 198 + 77 – 275** şi folosind proprietăţile egalităţilor cu numere naturale, Vlad i-a demonstrat lui Dany că **10 = 11**. Cum?
Unde a greşit Vlad?

232. Determinați cel mai mare număr de patru cifre care împărțit la **999** să dea:

a) un cât de **3** ori mai mare decât restul;

b) un cât de **3** ori mai mic decât restul.

233. Dacă se aşază un zero la dreapta unui număr de două cifre, acest număr se măreşte cu **4** sute, iar zecile lui se micşorează cu **4**.

Care este acest număr?

234. La o împărțire de două numere naturale, se ştie că deîmpărțitul este **51**, iar restul **1**.

Să se afle împărțitorul şi câtul, ştiind că sunt diferite de **1** şi că împărțitorul este mai mare decât câtul.

Câte soluții are problema?

235. Dorind să cumpere un pix şi un penar, Cristian constată că îi mai trebuie **30** de lei.

Ştiind că un pix costă cât $\frac{1}{2}$ din suma pe care o avea, iar un penar costă cât $\frac{3}{4}$ din aceeaşi sumă, aflați câți lei avea Cristian şi cât costă pixul şi penarul.

236. Ovidiu are de **7** ori vârsta pe care o avea el când sora sa, Alina, avea vârsta lui actuală. Când el va avea vârsta de azi a surorii sale, suma vârstelor va fi de **32** de ani.

Ce vârstă are fiecare acum?

237. Ionuț şi Ana îşi numără banii pe care i-au câştigat cu pluguşorul.

Dacă fiecare ar fi câştigat cu **80** lei mai mult, atunci suma băiatului ar fi fost de **3** ori mai mare decât suma pe care ar fi avut-o fata, iar dacă fiecare ar fi câştigat cu **80** lei mai puțin, raportul dintre sume ar fi fost **5**.

Cât a câştigat fiecare?

CAPITOLUL al VI–lea

Probleme de falsă ipoteză

Metoda de bază: falsa ipoteză, cu mai multe variante;
Alte metode şi procedee: – metoda grafică;
– prin aproximaţii succesive;
– metoda algebrică.

Metoda ipotezelor are la bază o presupunere, o ipoteză. Ea solicită introducerea unor date ipotetice şi confruntarea situaţiei obţinute astfel cu situaţia reală. Întâmplător, ele pot coincide. În multe cazuri, ele nu coincid, dar concluziile deduse din această confruntare ne coordonează căutările. De aceea, metoda se numeşte *metoda falsei ipoteze*, denumire care s-a fixat prin uz, dar, pentru a se respecta topica limbii române, ar trebui să fie numită metoda *ipotezei* (ipotezelor) *false* sau *metoda ipotezelor.*

Metoda se poate utiliza şi în soluţionarea problemelor care se rezolvă, în mod obişnuit, prin metoda comparaţiei, în problemele de sumă şi raport etc.

Capitolul cuprinde **4** subtipuri de probleme, grupate astfel:

– de la **1** la **7**, probleme cu **2** mărimi, care solicită o singură ipoteză;

– de la numărul **8** la **12**, probleme cu **3** mărimi, care solicită, într-o variantă de rezolvare, o singură ipoteză, iar în alta, mai multe ipoteze succesive;

– de la numărul **13** la **24**, probleme ce conţin gruparea elementelor din diferite mulţimi în două situaţii distincte; în rezolvarea lor, pentru elevii mici, este mai uşoară folosirea metodei grafice; pe altă cale, ele solicită **2** sau mai multe ipoteze succesive;

– problema nr. **25** b) cuprinde **3** mărimi, dar nici o relaţie între valorile fiecăreia; solicită mai multe ipoteze arbitrare.

Enunţuri

1. Un ţăran are păsări de curte şi oi. Aceste animale au la un loc **46** de capete şi **114** picioare. Câte păsări şi câte oi are ţăranul?

2. Răzvan are suma de **435** lei în monede de **5** lei şi de **10** lei. Ştiind că sunt în total **50** de monede, să se afle câte monede de fiecare fel are Răzvan.

3. De pe **65** hectare s-au recoltat **2 610** chintale de grâu. De pe unele hectare s-au recoltat câte **38** chintale, iar de pe altele câte **42** chintale.

De pe câte hectare s-au recoltat câte **38** chintale?

De pe câte hectare s-au recoltat câte **42** chintale?

4. **300** de grinzi, unele de brad şi altele de stejar, cântăresc **10 524** kg.
O grindă de brad cântăreşte **28** kg, iar una de stejar, **46** kg.
Câte grinzi de fiecare fel sunt?

5. La o serbare s-au vândut **40** de bilete la prețul de **6** lei şi de **4** lei, încasându-se în total **220** lei.
Câte bilete de fiecare categorie au fost vândute?

6. Într-un bloc de locuințe sunt apartamente cu două, trei şi, respectiv, cu patru camere. Ştiind că sunt **24** de apartamente cu două şi patru camere, în total **64** de camere, iar numărul apartamentelor cu trei camere reprezintă **3** pătrimi din numărul apartamentelor cu două camere, să se afle:
a) câte apartamente sunt cu două şi câte cu patru camere;
b) câte apartamente sunt în total în acel bloc.

7. Pentru fiecare problemă rezolvată corect, un elev primeşte **10** puncte, iar pentru fiecare problemă rezolvată greşit sau nerezolvată, i se scad **5** puncte.
La un concurs s-au dat **10** probleme. Câte probleme a rezolvat corect fiecare dintre cei trei prieteni, Andrei, Barbu şi Costel, dacă primul a primit **25** de puncte, al doilea **40** de puncte, iar al treilea **55** de puncte?

8. (*Trei mărimi*) La un depozit, s-au adus **48** de saci cu orez, unii de **50** de kg, alții de **54** de kg şi alții de **63** kg.
Să se afle câți saci au fost de fiecare fel, ştiind că numărul sacilor de **50** kg era cu **8** mai mic decât triplul celor de **54** kg şi că în total s-au adus **2 552** kg de orez.

9. Pentru serbarea Pomului de Crăciun, elevilor clasei noastre li s-a cumpărat câte o carte.
Au fost **26** de cărți cu prețul unitar de **70** de lei, de **75** şi, respectiv, de **80** lei, în valoare totală de **1 895** lei.
Ştiind că numărul cărților de **75** de lei a fost cu **1** mai mare decât sfertul celor de **70** de lei, aflați câte cărți sunt de fiecare fel.

10. La o librărie s-au adus **31** de truse cu două, trei şi patru creioane, în total **105** creioane.
Ştiind că numărul truselor de **4** creioane este de **3** ori mai mare decât al celor cu **2** creioane, aflați numărul truselor de fiecare fel.

11. Cristian a cumpărat cu **281** lei **15** caiete de trei feluri: de **10** lei, de **15** lei şi de **47** lei.
Câte caiete de fiecare fel a cumpărat, ştiind că acele de **10** lei erau de **2** ori mai multe decât cele de **15** lei.

12. Într-o curte sunt găini, rațe şi oi. Ştiind că în total sunt **100** de capete şi **280** de picioare, iar numărul rațelor este cât o treime din numărul găinilor, să se afle câte păsări de fiecare fel sunt în acea curte.

13. (*al treilea subtip*) Vrând să pun florile pe care le am în vaze, constat că dacă pun câte **2** flori în fiecare vază, rămâne o floare fără loc, iar dacă pun câte **3** flori în fiecare vază, rămâne o vază fără flori.

Câte flori şi câte vaze am?

14. Dacă stă câte o vrabie pe un par, o vrabie nu are pe ce sta.

Dacă stau câte două vrăbii pe un par, rămâne un par liber.

Câte vrăbii şi câți pari sunt?

15. Este **7** ianuarie. Dorind să termine problemele date pentru vacanță, Oana vede că dacă ar lucra câte **5** probleme, pentru ultima zi i-ar rămâne **4** probleme. Atunci ea lucrează câte **6** probleme pe zi, pentru ultima zi rămânându-i o singură problemă.

Câte probleme are de rezolvat Oana şi la ce dată le termină?

16. Înainte de a porni cu săniuța spre copiii din clasa noastră, Moş Crăciun constată că dacă ar lua jucării de câte **300** lei, nu i-ar ajunge **25** de lei, iar dacă ar lua jucării de câte **275** de lei, i-ar mai rămâne bani pentru încă **2** jucării.

Atunci procedează astfel: cumpără pentru fiecare copil câte o jucărie, mai adaugă la suma rămasă **2** lei şi cumpără pentru fiecare câte o ciocolată. Să se afle:

a) câți lei a cheltuit Moş Crăciun pentru copiii noştri;

b) câte ciocolate a cumpărat;

c) cât a costat o ciocolată.

17. Un grup de elevi aflați în excursie, dorind să traverseze un râu, a constatat că, dacă rămâneau **4** elevi pe mal, se puteau îmbarca câte **6** într-o barcă, iar dacă se îmbarcau câte **8**, rămânea o barcă liberă.

Câte bărci şi câți elevi erau?

18. Dan, jucându-se cu pietricele şi vrând să pună în fiecare gropiță acelaşi număr de pietricele, face următorul calcul: "dacă pun câte **12** pietricele în fiecare gropiță, îmi rămân **10** pietricele, iar dacă pun câte **15**, nu-mi ajung **5** pietricele".

Câte pietricele şi câte gropițe făcute avea Dan?

19. O cantitate de căpşune trebuie pusă în lăzi. Dacă în fiecare ladă se pun câte **5** kg, rămân **180** kg. Dacă se pun câte **6** kg în fiecare ladă, rămân **20** de lăzi goale şi o ladă cu numai **2** kg. Câte lăzi şi câte căpşune sunt?

20. În timpul inundațiilor, pentru consolidarea şi supraînălțarea digurilor, oamenii au fost repartizați pe echipe, fiecărei echipe încredințându-i-se câte o porțiune de dig. Într-o zi, s-a făcut calculul că dacă la fiecare porțiune de dig de **8** m s-ar fi repartizat câte **6** oameni, atunci **20** de porțiuni ar fi rămas numai cu câte **5** oameni şi **5** porțiuni libere, iar dacă la fiecare porțiune de **8** m s-ar fi repartizat câte **5** oameni, atunci un număr de **331** oameni ar fi avut front de lucru.

Pentru ce lungime de dig s-a făcut calculul şi câți oameni s-au prezentat la lucru în acea zi?

21. Georgianei nu îi prea place să citească cărţi. De aceea, tatăl său îi face un program: până la plecarea în concediu, să citească cele zece cărţi, câte **50** de pagini pe zi. Ambiţionată, Georgiana a citit câte **56** de pagini pe zi, a mai citit încă o carte de **120** de pagini, terminând astfel cu **3** zile mai devreme.

Ştiind că plecarea în concediu era planificată pe **5** august, aflaţi pe ce dată a început fetiţa să citească şi câte pagini a citit.

22. Învăţătorul împarte elevilor unei clase bomboane. Dacă ar da fiecărui elev câte **2** bomboane, i-ar rămâne **30**, iar dacă ar da câte **4**, nu i-ar ajunge **40** de bomboane.

Câţi elevi sunt în acea clasă?

Câte bomboane împarte învăţătorul?

23. Societatea Comercială "Tractorul" S.A. are de onorat o comandă. Dacă ar face câte **20** de tractoare pe zi, ar lipsi la termenul de livrare **100** de tractoare, iar dacă ar face zilnic câte **23** de tractoare, ar fi cu **20** de tractoare mai mult decât comanda.

Câte tractoare erau comandate şi în câte zile trebuia onorată comanda?

24. La ora de educaţie fizică, profesorul a adus un număr de mingi. Dacă le-ar distribui câte o minge la **5** elevi, ar rămâne **2** mingi nefolosite, iar dacă ar da câte una la **3** elevi, ar rămâne **2** elevi fără minge.

Câţi elevi erau şi câte mingi a adus profesorul?

25. Dacă ar fi câte **10** jucători la fiecare panou de baschet, rămân **2** panouri libere. Dacă ar fi câte **7** jucători la fiecare panou, la ultimul ar mai trebui **2** jucători. Câte panouri de baschet erau şi câţi jucători au venit la acel antrenament?

26. Unui copil i s-au dat **4** mere, iar celorlalţi câte **6** mere. Dacă s-ar fi dat fiecărui copil câte **5** mere, ar fi rămas **13** mere.

Câte mere şi câţi copii au fost?

27. Dacă se aşază câte **10** creioane într-o cutie, rămân **6** cutii goale şi o cutie ar avea numai creioane, iar dacă se aşază câte **6** creioane, într-o cutie rămân **3** creioane.

Câte cutii şi câte creioane sunt?

28. Dacă elevii claselor a IV-a din şcoala noastră s-ar grupa câte **9** în rând, ei ar forma cu **15** rânduri mai puţin decât dacă s-ar grupa câte **6** în rând.

Câţi elevi sunt în clasele a IV-a din şcoala noastră?

29. Pentru a călători cu un vaporaş, unui grup de elevi îi este necesară o sumă de bani. Fiecare elev trebuie să plătească **725** lei. Deoarece un copil nu mai poate participa la această călătorie, atunci costul călătoriei se ridică la **750** lei de persoană.

Câţi elevi au plecat cu vaporaşul şi ce sumă totală trebuiau să plătească?

30. Determinați deîmpărțitul ***d*** și câtul ***c***, știind că:
a) $d : 13 = c$ (rest **12**) și $d : 17 = c$ (rest **0**);
b) $d : 37 = c$ (rest **26**) și $d : 41 = c$ (rest **2**).
Formulați apoi câte o problemă pentru fiecare grup de relații date.

31. Câți trandafiri și câte lalele sunt în grădina bunicului, știind că dacă le grupează câte un trandafir și o lalea, rămân **6** lalele fără pereche, iar dacă le grupează câte un trandafir și **2** lalele, rămân **2** trandafiri negrupați?

32. La un concurs de matematică, Silviu a obținut **10** puncte. Știind că avea de rezolvat **8** probleme, iar pentru o problemă corect rezolvată a primit **3** puncte și pentru o problemă nerezolvată i s-au scăzut **4** puncte, aflați câte probleme a rezolvat corect Silviu.

33. În **20** de zile, Andrei rezolvă câte un număr de probleme.
Lucrând același număr de probleme și încă **3** pe zi, el termină problemele în **15** zile. Câte probleme a avut de rezolvat Andrei?

34. (După ce rezolvați problemele de mai jos, arătați ce diferență, în privința formulării și a metodei de rezolvare, există între ele. Comparați-le apoi cu problema nr. **2** din acest capitol.)
a) Un elev are un număr de monede de **3** lei egal cu cel de **5** lei, în total **40** de lei. Câți lei valorează monedele de **3** lei? Dar cele de **5** lei?
b) Un elev are **50** de lei, în monede de **3** lei, **1** leu și **25** de bani. Câte monede de fiecare fel are elevul, dacă în total are **50** de monede?

CAPITOLUL al VII–lea

I. Probleme care se rezolvă prin metoda comparației
II. Probleme de reducere la unitate

I. *Probleme care se rezolvă prin metoda comparației*
Metoda de bază: comparația *prin înlocuire* sau *prin scădere*;
Alte metode şi procedee: – metoda falsei ipoteze;
– metoda grafică;
– metoda algebrică.

Specificul metodei comparației constă în faptul că se foloseşte mai ales în problemele în care două mărimi necunoscute sunt legate prin două relații clar precizate, determinarea fiecăreia implicând eliminarea celeilalte mărimi *prin înlocuire* sau *prin reducere* (scădere).

a) În problemele care se rezolvă prin *eliminarea* unei mărimi, înlocuind-o, dat fiind *raportul* dintre valorile unitare (ca în problemele **1**, **3**, **4**, **5**, din acest capitol; în problemele **6**, **7**, **8**, **11**, **17**, înlocuirea se face *prin grupe* de valori unitare) sau poate fi dată *diferența* dintre valorile unitare (ca în problemele: **2**, **9**, **10**, **15**, din acest capitol).

b) Comparația *prin reducere* (scădere) se foloseşte în problemele în care enunțul cuprinde relații referitoare la mărimile date *în două situații distincte.* (Pot fi atâtea mărimi câte situații sunt). După scrierea datelor, unele sub altele, conform situațiilor din enunț, trebuie să comparăm datele privitoare la o mărime în cele două situații. Dacă ele sunt aceleaşi, le obținem prin diferite procedee (multiplicitate sau divizibilitate). *De aceea metoda se mai numeşte aducerea la acelaşi termen de comparație* sau *egalarea datelor* (ca în problemele **31**, **32** din capitolul al VII-lea).

Problemele **12**, **13**, **14** se pot rezolva atât prin înlocuire, cât şi prin reducere (scădere).

II. Metoda aducerii la acelaşi termen de comparație implică elemente din *metoda reducerii la unitate*, care se poate sintetiza prin regula: pentru a şti valoarea mai multor unități, trebuie să determinăm valoarea *unei singure* unități (părți) şi invers. În ambele situații, fie că sunt mărimi direct *proporționale* (ca în problemele **17 – 21**, din capitolul al VII-lea), fie că sunt mărimi invers proporționale (ca în problemele **22**, **23** – **28**, din capitolul al VII-lea), enunțul cuprinde trei elemente cunoscute şi unul necunoscut, două câte două de acelaşi fel. Cu ajutorul celor trei elemente cunoscute, se află cel de-al patrulea. De aceea, metoda se mai numeşte *regula de trei* (simplă sau compusă).

În problema **33**, capitolul al VII-lea, unele mărimi sunt în raport direct proporțional, iar altele în raport invers proporțional. Pentru rezolvare, se poate despărți problema în mai multe probleme, în fiecare aplicându-se *regula de trei simplă*. În această situație, metoda se numeşte *regula de trei compusă*.

Enunțuri

1. Pentru **8** stilouri şi **5** penare s-au plătit **2 320** lei. Cât costă un stilou şi cât costă un penar, dacă un stilou costă cât **3** penare?

2. S-au cumpărat **3** stilouri şi **5** pixuri cu **80** de ruble. Pentru **3** stilouri s-au plătit cu **31** de ruble mai mult decât pe **2** pixuri.
Să se afle prețul unui stilou şi al unui pix.

3. Două cărți costă cât **3** registre. Când s-au cumpărat **3** cărți şi **5** registre au plătit **304** lei. Cât costă o carte şi cât costă un registru?

4. Pentru **7** m de tifon şi **6** m de sfoară s-au plătit **272** lei. Cât costă fiecare bucată de material, ştiind că **1** m de tifon costă cât **4** m de sfoară?

5. Pentru **5** m de stofă şi **3** m de tergal s-au plătit **9 775** lei. Cât costă **1** m de stofă şi cât costă **1** m de tergal, dacă **1** m de stofă este de **4** ori mai scump decât **1** m de tergal?

6. La un magazin de încălțăminte pentru copii, s-au vândut sandale cu **270** lei perechea şi pantofi cu **524** lei perechea.
S-au vândut de **3** ori mai multe perechi de sandale decât pantofi, încasându-se în total **20 010** lei.
Câte perechi de fiecare fel s-au vândut?

7. La un magazin, pe cele **3** cupoane de stofă de calități diferite, cu prețurile unitare de **1 720** lei, calitatea I, de **1 250** lei, calitatea a doua şi de **675** lei, calitatea a III-a, s-au încasat **33 340** lei. Câți metri au fost de fiecare fel, dacă stofa de calitatea I a avut o lungime de **3** ori mai mare decât cea de calitatea a III-a, iar aceasta a fost mai mică de **2** ori decât lungimea stofei de calitatea a II-a.

8. Într-o zi, tata, cumpărând din piață ardei cu **50** lei/kg, ceapă cu **30** lei/kg şi vinete cu **60** lei/kg, a cheltuit **600** lei.
Câte kg de legume de fiecare fel erau, dacă tata a cumpărat o cantitate de ceapă de **3** ori mai mică decât cea de ardei şi de **2** ori mai mică decât cea de vinete?

9. Cu banii pe care îi are, Ionela poate cumpăra, de ziua mamei sale, **3** trandafiri sau **5** lalele.
Ştiind că un trandafir este mai scump cu **6** lei decât o lalea, aflați câți lei are Ionela.

10. Suma de **6 110** lei a fost cheltuită pentru **3** treninguri, **2** cămăşi şi **5** bluze. Ştiind că o cămaşă este mai scumpă decât o bluză cu **40** de lei, dar mai ieftină decât un trening cu **470** lei, aflați câți lei a costat fiecare grupă de mărfuri cumpărate.

11.* Într-un garaj se află **81** de maşini, unele de o tonă şi jumătate, altele de **2** tone, altele de **3** t. Ştiind că toate camioanele de o tonă şi jumătate transportă tot atât cât toate de **2** tone şi că toate de **2** tone transportă tot atât cât toate de **3** tone, să se afle câte camioane de fiecare fel se află în garaj.

12. Diferenţa de preţ a două baloturi de tercot de aceeaşi lungime, dar de calităţi diferite este de **1 150** lei. Se ştie că **4** m de tercot din primul balot costă cu **130** lei **50** bani mai scump decât **3** m din balotul al doilea, iar **3** m din primul balot şi **4** m din balotul al doilea costă împreună **1 201** lei.

Se cere:

a) preţul unui metru din fiecare balot;

b) lungimea materialului din fiecare balot.

13. Doi copii au cumpărat bomboane de **48** de lei. Pentru a plăti bomboanele, primul a dat toţi banii săi, iar al doilea $\frac{3}{4}$ din banii săi. Dacă primul copil ar fi dat $\frac{3}{4}$ din banii săi, iar al doilea copil toţi banii săi, ar fi lipsit la plată **1** leu şi **50** bani.

Câţi lei a avut fiecare copil?

14. Două echipe de muncitori au de efectuat un şanţ. Dacă prima echipă lucrează **18** zile, iar a doua **16** zile, sau dacă prima echipă lucrează **21** de zile şi a doua **12** zile, şanţul este terminat.

În câte zile termină şanţul fiecare echipă, dacă ar lucra singură?

15. La o cantină s-au adus **50** kg carne de gâscă, **20** kg carne de curcan şi **30** kg carne de găină, în valoare totală de **15 450** lei.

Cât s-a plătit pentru fiecare fel de carne, dacă **1** kg de carne de curcan costă cât **1** kg de carne de gâscă şi **1** kg de carne de găină la un loc, iar **1** kg carne de găină costă cu **15** lei mai puţin decât **1** kg carne de gâscă?

16. Trei copii şi-au împărţit un număr întreg de nuci cuprins între **250** şi **300**, astfel: primul a primit un număr de perechi egal cu numărul grămezilor de câte **5** nuci primite de al doilea şi cu dublul numărului de grămezi de câte **13** primite de al treilea. Câte nuci a primit fiecare?

17. (*reducere la unitate, mărimi direct proporţionale*)

Din **45** litri de lapte se obţin **5** litri de smântână.

Din câţi litri de lapte se obţin **12** litri de smântână?

18. Pentru un cămin de copii s-au cumpărat **12** dulapuri şi **18** mese. Dulapurile au costat **36 720** lei.

Ştiind că **4** mese au costat cât **3** dulapuri, aflaţi câţi lei au costat toate mesele.

19. S-au cumpărat **3** bucăţi de tergal de aceeaşi calitate, având în total **54** de metri. Prima bucată a costat **15 600** lei, a doua **11 700** lei, iar a treia **7 800** lei.

Câţi metri avea fiecare bucată de tergal?

20. Bunicul a plantat în livadă **18** pruni şi un număr de meri. Ştiind că la fiecare **9** pruni a plantat **4** meri, aflaţi câţi meri a plantat bunicul.

21. Un automobil a parcurs într-o zi **360** km şi în a doua zi $\frac{2}{3}$ din drumul parcurs în prima zi. Pentru fiecare **100** km parcurşi, automobilul consumă **12** litri de benzină.

Câţi litri de benzină a consumat automobilul în cele două zile?

22. (*mărimi invers proporţionale*)

10 muncitori termină o lucrare în **6** zile. În câte zile vor termina lucrarea **12** muncitori?

23. În cât timp vor termina o lucrare **180** de muncitori, dacă **3** muncitori termină aceeaşi lucrare într-o oră?

24. Tatăl, mama şi fiul şi-au propus să amenajeze o grădină cu flori. Lucrând fiecare singur, tata ar termina lucrarea în **4** ore, mama în **6** ore, fiul în **12** ore.

În câte ore s-ar termina lucrarea, dacă ar lucra împreună toţi membrii familiei?

25. 5 copii mănâncă **5** îngheţate în **5** minute. Câţi copii mănâncă **30** de îngheţate în **15** minute?

26. În **12** zile o echipă de muncitori ar efectua $\frac{2}{5}$ dintr-o lucrare, iar alta $\frac{4}{9}$ din rest.

În câte zile, lucrând împreună, ar termina lucrarea cele două echipe?

27. La început de săptămână, pentru cele **6** zile, un muncitor a primit ca sarcină de lucru să realizeze **36** de piese.

După ziua de marţi, muncitorul primeşte o maşină cu o productivitate mai mare şi astfel termină de efectuat piesele cu o zi mai devreme.

Cu câte piese a executat mai mult joi faţă de luni?

28. Două terenuri, unul de **48** ha şi altul de **80** ha, au fost cultivate cu sfeclă. De pe primul teren s-au recoltat câte **50** t de sfeclă la hectar, iar de pe al doilea teren, de pe **4** ha s-au recoltat cât de pe **3** ha din primul teren. Dintr-o tonă de sfeclă se extrag **160** kg de zahăr.

Cu câte kg de zahăr s-au obţinut mai mult din sfecla de pe un teren decât de pe celălalt?

29. Un muncitor face drumul de acasă până la locul de muncă pe jos, în **16** minute, iar cu bicicleta în **6** minute.

La ce distanţă de locul de muncă locuieşte acest om, dacă el face într-o oră, pe bicicletă, cu **7** km şi jumătate mai mult decât pe jos?

30. Un avion a parcurs $\frac{1}{3}$ dintr-o distanţă în **2** ore, cu viteza de **360** km pe

oră, iar restul distanței a parcurs-o cu viteza de **480** km pe oră.
În câte ore a parcurs avionul întreaga distanță?

31. Pentru a se completa necesarul de rechizite, la o grupă dintr-o grădiniță, s-au cumpărat o dată **5** creioane, **3** gume şi **6** rigle, plătindu-se **95** de lei. Altă dată s-au cumpărat, cu aceleaşi prețuri unitare, **3** creioane, **5** gume şi **4** rigle, care au costat **83** de lei. A treia oară s-au cumpărat **8** creioane, **8** gume şi **5** rigle, plătindu-se **133** lei.
Aflați prețul unitar al fiecărui obiect cumpărat.

32. **5** pixuri, **5** stilouri şi **6** caiete costă **1 216** lei.
2 pixuri, **3** stilouri şi **7** caiete costă **737** lei.
3 pixuri, **2** stilouri şi **9** caiete costă **589** lei.
Câți lei costă un pix? Câți lei costă un stilou? Dar un caiet?

33. Prin **3** robinete, fiind deschise timp de **4** zile, câte **7** ore pe zi, curg **30 240** litri de apă.
În câte zile, prin **4** robinete cu acelaşi debit, fiind deschise câte **3** ore pe zi, curg **21 600** litri de apă?

34. O lucrare poate fi executată în **20** de zile de către **15** muncitori. Deoarece, după **8** zile de lucru, unii dintre aceşti muncitori pleacă pe alt şantier, lucrarea se termină după alte **30** de zile.
Câți muncitori au plecat pe alt şantier?

CAPITOLUL al VIII–lea

Probleme care se rezolvă prin metoda retrogradă

Metoda de bază:	– metoda retrogradă (a mersului invers);
Alte metode şi procedee:	– metoda grafică;
	– metoda aflării restului din rest;
	– (uneori) metoda falsei ipoteze.

Metoda mersului invers se foloseşte în anumite probleme în care elementul necunoscut apare la începutul şirului de relaţii dat în enunţ.

Urmărind enunţul de la sfârşit la început ("mergând" în sens invers enunţului), trebuie să se determine penultimul rest pe baza relaţiei sale cu ultimul rest, apoi antepenultimul rest, până când se ajunge la numărul iniţial (întregul).

Analizând operaţiile date în enunţ şi cele efectuate în rezolvarea problemei, se poate constata că în fiecare etapă se efectuează operaţia inversă celei din enunţ.

Deci, nu numai "mersul" este invers, ci şi operaţiile efectuate pentru rezolvare sunt inverse celor din problemă.

Exerciţiile ce se pot obţine din rezolvarea unora dintre aceste probleme sunt denumite exerciţii "cu ***x***", care sunt de fapt ecuaţii de gradul I cu o necunoscută, dar care, *pentru elevii mici*, se rezolvă, nu prin calcul algebric, ci *prin raţionament aritmetic*.

Enunţuri

1. Un producător vinde pepeni la **3** cumpărători.

Primului îi vinde o jumătate din cantitate, celui de-al doilea o treime din ce îi rămăsese, iar celui de-al treilea o cincime din noul rest.

Câţi pepeni a avut iniţial producătorul, dacă i-au mai rămas **16** pepeni?

2. Din banii pe care îi are, un elev cheltuieşte $\mathbf{\frac{1}{2}}$ din sumă şi încă **1** leu pentru caiete, $\mathbf{\frac{1}{2}}$ din rest şi încă **1** leu pentru **1** pix, $\mathbf{\frac{1}{2}}$ din noul rest şi încă **1** leu pentru creioane şi îi mai rămân **27** de lei.

Să se afle câţi lei a avut la început elevul şi cât a cheltuit de fiecare dată.

3. Un elev este întrebat de tatăl său: "Câţi elevi sunteţi în clasă?"

El răspunde că, dacă ar mai fi încă o dată pe câţi sunt şi încă pe jumătate şi încă pe un sfert şi cu învăţătorul, ar fi **100**. Câţi elevi erau în clasă?

4. Ce sumă a avut un elev dacă, după ce a cheltuit $\frac{3}{7}$ din ea, a mai cheltuit $\frac{3}{5}$ din cât îi rămăsese, iar după ce a mai cheltuit încă **12** lei, constată că i-au rămas **24** de lei?

5. Dintr-un autobuz au coborât la prima stație $\frac{1}{7}$ din numărul călătorilor existenți şi s-au mai urcat **14.**

La stația următoare, au coborât $\frac{1}{4}$ din numărul călătorilor existenți şi s-au urcat **5**, după care în autobuz se găsesc **29** de călători.

Câți călători erau la început în autobuz?

6. În livada bunicilor, cei doi verişori se joacă "de-a paznicul şi hoțul".

Mitruț îşi triplează grămada de mere pe care o avea, dar Vitalie îi fură **7** mere. Din nou Mitruț îşi triplează grămada rămasă şi verişorul îi fură **9** mere. După ultima triplare şi după ce Vitalie îi fură iarăşi **9** mere, Mitruț rămâne cu **9** mere.

Câte mere a avut Mitruț la începutul jocului?

7. La un centru de pâine, înainte de închidere, erau **4** oameni, care au cumpărat toată pâinea care mai era.

Să se afle câte pâini au fost, dacă fiecare a cumpărat jumătate din pâinea care se mai găsea când i-a venit rândul şi încă o jumătate de pâine.

8. Un elev merge după cumpărături în **3** magazine.

La primul magazin dă **1** leu la intrare, cheltuieşte $\frac{1}{2}$ din suma rămasă, dă **1** leu la ieşire şi pleacă spre al doilea magazin.

Procedează la fel şi la celelalte două magazine şi se întoarce acasă cu **40** de lei.

Câți lei a avut la început şi cât a cheltuit de fiecare dată?

9. Un automobilist mai are de parcurs $\frac{2}{3}$ din drum. Dacă ar mai merge $\frac{3}{10}$ din rest şi încă **21** de km, ar face $\frac{2}{3}$ din tot drumul.

Câți km are tot drumul?

10. Avem două vase cu apă A şi B. Turnăm din A în B atât cât conține B.

Apoi, turnăm din B în A atât cât a rămas în A; din nou turnăm din A în B atât cât a rămas în B şi aşa mai departe. După **4** astfel de operații, în cele două vase rămân câte **16** litri de apă. Câți litri erau inițial în fiecare vas? Dar dacă ar fi avut loc numai **3** asemenea operații, iar în final să fi rămas tot câte **16** litri, câți litri de apă erau în fiecare vas?

11. La o stație de benzină se afla o cantitate de benzină. Într-o zi s-au vândut $\frac{2}{5}$ din toată cantitatea plus **500** litri, ceea ce reprezenta jumătate din toată cantitatea.

Câți litri de benzină se aflau la început la acea stație?

12. După ce a străbătut $\frac{1}{4}$ din tot drumul pe care îl avea de parcurs, unui ciclist i-au mai rămas cu **12** km mai mult decât ceea ce parcursese.

Câți km avea tot drumul?

13. Mădălina este întrebată câți meri are bunicul său în fața casei.

Ea răspunde că dacă ar fi cu **1** mai puțin, atunci jumătate din acest număr ar fi cu **1** mai mult decât sfertul lui. Cum a calculat Anca, sora ei, de a aflat câți meri are bunicul în fața casei?

14. De pe un teren s-a recoltat grâul în **3** zile.

În prima zi s-a recoltat de pe o parcelă care era cu **10** ha mai mare decât $\frac{1}{3}$ din întregul teren. A doua zi, (de pe) parcela care reprezenta $\frac{4}{5}$ din rest, iar a treia zi, restul, care reprezenta $\frac{1}{8}$ din teren. Să se afle:

a) câte ha are terenul;
b) de pe câte ha s-a recoltat grâul în fiecare zi.

15. Un teren de **585** ha a fost parcelat în **3** sectoare. După aceea, s-a despărțit din primul sector $\frac{1}{3}$ din suprafața sa, din al doilea $\frac{1}{5}$ din suprafața sa, din al treilea $\frac{3}{10}$ din suprafața sa şi cele **3** sectoare au rămas cu arii egale. Să se afle câte ha a avut fiecare sector inițial.

16. Un elev face o excursie de trei zile. Cu ce sumă a plecat el de acasă, dacă cheltuieşte în prima zi $\frac{3}{5}$ din suma întreagă mai puțin **60** de lei, a doua zi $\frac{1}{4}$ din rest plus **55** de lei, în a treia zi $\frac{2}{5}$ din noul rest plus **70** de lei şi îi mai rămân **5** lei?

17. Un teren agricol de **966** ha se desparte în **4** loturi.

Suprafața primului lot este cât $\frac{2}{3}$ din suprafața lotului al doilea, suprafața lotului al treilea reprezintă $\frac{8}{9}$ din suprafața celui de-al doilea, iar suprafața lotului al patrulea este $\frac{1}{6}$ din totalul suprafețelor primelor trei loturi.

Se cere suprafața fiecărui lot.

18. Într-un vas se pune apă $\frac{2}{3}$ din capacitatea sa. Se scoate apoi $\frac{1}{4}$ din conținut şi mai rămân **75** de litri.

Care este capacitatea vasului?

19. Câți lei costă dicționarul rus-român, dacă Cristi a dat pe el **75** de lei şi încă $\frac{2}{5}$ din prețul dicționarului?

CAPITOLUL al IX-lea

Probleme de logică şi perspicacitate

1. În jurul unui bazin dreptunghiular, cu lungimea de **12** m şi lăţimea de **9** m, s-au plantat pomi la interval de **3** m unul de altul. Câţi pomi s-au plantat?

2. O curte în fomă de pătrat cu latura de 8 m este împrejmuită cu un gard care are **16** stâlpi de susţinere. Care este distanţa dintre primii **2** stâlpi?

3. Câţi stâlpi de telegraf sunt pe o şosea lungă de **5** km, ştiind că distanţa dintre ultimii doi stâlpi este de **50** m?

4. Într-o livadă cu lungimea de **95** m sunt plantaţi meri la distanţa de **7** m unul de altul, la **2** m de margini. Sunt în total **15** rânduri de meri.
Câţi meri sunt în acea livadă?

5. Pe un bulevard, lung de **1** km, sunt plantaţi **202** pomi, dispuşi în mod egal pe ambele părţi ale bulevardului, la distanţe egale unul de altul.
Ce distanţă este între **2** pomi alăturaţi?

6. O parte a gardului de la curtea bunicilor, lungă de **14** m, trebuie înlocuită. Ştiind că din vechiul gard vor rămâne numai stâlpii de beton din capetele gardului înlocuit, iar stâlpii noi vor fi plantaţi din **2** în **2** m, aflaţi câţi stâlpi sunt necesari.

7. **672** m de sârmă, dispusă pe **4** rânduri, împrejmuiesc un teren dreptunghiular. Pe o lungime s-a folosit cu **72** m mai multă sârmă decât pe o lăţime. Ştiind că sârma este susţinută de stâlpi aşezaţi la **3** m unul de altul, aflaţi numărul acestora de pe cele două lăţimi ale terenului.

8. Două bare metalice de câte **3** m fiecare se taie în bucăţi de câte **6** cm. Câte tăieturi de vor efectua?

9. La un concurs, doi forestieri trebuiau să taie câte un buştean de aceleaşi dimensiuni în **13** bucăţi. Ştiind că primul concurent a tăiat buşteanul în **108** secunde, iar cel de-al doilea a avut nevoie de **8** secunde pentru fiecare tăietură, aflaţi care concurent a câştigat întrecerea.

10. Dan vrea să repare lanţul lui Grivei. Ştiind că lanţul era rupt în **6** bucăţi, între care **3** erau mai mici, adică una cu **7** zale şi două cu câte **4** zale, aflaţi numărul minim de tăieturi şi lipituri ale zalelor existente ce trebuie realizate, pentru ca lanţul să fie reparat.

11. Aceeaşi problemă de mai sus cu modificările: "Dan vrea să repare lănțişorul de argint al Simonei, iar două bucăți aveau câte **5** zale, nici una cu cheiță".

12. Este posibil să punem **3** bile în două cutii încât fiecare cutie să conțină cel mult o bilă? Dar dacă avem n cutii şi $n + 1$ bile?

13. Este posibil să punem **15** bile în **5** cutii astfel încât în fiecare cutie să fie cel puțin o bilă şi să nu existe două cutii cu acelaşi număr de bile? Dar **9** bile în **4** cutii? Dar **7** bile în **3** cutii?

14. În **11** cutii sunt **109** bile de cinci culori diferite. Ştiind că fiecare cutie conține bile de toate culorile, arătați că există două cutii cu acelaşi număr de bile.

15. Într-o cutie sunt batiste de trei culori diferite. Care este numărul minim de batiste pe care trebuie să le scoatem din cutie, fără a le privi, pentru a fi siguri că am scos cel puțin două batiste de aceeaşi culoare?

16. Într-o cutie sunt bile de **5** culori diferite, de aceeaşi mărime, astfel: **2** verzi, **28** roşii, **28** albastre, **26** galbene şi **16** negre.

Care este cel mai mic număr de bile ce trebuie scoase din cutie, fără a le privi, astfel încât să fim siguri că am scos cel puțin **9** de aceeaşi culoare?

17. Într-o cutie sunt **3** bomboane galbene, **4** bomboane albe şi **5** bomboane roşii. Câte bomboane trebuie să ia Rada din cutie, fără să se uite, pentru a fi sigură că are o bomboană roşie?

18. Într-un sertar sunt **5** cămăşi albe şi **5** cămăşi de alte culori. Câte cămăşi trebuie să scoată George din acel sertar, fără să le privească, pentru a fi sigur că a scos o cămaşă albă?

19. Câți ciorapi trebuie să luăm din cele **3** perechi de ciorapi diferite, aflate într-o pungă, pentru a fi siguri că am luat o pereche?

20. La un aprozar s-au adus **25** lăzi cu mere de trei calități. În fiecare ladă sunt numai mere de aceeaşi calitate. Arătați că sunt cel puțin **9** lăzi în care să fie mere de aceeaşi calitate.

21. Este posibil ca din cei **25** de elevi ai clasei noastre să fie cel puțin **3** elevi care îşi serbează ziua de naştere în aceeaşi lună dintr-un an?

22. În clasele a **IV**-a **A** şi a **IV**-a **B** sunt în total **53** elevi. Să se arate că cel puțin **2** dintre aceşti elevi au ziua de naştere în aceeaşi săptămână.

23. În şcoala noastră sunt **30** de clase cu un total de **815** elevi.
Arătați că există cel puțin o clasă cu cel puțin **28** de elevi.

24. La un concurs de matematică **14** elevi au reprezentat şcoala noastră.

Dintre ei, **11** elevi au rezolvat prima problemă, **10** elevi au rezolvat problema a doua, iar **9** au rezolvat problema a treia. Să se arate că cel puțin un elev al şcolii noastre a rezolvat toate cele **3** probleme ale concursului.

25. Să se arate că dintre **3** numere naturale consecutive, se pot găsi două a căror diferență să se împartă exact la **2**.

26. Într-o încăpere se află **7** persoane. Fiecare dă mâna cu toți ceilalți. Câte strângeri de mână au loc? Generalizați!

27. La o întâlnire prietenească a participat un număr de persoane, fiecare salutându-se cu toți prin strângeri de mână.

Ştiind că au avut loc **105** strângeri de mână, aflați câte persoane au participat la acea întâlnire.

28. În "World Cup' **94**" cele **24** de echipe participante au fost organizate în **6** grupe. Câte meciuri au avut loc în fiecare grupă? Dar în toate cele **6** grupe?

29. În campionatul de fotbal, divizia A, joacă **18** echipe. Câte meciuri se joacă într-un campionat tur-retur?

30. **6** prieteni au hotărat să facă schimb de fotografii aşa încât fiecare să primească fotografiile tuturor celorlalți. Câte fotografii au fost necesare? Generalizați!

31. Arătați că oricare ar fi numărul elevilor din enunțul problemei anterioare, numărul total de poze este par.

32. La sfârşitul anului şcolar, fiecare dintre elevii unei clase a primit câte o fotografie de la fiecare dintre colegii săi. În total au fost schimbate **380** de fotografii. Câți elevi erau în acea clasă?

33. O familie compusă din **3** persoane se aşază la masă, căutând, de fiecare dată, să existe cel puțin o schimbare de locuri față de modul de aşezare de la mesele precedente. Câte asemenea schimbări pot avea loc? Dar dacă ar fi **5** persoane?

34. Fie cifrele **3**, **4**, **5** şi **6**. Câte numere distincte de **4** cifre se pot forma cu ele?

35. Câte cifre diferite de zero am combinat dacă am obținut numărul maxim de **6** numere distincte scrise cu numărul maxim de cifre? Dar dacă am obținut **720** astfel de numere?

36. Care sunt cifrele distincte de zero pe care le-am combinat dacă am obținut numărul maxim de **5 040** numere distincte, toate scrise cu numărul maxim de cifre?

37. Câte numere de **3** cifre distincte se pot scrie cu **0**, **8** şi **9**?

38. Câte numere de forma $\overline{ab3d}$ sunt?

39. Câte pagini are o carte, dacă la numerotarea lor s-au folosit **3 517** cifre?

40. Câte cifre sunt necesare pentru a numerota paginile unei cărți care are **1 056** pagini?

41. S-au cumpărat truse de creioane şi pixuri, plătindu-se în total **9 176** lei. Ştiind că o trusă a costat **680** lei, iar un pix **1 784** lei, aflați câte truse şi câte pixuri au fost cumpărate.

42. Cum puteți schimba o bancnotă de **1 000** lei în bancnote de **200** lei, monede de **50** lei şi monede de **20** lei, având în total **23** asemenea semne băneşti?

43. **26** monede de **3** lei, **5** lei şi **10** lei valorează **109** lei. Câte monede de fiecare fel sunt?

44. În trei puşculițe se află o sumă de **900** lei. Suma din prima puşculiță este compusă din atâtea monede de **100** lei de câte ori în puşculița a doua sunt monede de **20** lei. Dacă am transforma banii din prima puşculiță în monede de **5** lei, am obține tot atâtea monede câte sunt de **3** lei în a treia puşculiță. Ce sumă se află în fiecare puşculiță?

45. Bunica avea într-un coş de **2** ori mai multe mere decât nuci. A dat nepoților câte **2** mere şi **7** nuci, rămânâdu-i în coş **42** mere şi **3** nuci. La câți nepoți a împărțit bunica mere şi nuci?

46. (d) Alex, Bogdan şi Cristian se întrec în rezolvarea problemelor. Pun într-un săculeț, pe rând, câte **3** probleme, una dificilă, una medie şi una uşoară, fiecare problemă fiind cotată (notată) cu un număr de puncte, în funcție de gradul ei de dificultate. În fiecare joc, fiecare trage câte o problemă dintre cele trei şi o rezolvă. După un număr de jocuri, Alex a primit **126** puncte, iar Bogdan şi Cristian au primit împreună **17** puncte. Câte jocuri s-au realizat şi cu câte puncte a fost cotat fiecare fel de problemă?

47. Aveți la dispoziție un vas de **4** litri şi un vas de **9** litri. Cum puteți măsura de la robinet **6** litri de apă cu cele două vase?

48. Un cioban vrea să împartă în două părți egale laptele dintr-un bidon plin, de **8** l, având la dispoziție un bidon de **5** l şi unul de **3** l. Cum procedează?

49. Asemănătoare cu problema antrerioară, cerința fiind să separe numai **1** l lapte.

50. Cum puteți împărți cei **10** l de apă dintr-o canistră cu o asemenea capacitate (volum) în două părți egale, având la dispoziție alte două vase de **3** l şi de **7** l?

51. Aveți la dispoziție un vas de **10** litri şi un altul de **6** litri. Cum puteți măsura de la robinet **8** litri de apă?

52. Aveți **7** kg de făină. Separați din această cantitate **3** kg de făină, folosind o singură dată o balanță cu talere (nu un cântar) şi o greutate de **1** kg.

53. Este posibil ca, folosind o balanță, numai de **2** ori şi o masă (piatră) marcată de **100** g, să se separe **675** g din **3** kg de ipsos?

54. **11** elevi din clasa a IV-a treceau pe lângă un cântar cu basculă. Dan s-a repezit să se cântărească, dar a rămas dezamăgit când a aflat că la acel cântar acul indicator nu se mişcă decât la corpuri cu masa mai mare de **200** kg. Cum a procedat Dan, folosind cântarul, ca să afle câte kg are?

55. Cum puteți separa **2** kg de zahăr dintr-o cantitate de **9** kg, având la dispoziție numai o balanță, o greutate marcată de **250** grame şi realizând cel mult trei cântăriri?

56. Aveți **9** monede, dintre care una este falsă, adică este făcută dintr-un material mai uşor. Identificați această monedă, folosind o balanță de cel mult două ori.

57. Din **26** mingi de tenis, una este mai grea. Cum o identificați având la dispoziție o balanță pe care o puteți folosi de cel mult trei ori?

58. Trei băieți aveau mere: primul avea **5** mere, al doilea **4**, iar al treilea **3**. Ei au mâncat aceste mere împreună cu un prieten care le-a dat în schimb trei nuci. Cei trei au împărțit nucile potrivit cu numărul merelor pe care i le-au dat prietenului. Câte nuci a luat fiecare băiat?

59. Doi oameni călătoreau împreună. Unul avea **2** pâini, iar altul **3** pâini. Pe drum au întâlnit un al treilea călător flămând. După ce toți trei s-au ospătat împreună în mod egal, al treilea călător le-a dat celorlalți doi **5** lei şi a plecat. Cum şi-au împărțit primii doi această sumă?

60. Trei frați doreau să-şi împartă **41** de nuci, astfel încât primul să ia o jumătate, al doilea a treia parte, iar al treilea a şaptea parte din total, dar nu reuşeau. Un prieten de-al lor, care mai avea o nucă, a reuşit să le facă această împărțire, iar la urmă şi-a mâncat nuca sa. Cum a procedat?

61. Oana vrea să împartă cele **10** mere pe care le are, cu cei doi frați ai săi, astfel încât fiecare baiat să primească câte un sfert din numărul total, iar ei să îi rămână a treia parte din acelaşi număr. Câte mere a mai avut Veronica, sora lor, pe care le-a luat în calcul la împărțirea efectuată, astfel încât fiecare a primit un număr întreg de mere, potrivit dorinței Oanei, iar la sfârşit ea şi-a luat merele sale?

62. Pentru colecția de cereale a clasei noastre, Alex a adus o plantă numită porumb. În vederea procurării cartonului pe care o va fixa pentru păstrare, el a măsurat planta şi a observat că spicul va ocupa **27** cm din lungimea cartonului, rădăcina cât spicul şi un sfert din rădăcină, iar tulpina cât spicul, rădăcina şi o jumătate din tulpină. Puteți stabili lungimea minimă a cartonului necesar?

63. În sala de spectacole a şcolii noastre, primul rând are **9** locuri, iar fiecare dintre celelalte rânduri are cu **2** locuri mai mult decât precedentul. Dacă s-ar mai adăuga încă un astfel de rând în spatele sălii, în total ar fi **128** de locuri. Câte rânduri are sala?

64. Împărțiți în **3** grupe, în aşa fel încât în fiecare grupă să fie acelaşi număr de borcane şi aceeaşi canttate, fără a trece lichidul dintr-un borcan în altul, cele:

a) **12** borcane de aceeaşi capacitate (volum), dacă sunt **4** pline, **4** umplute pe jumătate şi **4** goale;

b) **21** de borcane de aceeaşi capacitate (volum), dacă sunt **7** pline, **7** umplute pe jumătate şi **7** goale.

65. Într-un joc "de-a isteții", Dan, conducătorul jocului, a arătat celor trei concurenți, Andreea, Vlad şi Sandu, **3** fesuri roşii şi **2** fesuri albe. După aceea i-a legat la ochi, a pus fiecăruia pe cap câte un fes roşu, iar pe celelalte albe le-a ascuns. După ce au fost dezlegați la ochi şi, fiind întrebați despre culoarea fesului pe care îl are fiecare, cei doi băieți, Sandu şi Vlad, nu au putut răspunde. Deşi stăteau față în față, Andreea a spus că are fes roşu. Cum a gândit?

66. Într-o lună oarecare de **30** de zile dintr-un an, trei zile de sâmbătă sunt datate în calendar cu **3** numere impare. Ce zi a săptămânii a fost pe **26** ale lunii respective?

67. Un om a cumpărat **30** de păsări cu **30** de monede; pentru **5** potârnichi a plătit **3** monede, pentru un porumbel **2** monede, iar pentru fiecare pereche de vrăbii câte o monedă. Câte păsări de fiecare fel a cumpărat acel om?

68. Trei copii au cumpărat câte o cantitate de mere mai mică de **10** kg, de două calități: de **320** lei/kg şi de **400** lei/kg. În drum spre casă, îşi dau seama că fiecare a cheltuit atâția bani ca şi când ar fi cumpărat aceeaşi cantitate de mere numai cu **340** lei/kg. Câte kg de mere din fiecare fel a cumpărat fiecare dintre cei trei copii?

69. La marginea unui lac se află un număr de rațe: unele stau într-un picior, unele în două picioare, iar altele stau jos, numărându-se astfel **21** de picioare. Ştiind că numărul rațelor care stau într-un picior este cu **3** mai mare decât al celor care stau jos, dar cu **3** mai mic decât numărul rațelor ce stau în două picioare, aflați câte rațe erau pe malul lacului.

70. Mama avea **27** de ani când i s-a născut fiica şi **30** ani când i s-a născut fiul. Câți ani are acum fiecare dintre ei, dacă peste **2** ani toți împreună vor avea **60** ani?

71. O fată afirmă că are de **5** ori mai mulți frați decât surori. Un frate al fetei afirmă că are de **2** ori mai puține surori decât frați. Câți copii sunt în acea familie?

72. În fața unui bloc se joacă **10** copii. Câte fete şi câți băieți sunt, dacă fiecare fată are **2** frați şi numai **2** fete sunt surori?

73. Din numărul de ani pe care i-a trăit, un om a copilărit $\frac{1}{13}$ şi încă **2** ani, perioada şcolarizării a durat $\frac{1}{7}$ din anii rămaşi şi încă **6** ani. A lucrat la o societate comercială $\frac{2}{9}$ din numărul anilor ce îi mai rămăseseră şi încă **14** ani, iar ca cercetător într-un institut ştiințific $\frac{1}{4}$ din restul anilor de viață şi încă **3** ani. Beneficiază de pensie cu **15** ani mai mult decât $\frac{1}{6}$ din numărul anilor rămaşi până la sfârşitul vieții. Câți ani a trăit acel om şi câți ani reprezintă fiecare perioadă a vieții?

74. Un pescar, mare glumeț,
Vru s-arate că-i isteț,
Cifrele le răsucea
Şi pe loc el prezicea
Câți peşti prinzi tu, frățioare,
Dacă nu ai nadă mare:
Şase fără cap ar fi,
La nouă coad-ar lipsi,
Iar opt ar fi pe jumătate.
Spune, câți ar fi, măi frate!

75. Dan cu **5** lei mai mult are
Decât fratele cel mare.
Dacă fratele i-ar da
Un leu, atunci Dan ar avea
O sumă cu... mai mare.
Socotiți şi completați,
Puncte goale nu lăsați!

76. Aflându-mă la ai mei bunici,
Am vrut să mănânc nişte nuci,
Dar pe nucul din grădină
A bătut multă grindină.
De aceea nuci nu sunt
Nici pe crengi, nici pe pământ.
C-un băț crengile lovesc
Şi pe jos eu nuci găsesc.
Spune tu, dac-ai aflat,
Un miracol s-a-ntâmplat?

77. Un stol de porumbei
se-ntorcea spre casă
Şi-o parte dintre ei
pe-acoperiş se-aşezasă.
Cealaltă parte găsi mai cu cale
Să-şi caute odihna în copacul cel mare.
Dar prea-i mare înghesuială
Şi au căzut la învoială:
Şapte plus cinci de pe casă
Au plecat pe rând la masă.
Ajută-mă să dezleg,
Căci tu ştii, numai să vrei:
Câți au fost la început,
Dacă acum sunt porumbei,
Pe casă sau în copac,
Cât un sfert din stolu-ntreg.
(În loc de "sau" de-aş pune "şi",
Ştii ce calcul ar ieşi?)

78. (d) Când Anton era tot atât de tânăr ca Ion,
Avea tot atâția ani bătrânul Miron
Câți ani au acum Ion împreună cu Anton.
Câți ani avea Anton
Când bătrânul Miron
Era de vârsta ce-o are acum Anton
(De nu ai aflat nimic,
la exemplu numeric!)

79. (d) În şcoala noastră sunt clase
Unele chiar numeroase.
Deşi avem numai ciclul primar,
Un număr de clase, a fost necesar,
Să aibă elevi câte treizeci şi cinci,
Cu trei mai puține decât cele de-aici
Au câte treizeci şi doi de şcolari,
Iar altele, e drept, mai rar,
Au chiar câte treizeci de şcolari.
În total, în **15** grupe,
Sunt şcolari exact cinci sute.
Câte clase de fiecare fel
Sunt în şcoală, Viorel?

80. Croitoru, Zidaru şi Lăcătuşu sunt numele de familie a trei muncitori, dar Croitoru nu este de profesie croitor, Zidaru nu este zidar, iar Lăcătuşu nu este nici lăcătuş, nici zidar. Arătați care muncitor este de profesie croitor, care este zidar şi care este lăcătuş.

81. Dumitru, Vasile şi Marin sunt prenumele a trei elevi. Numele lor de familie sunt tot Dumitru, Vasile şi Marin, dar astfel încât nici unul dintre ei nu are numele la fel ca prenumele. Dacă pe Vasile nu îl cheamă Marin, să se afle numele şi prenumele fiecaruia dintre cei trei elevi.

82. Pentru cumpărarea unui obiect, patru elevi au contribuit cu sume de bani diferite. Aflați suma dată de fiecare, dacă toate propozițiile sunt adevărate:

p_1: Primul a dat **2 600** lei sau **2 300** lei sau **2 100** lei;
p_2: Al doilea a dat **1 210** lei sau **2 100** lei;
p_3: Al treilea nu a dat **2 300** lei;
p_4: Al patrulea a dat **1 210** lei.

83. Până la anunțarea clasamentului oficial al unui concurs de atletism, într-un grup de cinci tineri părerile erau foarte controversate, fiecare afirmând:

primul tânăr: Bogdan a sosit primul, iar Alex al doilea;
al doilea tânăr: Emil a sosit al treilea, iar Dany al patrulea;
al treilea tânăr: Dany a fost al treilea, iar Cristi al patrulea;
al patrulea tânăr: primul a fost Dany, iar ultimul, Emil;
al cincilea tânăr: primul a fost Alex, iar Bogdan, ultimul.

Ştiind că fiecare dintre cei cinci tineri a enunțat corect numai locul ocupat de un singur concurent, dar a apreciat greşit locul ocupat de celălalt concurent, arătați ordinea sosirii celor cinci atleți: Alex, Bogdan, Cristi, Dany şi Emil.

84. Stabiliți ordinea a cinci case de culori diferite care sunt dispuse în şir, dacă:

1) prima casă este galbenă;

2) casa albă nu este vecină cu casa din mijloc, dar este vecină cu casa neagră;

3) casa roşie nu este vecină cu casa verde, dar este vecină cu casa neagră.

85. Cinci case A, B, C, D şi E, sunt dispuse în şir, la distanţe egale una de alta. Arătaţi care este ordinea acestora, dacă:

1) în mijloc nu este casa C;

2) atunci când privim casa A, în stânga avem casa D;

3) distanţa de la casa C la casa E este egală cu distanţa de la casa C la casa D.

86. Ana spune că Barbu minte, iar acesta spune că Dan minte. Dan spune că Ana sau Barbu minte. Ştiţi cine spune adevărul şi cine minte?

87. Andrei întreabă pe Barbu:

– Pe cine reprezintă această fotografie?

Barbu răspunde:

– Tatăl celui din fotografie este unicul fiu al celui cu care stai acum de vorbă.

Cine era în fotografie?

88. "În acest tablou nu este figura fratelui meu, nu este nici figura surorii mele şi totuşi este figura unuia dintre copiii părinţilor mei."

A cui este figura din tablou?

89. Două vecine vând în piaţă câte **210** prune pe zi. Una vinde **7** prune la **50** lei, iar cealaltă, care are prune mai mari, le vinde **3** la **50** lei.

Într-o zi, prima femeie, având altă treabă, a rugat-o pe a doua să-i vândă şi ei prunele la preţul din ziua precedentă. Vecina s-a învoit, gândindu-se că nu-i va fi greu: va face grămezi de câte **10** prune, adică **3** de la ea şi **7** de la vecina, şi le va vinde cu **100** lei grămada, căci **50 + 50 = 100** lei; deci o prună la **10** lei. Zis şi făcut. După vânzare, vrând să-i dea vecinei partea cerută din bani, constată că ea pierde foarte mult. Vecina, înţelegătoare, împarte paguba pe din două. Care a fost cauza pagubei şi ce sumă a încasat până la urmă fiecare femeie pentru vânzarea din acea zi?

90. Când ne deplasăm mai repede? Mergând distanţa ***d*** cu bicicleta sau parcurgând jumătate din acea distanţă cu o maşină care se deplasează de **4** ori mai repede decât bicicleta, iar a doua jumătate pe jos, mergând de **2** ori mai încet decât cu bicicleta? Particularizaţi!

91. Dacă din suma a **13** numere naturale distincte nenule scădem **1**, obţinem suma altor **13** numere naturale distincte nenule ce au media aritmetică **7**. Aflaţi, de fiecare dată, care sunt acele numere.

92. Scrieţi şirul de greutăţi (piese) pentru cântar, cu care să se poată măsura (cântări) orice masă (greutate) de până la **1 023** g. Se cere ca şirul să conţină cât mai puţine greutăţi.

93. Descoperiţi regula care:

a) s-a aplicat coloanelor pentru a obţine rezultatele din ultima linie şi apoi continuaţi:

1	**2**	**5**	**14**	**3**
18	**6**	**1**	**3**	**7**
19	**10**	**26**	**199**	**?**

b) a stat la baza compunerii şirului de numere:

7 12 10 15 13 18 16;

c) s-a aplicat numerelor din primul şir, de fiecare dată, pentru a obţine numerele din al doilea şir:

1)	**3**	**1**	**5**	**7**	2)	**3**	**2**	**38**	**11**
	13	**5**	**29**	**53**		**1**	**0**	**6**	**3.**

94. Pe baza relaţiei dintre cifra unităţilor şi cifra sutelor din diferenţa unui număr de trei cifre distincte şi răsturnatul său, scrieţi toate aceste diferenţe.

95. *Curiozităţi aritmetice*

a) Numărul **100** se poate obţine în cel puţin **9** moduri pe baza operaţiilor aritmetice învăţate şi a cifrelor de la **1** la **9**, fără a le schimba ordinea. Cum?

b) Ca la punctul a), obţineţi numărul **1**, la nevoie folosind şi paranteze, când aveţi:

1) primele **3** cifre; 2) primele **4** cifre; 3) primele **5** cifre; 4) primele **6** cifre; 5) primele **7** cifre; 6) primele **8** cifre; 7) primele **9** cifre.

c) Verificaţi egalităţile:

$2\times2=2+2$; $\qquad 1\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$;

$2\times\frac{1}{2}=2-1$; $\qquad \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$;

$11\times1{,}1=11+1{,}1$; $\qquad \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

d) Găsiţi pătratele (***a•a***) unor numere naturale consecutive a căror sumă să fie **365** dacă:

1) sunt două numere; 2) sunt trei numere.

e) *Piramide numerice*

(Culese de elevii P.B., P.C., H.C., C.V., după I.I. Perelman)

Continuaţi piramidele următoare:

e) 1)

$1\times9+2=11$

$12\times9+3=111$

$123\times9+4=1111$

$1234\times9+5=11111$ ş.a.m.d.până la

$12345678\times9+9=111111111$

e) 2)

$1\times8+1=9$

$12\times8+2=98$

$123\times8+3=987$ ş.a.m.d.până la

$123456789\times8+9=987654321$

e) 3)

$9\times9+7=88$

$98\times9+6=888$

$987\times9+5=8888$ ş.a.m.d.până la

$98765432\times9+0=888888888$

f) 1) Continuați, apoi verificați:

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$ ş.a.m.d. până la
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

f) 2) Verificați: $111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$

f) 3) Explicați, apoi continuați oral:

$573 \times 999 = (573-1) \times 1\,000 + \overline{(9-5)(9-7)(9-2)}$

$947 \times 999 =$

$999 \times 981 =$

$509 \times 999 =$

f) 4) Explicați, apoi continuați oral: $95 \times 95 = \overline{\cdot\cdot 25} = 9025$

$9 \times 10 = 90$ sau

$9 \times 9 + 9 = 90$

$15 \times 15 =$	$35 \times 35 =$	$55 \times 55 =$	$75 \times 75 =$	$105 \times 105 =$
$25 \times 25 =$	$45 \times 45 =$	$65 \times 65 =$	$85 \times 85 =$	$905 \times 905 =$

f) 5) Calculați oral produsul **96** × **98**, în cel puțin **5** moduri.

96. Completați pătratele cu cifre de la **1** la **9**, dacă:
a) folosiți toate cifrele (o singură dată), iar suma magică este **15**;
b) folosiți numerele pare, iar suma magică este **20**.

97. Reconstituiți împărțirea:

```
*******:** =** 8**
***
===**
   **
  =***
    ***
    ==1
```

98. Reconstituiți înmulțirea:

```
   ABC ×
   BAC
  ****
  **A
 ***B
 ******
```

99. *Observații*: Alături de modurile prin care efectuăm astăzi proba (verificarea) operațiilor, în trecut se foloseau şi alte metode, ca de exemplu “metoda lui **9**”, “metoda lui **7**”, “metoda lui **11**” etc. (A se vedea I. I. Perelman în *Aritmetica distractivă*, 1 963)

Calculați, apoi verificați (efectuați proba) prin aplicarea “regulii lui **9**”:

a) $23\,567 + 1\,689 + 115\,406 =$ c) $9\,084 \times 308 =$

b) $176\,391 - 85\,297 =$ d) $34\,462 : 807 =$

100. Calculați oral, pe baza împărțirii şi a înmulțirii cu **2**:

a) $8 \cdot 134 =$ c) $16 \cdot 1234 =$ e) $17 \times 13 =$

b) $64 \cdot 72 =$ d) $9 \times 23 =$ f) $29 \times 21 =$

101. După ce calculați exercițiile de mai jos, enunțați o regulă de calcul mintal rapid pentru asemenea operații:

a) $984 \times 1001 =$ b) $73 \times 10101 =$

$1001 \times 736 =$ $10101 \times 87 =$

$1001 \times 903 =$ $10101 \times 93 =$

102. Pe baza regulii aplicate la exercițiul anterior, efectuați:

a) $\overline{abcabc} : 1001 =$ b) $\overline{ababab} : 10101 =$

$\overline{xyzxyz} : 1001 =$ $\overline{xyxyxy} : 10101 =$

103. La ora de educație fizică, elevii clasei noastre erau împărțiți în **10** grupe egale ca număr. Pentru organizarea unui joc, ei au fost redispuşi în **5** rânduri, în fiecare rând, începând cu primul şi terminând cu al cincilea, numărul elevilor fiind reprezentat de numere naturale consecutive. Când s-a trecut la lucrul pe ateliere, la primul atelier a trecut rândul cu cel mai mare număr impar de elevi, la al doilea, rândurile care aveau la un loc cel mai mare număr par de elevi, iar la al treilea, restul, adică rândul cu **5** elevi.

Puteți afla câți elevi sunt în clasa noastră?

104. a) Numiți **7** zile la rând, fără să spuneți data sau numele lor!

b) În ce zi a săptămânii ne aflăm, dacă azi putem spune: "Când alaltăieri era mâine, azi era tot atât de departe de sâmbătă, la fel cum va fi azi departe de sâmbătă atunci când poimâine va fi ieri"?

105. (d) În curtea lui moş Andrei
Sunt vaci, găini, rațe şi purcei.
Numărându-le pe toate
Găseşte **46** de capete.
Câte sunt de fiecare,
Dacă au **112** picioare,
Rațele sunt jumătate
Din găinile surate,
Însă vacile sunt, cert,
Din numărul de porci, un sfert.

CAPITOLUL I

Exerciții-problemă. Rezolvări

1. Din $d+2=12$, rezultă $d=12-2=10$.
Dacă $c+2=d$, rezultă $c+2=10$, iar $c=10-2=8$.
Dacă $b+2=c$, rezultă $b+2=8$, iar $b=8-2=6$.
Dacă $a+2=b$, rezultă $a+2=6$, iar $a=6-2=4$.
Răspuns: $a=4$; $b=6$; $c=8$; $d=10$.

2. $a=(72+13):(5\times4:5+1) \Leftrightarrow a=85:(4+1) \Leftrightarrow a=85:5=17$;
$b=5\times4:5+6+7+8+9 \Leftrightarrow b=34$; $34:17=2$. Deci $b=2a$.

3. Notând cu S suma cerută în enunț, cu s_1, suma numerelor **40** și **8**, obținem: $s_1=40+8=48$; diferența $=40-8=32$; produsul $=40\times8=320$; câtul $=40:8=5$; $S=s_1+$ diferența + produsul + câtul, adică $S=48+32+320+5 \Leftrightarrow S=405$.

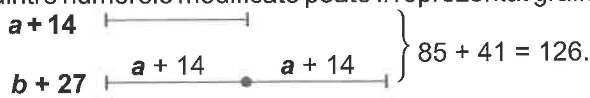
4. Rezolvarea 1
$a=(0\times1+2\times3+4\times5+6\times7+8\times9):10 \Leftrightarrow a=(0+6+20+42+72):10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=140:10 \Leftrightarrow a=14$; $b=2+2\times2+2:2 \Leftrightarrow b=2+4+1$; $ab=14\times7=98$;
$a:b=14:7=2$; câtul dintre produs și **2** este **49**, căci $98:2=49$; $49:7=7$.
Rezolvarea 2
În exercițiu: $[(ab):(a:b)]:7=[(14\times7):(14:7)]:7=98:2:7=7$.

5. $a=?$ $\quad 1+\{2[3+(4+x):5]-6\}\times7=15$.
În algebră, această egalitate se numește ecuație. În clasele primare, astfel de egalități, denumite "exerciții cu x", se rezolvă prin raționament aritmetic, ca mai jos.
Care este ultima operație efectuată cu rezultatul **15**? Ultima operație este o adunare, în care necunoscuta figurează în termenul al doilea (t_2). Deci
$1+?=15$; $t_2=15-1=14$. Exercițiul devine: $\{2[3+(4+x):5]-6\}\times7=14$.
Care este ultima operație efectuată cu rezultatul **14**? Înmulțirea cu **7**. Necunoscuta se află în primul factor, adică $?\times7=14$, iar primul factor este **2**, căci $14:7=2$. Egalitatea devine: $2[3+(4+x):5]-6=2$.
Care este ultima operație efectuată cu rezultatul **2**? Descăzutul care conține necunoscuta este **8**, căci $6+2=8$.
Egalitatea devine: $2[3+(4+x):5]=8$.
În modul acesta se continuă căutările până la determinarea lui x, adică:
$3+(4+x):5=8:2 \Leftrightarrow (4+x):5=4-3 \Leftrightarrow (4+x)=5\times1 \Leftrightarrow x=1$;
dacă $a=3x$, rezultă $a=3$.
Observație:
În alte exerciții, înainte de a parcurge acest "drum invers", e necesară aducerea egalității la forma cea mai simplă.
$b=?$ $\quad 213-(230-5y):7=183 \Leftrightarrow (230-5y):7=213-183 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 230-5y=30\times7 \Leftrightarrow 5y=230-210 \Leftrightarrow y=20:5=4$;
$b=4:2=2$; $c=?$ $(99+z)-100=175 \Leftrightarrow 99+z=175+100 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z=275-99=176$; $c=176:4=44$;

$10c-200b-6a+4\times0=10\times44-200\times2-6\times3+0=22$. *Răspuns*: **22**.

6. 1) Rezolvarea 1

Se observă că suma inițială se măreşte cu **41**, căci **$14+27=41$**. Raportul dintre numerele modificate poate fi reprezentat grafic astfel:



Suma **126** reprezintă **3** părți, fiecare parte fiind egală cu **$a+14$**.
Deci: **$a+14=?$; $126:3=42$; $a=?$**; **$42-14=28$**; **$b=?$ $85-28=57$** sau **$2\times42-27=57$.**

Rezolvarea 2

Dacă **$(b+27):(a+14)=2$**, iar **$a+b=85$**, rezultă **$b=85-a$** şi **$b+27=$** **$=2(a+14)$**. Prin înlocuirea lui ***b*** în ultima relație, se obține:
$85-a+27=2(a+14)\Leftrightarrow 112-a=2a+28$. Adunând ***a*** la fiecare membru al egalității, rezultă: **$112=3a-28\Leftrightarrow 3a=112-28\Leftrightarrow a=84:3=28$; $b=57$**.

Rezolvarea 3

Dacă **$(b+27):(a+14)=2$**, rezultă **$b+27=2(a+14)$**, adică **$b+27=$** **$=2a+28$**. Prin scăderea lui **27** din fiecare membru al egalității, se obține: **$b=2a+1$**. De aici, avem mai multe *variante de rezolvare*:

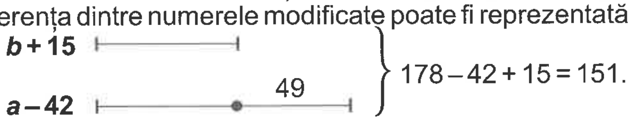
a) *Grafic*

Din desen rezultă că **$3a=85-1\Leftrightarrow a=28$; $b=57$**;

b) Înlocuind pe ***b*** în sumă, se obține: **$a+2a+1=85\Leftrightarrow 3a=84\Leftrightarrow a=28$; $b=57$**.

2) Rezolvarea 1

Se observă că suma inițială se micşorează cu **42** şi se măreşte cu **15**. Diferența dintre numerele modificate poate fi reprezentată astfel:



Care este suma a două părți, fiecare egală cu **$b+15$**? **$151-49=102$; $b+15=?$ $102:2=51$; $b=?$ $51-15=36$; $a=?$ $178-36=142$**.

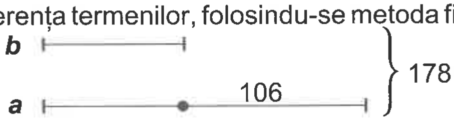
Rezolvarea 2

Dacă **$a+b=178$**, iar **$a-42=b+15+49$**, rezultă **$a=178-b$** şi **$178-b-42=b+15+49\Leftrightarrow 136-b=b+64$**. Adunând ***b*** la fiecare membru al egalității se obține: **$136=2b+64\Leftrightarrow 2b=72\Leftrightarrow b=36$; $a=178-36=142$.**

Rezolvarea 3

Dacă **$a-42=b+15+49$**, rezultă **$a=b+106$**. Înlocuind pe ***a*** în sumă, se obține: **$b+106+b=178\Leftrightarrow 2b=72\Leftrightarrow b=36$; $a=142$.**

Într-o altă variantă de rezolvare, se poate reține că se cunosc suma şi diferența termenilor, folosindu-se metoda figurativă:



Din desen, rezultă că:
$2b=178-106\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b=72:2=36$; $a=142$.

3) *Observație*: Scrierea $\overline{ab}$ este diferită de scrierea ab, căci $\overline{ab} = 10a + b$, iar $ab = a \times b$. Egalitatea din enunț se mai poate scrie:
$(145 - \overline{ab}) \times (1\,000 - 999) = 59(18 - 16) \Leftrightarrow (145 - \overline{ab}) \times 1 = 118 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{ab} = 145 - 118 = 27$.
4) Egalitatea devine: $(136 - ab) : 43 = 3 \Leftrightarrow 136 - ab = 129 \Leftrightarrow ab = 7$;
dacă $a = 1$, atunci $b = 7$; dacă $a = 7$, atunci $b = 1$.

7. $a(b + c) = ab + ac = 32 + 724 = 756$.
$x(y - u) = xy - ux = 414 - 99 = 315$.

8. Notând numerele cu x, y, z şi, respectiv, t se poate scrie:
$x(y + z + t) = xy + xz + xt \Leftrightarrow x(y + z + t) = 40 + 45 + 60 = 145$.

9. La o împărțire corect efectuată, restul este mai mic decât împărțitorul. În enunț, împărțirile au fost scrise pe baza definiției.
a) Dacă $r = 2$, împărțitorul este **6**, nu **1**, căci $2 > 1$;
b) dacă $r = 2$, împărțitorul este **3**, nu **2**, căci $2 = 2$;
c) dacă $r = 0$, împărțitorul poate fi **3** sau **25**;
d) dacă $r = 3$, nici **2**, nici **3** nu pot fi împărțitor, împărțirea este greşit efectuată.

10. a) Se observă că la această adunare de *numere consecutive*, asociind câte **2** termeni ce au suma **10**, se obține de **4** ori câte **10** şi încă **5**:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 4 \times 10 + 5 = 45$. Pe scurt:

$$(1 + 9) + (2 + 8) + \ldots + (4 + 6) + 5 = \underbrace{10 + 10 + \ldots + 10}_{4 \text{ termeni}} + 5 = 4 \times 10 + 5 = 45$$

Acelaşi rezultat se obține şi dacă la numerele date adunăm şirul scris în ordine inversă, apoi rezultatul se împarte la **2**, adică:

$$\left.\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ S = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array}\right\} \text{Adunăm, membru cu membru, egalitățile:}$$
$$2S = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$$

Deci, $2S = 9 \times 10$, adică **10** se repetă de atâtea ori câte numere sunt în şirul de la **1** la **9**. Atunci $S = 9 \times 10 : 2 = 45$.
Rezultă *regula de calcul rapid*:
La adunarea mai multor numere consecutive, se procedează astfel:
1) se adună primul cu ultimul număr din şir;
2) rezultatul obținut se înmulțeşte cu numărul care arată câte numere consecutive sunt în acel şir;
3) noul rezultat se împarte la **2**. În cazul dat: $(1 + 9) \times 9 : 2 = 45$.
În general: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = (n + 1) \times n : 2$.
b) $(1 + 1989) \times 1\,989 = 1\,979\,055$. Se poate gândi şi astfel: Câte numere sunt în şir? **1 989**. Care este suma dintre primul şi ultimul număr din şir?
1 + 1 989 = 1 990. Câte perechi cu suma **1 990** se pot obține din cele **1 989** numere? **1989 : 2 = 994**, rest **1**, deci un număr fără pereche. Care este numărul fără pereche? **1 990 : 2 = 995**. Care este suma celor **1 989** numere consecutive? **994 × 1 990 + 995=1979055**.
Pe scurt, acest raționament se redă astfel:

$$(1 + 1\,989) + (2 + 1\,988) + \ldots + (994 + 996) + 995 =$$
$$= \underbrace{1\,990 + 1990 + \ldots + 1\,990}_{994 \text{ termeni}} + 995 = 994 \times 1\,990 + 995 = 1979055$$

c) $(0+100)\times 101:2=5\,050$ sau

$$(0+100)+(1+99)+...+(49+51)+50=\underbrace{100+100+...+100}_{\text{50 de termeni}}+50=$$
$$=50\times 100+50=5\,050$$

d) Pentru a aplica formula de calcul rapid, fiind numere *consecutive pare*, scoatem în factor pe **2**: **2 + 4 + 6 + ... + 2 000 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 1 000) = = 2(1 + 1 000)×1 000 : 2 = 1 001 000**.

În a doua variantă:

$$(2+2\,000)+(4+1\,998)+...+(1\,000+1\,002)=$$
$$=\underbrace{2\,002+2\,002+...+2\,002}_{\text{500 de termeni}}=500\times 2\,002=1\,001\,000.$$

e) Fiind numere *impare consecutive*, nu se poate scoate factor comun. Într-o *primă variantă*, calculăm suma întregului şir de la **1** la **101** inclusiv, din care scădem suma numerelor pare, calculată ca la punctul anterior. Suma numerelor consecutive de la **1** la **101** este **5 151**, deoarece **(1 + 101)×101 : 2 = 5 151**. Suma numerelor pare din acest şir este **2 550**, pentru că **2(1 + 2 + 3+ ... + 50) = 2 550**. Suma numerelor impare de la **1** la **101** inclusiv este **2 601**, căci **5 151 – 2 550 = 2 601**.

A doua variantă (Pentru explicații în detaliu, a se vedea rezolvarea de la **11**.):

$$1+3+5+7+...+101=(1+101)+(3+99)+...+(49+53)+51=$$
$$=\underbrace{102+102+102+...+102}_{\text{25 de termeni}}+51=2\,601.$$

f) $(100\times 99-99\times 98)+(98\times 97-97\times 96)+...+(4\times 3-3\times 2)+2\times 1=$

$$=99(100-98)+97(98-96)+...+3(4-2)+2\times 1=$$
$$=99\times 2+97\times 2+...+3\times 2+2\times 1=29(99+97+95+...+3+1)=$$
$$=2[(99+1)+(97+3)+...+(49+51)]=2(\underbrace{100+100+...+100}_{\text{25 de termeni}})=$$
$$=2\times 100\times 25=5\,000$$

11. Suma numerelor impare = **1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99 = ?**. De la **99** la **1** sunt **99** de numere consecutive.

Câte numere consecutive *impare* sunt în acest şir? Pentru a fi cuprins şi ultimul număr din şir, care este impar, se împarte consecutivul lui **99** la **2**, adică **100 : 2 = 50**.

Care este suma dintre primul şi ultimul număr impar? **1 + 99 = 100**. Câte perechi cu suma **100** formăm din cele **50** de numere? **50 : 2 = 25**. Care este suma şirului de numere impare? **25×100 = 2 500**.

Pe scurt:

$$\underbrace{(1+99)+(3+97)+...+(49+51)}_{\text{25 de termeni}}=25\times 100=2\,500$$

Suma numerelor pare = **2 + 4 + 6 + 8 + ... + 96 + 98 = ?**

Câte numere consecutive sunt de la **2** la **98** inclusiv? **98 – 1** (numărul **1** lipseşte) = **97**. Câte numere consecutive *pare* sunt? **98** este al **97**-lea număr din şir. Ca să-l cuprindem şi pe el, împărțim la **2** numărul următor, adică **98 : 2 = 49**.

Care este suma dintre primul şi ultimul număr par din şir? **2 + 98 = 100**. Câte perechi cu suma **100** formăm cu cele **49** de numere? **24**, căci **49 = 24×2 + 1**, deci un număr fără pereche. Care este numărul fără pereche? **100 : 2 = 50**. Care este suma şirului de numere pare?
24×100 + 50 = 2 450.

Pe scurt:
(2 + 98) + (4 + 96) + ... + (48 + 52) + 50 = 2 450 sau prin formula:
2(1 + 2 + 3 + ... + 49) = 2[(1 + 49)×49 : 2] = 2 450.

Care este suma întregului şir dat? 2 500 + 2 450 = 4 950.

Verificarea se poate face aplicând formula, adică:

$(1 + 99)\times 99 : 2 = 4\,950$ sau

$(1 + 99) + (98 + 2) + ... + (49 + 51) + 50 =$

$= \underbrace{100 + 100 + ... + 100}_{\text{49 de termeni}} + 50 = 49\times 100 + 50 = 4\,950$

12. $x + 2x + 3x + 4x + ... + 10x = 5\times 11 \Leftrightarrow x(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 10) = 55 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(1 + 10)\times 10 : 2 = 55 \Leftrightarrow 55x = 55 \Leftrightarrow x = 1$.

13. Suma numerelor ce sunt scrise până la pagina la care este deschisă cartea poate fi scrisă astfel: $S = 1 + 2 + 3 + ... + n = 55$. Aplicând formula pentru adunarea numerelor consecutive, rezultă: $(1 + n)\times n : 2 = 55$, adică $(1 + n)\times n = 110$. Se observă că n şi $n + 1$ sunt numere consecutive al căror produs este **110**; rezultă că **110 = 11×10**, adică $n = 10$.

Răspuns: La pagina **11**.

14. Fie d deîmpărțitul, $î$ împărțitorul, c câtul, r restul, atunci $d = c\times î + r$, în care $r < î$ şi $r = c$. Dacă $î = 25$, rezultă $r < 25$ şi $c < 25$, iar $d = 25c + r \Leftrightarrow d = 25c + c \Leftrightarrow d = 26c$.

Dacă $c \in \{0, 1, 2, 3, ..., 23, 24\} \Rightarrow d \in \{26\times 0, 26\times 1, ..., 26\times 24\}$. Atunci $S = 26\times 0 + 26\times 2 + ... + 26\times 24 \Leftrightarrow S = 26\times(0 + 1 + 2 + 3 + ... + 24) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S = 26\times[(0 + 24)\times 25 : 2] = 26\times 300 = 7\,800$.

15. a) De la **1** la **30** sunt **30** de numere, dintre care **9** sunt cu o cifră, iar **21** sunt de **2** cifre, în total fiind **51** de cifre.

b) Pentru a calcula suma cifrelor acestui număr se poate apela la formula de determinare a sumei unor numere consecutive, astfel:

- cifrele care la numerele de la **1** la **30** sunt pe locul unităților au suma **135**, pentru că **1 + 2 + 3 + ... + 9 = (1 + 9)×9 : 2 = 45**, iar de la **1** la **30** această sumă se repetă de **3** ori;
- cifrele care la numerele de la **10** la **29** inclusiv sunt pe locul zecilor au suma **30**, pentru că, de la **10** la **19**, **1** se repetă de **10** ori, iar de la **20** la **29**, **2** se repetă de **10** ori, deci **10 + 10×2 = 30**; suma totală este **168**, căci **135 + 30 + 3 = 168**.

16. Pe baza relațiilor dintre termeni (factori) şi rezultat, deducem:

1) $c + 5$; c nemodificat; $c + 1$; $a + 1$; $b - 9$;
2) $c + 8$; c nemodificat; $c - 4$; a nemodificat; $b - 1$; $b - 2$;
3) $c : 18$; $c : 2$; $c\times 6$; $a\times 2$; $b : 2$; $b : 2$; $b\times 6$;
4) $c : 2$; $c : 5$; $c\times 2$; $a : 2$; $a : 2$; $b\times 2$ (Verificați, lucrând cu numere!).

17. Fie $\boldsymbol{a}$ şi $\boldsymbol{b}$ cele două numere. Se poate scrie: $\boldsymbol{ab = 36}$ şi $\boldsymbol{(a + 7)\times b = 99}$, adică $\boldsymbol{ab + 7b = 99}$. Deci $\boldsymbol{36 + 7b = 99 \Leftrightarrow b = (99 - 36) : 7 = 9}$; $\boldsymbol{9a = 36}$, iar $\boldsymbol{a = 4}$.

18. Primul număr are forma $\overline{\mathbf{1.....}}$. Al doilea număr are forma $\overline{\mathbf{.....1}}$. Cifrele din mijloc vor fi identice, însă cu locul schimbat. Din enunț reținem: $\overline{\mathbf{1.....}}\times\mathbf{3} =$ $= \overline{\mathbf{.....1}}$. Reconstituim înmulțirea. Ne oprim când am luat în calcul şi cifra inițială **1** şi nu mai avem cifră de transport.

Pe scurt:

1 4 2 8 5 7 ×
3
4 2 8 5 7 1

Răspuns: **142 857**.

19. Primul număr este de forma $\overline{\mathbf{6.....}}$. Al doilea număr are forma $\overline{\mathbf{.....6}}$. Cifrele de la mijloc sunt identice, dar cu locul schimbat.

Din enunț, reținem: $\overline{\mathbf{6.....}} : \overline{\mathbf{.....6}} = \mathbf{4}$, adică $\overline{\mathbf{.....6}} \times \mathbf{4} = \overline{\mathbf{6.....}}$.

Efectuăm înmulțirea, având grijă să scriem cifrele identice de la produs şi la primul factor:

1 5 3 8 4 6 ×
4
6 1 5 3 8 4

20. Rezolvarea este similară cu cea de la **19** : $\overline{\mathbf{9.....}} : \overline{\mathbf{.....9}} = \mathbf{4}$, adică $\overline{\mathbf{.....9}} \times \mathbf{4} = \overline{\mathbf{9.....}}$. Rezultă:

230 769 ×
4
923 076

21. Rezolvare asemănătoare cu cea de la **19**: $\overline{\mathbf{.....7}} \times \mathbf{5} = \overline{\mathbf{7.....}}$, adică

1 4 2 8 5 7 ×
5
7 1 4 2 8 5

Observație:

Dacă în enunțul problemelor **18-21** s-ar fi dat şi numărul de cifre, se putea judeca şi în alt mod.

Exemplu: La problema **21**, dacă era dat numărul de **6** cifre, se putea scrie: $\boldsymbol{x}$ = numărul dat, cu ultima cifră **7**; când se mută **7**, se scade din el **7**, devenind $\boldsymbol{x - 7}$, cu ultima cifră **0**, apoi se micşorează de **10** ori (a dispărut zero de la urmă) şi se măreşte cu **700 000**, obținându-se:

$\boldsymbol{(x - 7) : 10 + 700\,000}$, care va fi egal cu $\boldsymbol{5x}$. Atunci: $\boldsymbol{(x - 7) : 10 + 700\,000 = 5x}$.

Prin înmulțirea cu **10** a fiecărui menbru al egalității şi, apoi, prin scăderea lui $\boldsymbol{x}$, se obține: $\boldsymbol{6\,999\,993 = 49x}$, adică $\boldsymbol{x = 6\,999\,993 : 49 = 142\,857}$.

22. $\overline{\boldsymbol{aa}}\times\overline{\boldsymbol{aa}} = \mathbf{16}\times\overline{\boldsymbol{4a4}}$. Se observă că ultima cifră a produsului este **4**, pentru că $\overline{\mathbf{.....6}}\times\overline{\mathbf{.....4}} = \overline{\mathbf{.....4}}$; atunci $\boldsymbol{a\times a} = \overline{\mathbf{.....4}}$.

Care sunt numerele care înmulțite cu ele însele dau un produs terminat

în **4**? a poate fi **2** sau **8**.
Dacă $a = 2$, atunci $22 \times 22 < 16 \times 424$.
Dacă $a = 8$, atunci $88 \times 88 = 16 \times 484$, adică $7\,744 = 7\,744$.
Răspuns: $a = 8$.

23. a) Egalitatea se mai scrie: $(13x - 30) : 3 - 10 = 1225 : 7 \Leftrightarrow (13x - 30) : 3 = 175 + 10 \Leftrightarrow 13x - 30 = 185 \times 3$; $x = 45$.
b) $8x : 6 = 4x - 8 \Leftrightarrow 8x = 6(4x - 8) \Leftrightarrow 8x = 24x - 48$.
Scăzând $8x$ din fiecare membru al egalității, rezultă $0 = 16x - 48$, adică $16x = 48$, de unde $x = 3$.
c) $x + 18 = 3x : 2 \Leftrightarrow 3x = 2x + 36$.
Scăzând $2x$ din fiecare membru al egalității, se obține $x = 36$.

24. a) Folosind scrierea sistematică, avem:
$10a + b + 10b + a = 99 \Leftrightarrow 11(a + b) = 99 \Leftrightarrow a + b = 9$.
Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, pentru a fi cel mai mare număr cerut, $a = 8$ și $b = 1$.
Răspuns: $\overline{ab} = 81$.
b) $10a + b - 10b - a = 9 \Leftrightarrow 9(a - b) = 9$, de unde $a - b = 1$. Deci $a = 9$, iar $b = 8$; $\overline{ab} = 98$.

25. Rezolvarea 1
$a + 10a + b + 10a + b = 10b + a \Leftrightarrow 21a + 2b = 10b + a$. Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, $2b$ și a, se obține $20 \times a = 8b$. Împărțim fiecare membru prin **4** și obținem $5a = 2b$. Deci: $a = 2$, $b = 5$, iar $\overline{ab} = 25$.
Rezolvarea 2
Din scrierile $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$, rezultă $a \neq 0$ și $b \neq 0$; din $a + \overline{ab} + \overline{ab} = \overline{ba}$, rezultă:
1) $a + b + b > 10$, pentru că $a + 2b \neq a$, ci cu un număr care se termină în a, adică $a + b + b = \overline{1a}$ și $b + b = 10$; deci $b = 5$;
2) $a + a$ (de la zeci) $= b$ minus **1** (cifra de transport); deci $2a = 4$, iar $a = 2$; $\overline{ab} = 25$.

26. 1) $\overline{ab} = 2(a + b) \Leftrightarrow 10a + b = 2a + 2b$. Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, $2a$ și, apoi, b, se obține: $8a = b$. Dacă a și b sunt cifre, rezultă $a = 1$, $b = 8$, iar $\overline{ab} = 18$.
2) $\overline{ab} = 3(a + b) \Leftrightarrow 10a + b = 3a + 3b$. Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, $3a$ și, apoi, b, rezultă: $7a = 2b$. Dacă a și b sunt cifre, iar **7** și **2** sunt numere prime, unica soluție este: $a = 2$, $b = 7$, iar $\overline{ab} = 27$.
3) $\overline{ab} = 4(a + b) \Leftrightarrow 10a + b = 4a + 4b$. Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, $4a$ și b, rezultă: $6a = 3b$. Împărțim prin **3** și se obține: $2a = b$.
Dacă $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 4$; $a = 3$, $b = 6$; $a = 4$, $b = 8$.
Răspuns: $\overline{ab} \in \{12, 24, 36, 48\}$.
Verificări:
a) $18 = 2(1 + 8) \Leftrightarrow 18 = 2 \times 9$.
b) $27 = 3(2 + 7) \Leftrightarrow 27 = 3 \times 9$.
c) $12 = 4(1 + 2) \Leftrightarrow 12 = 4 \times 3$; $24 = 4(2 + 4) \Leftrightarrow 24 = 4 \times 6$; $36 = 4(3 + 6) \Leftrightarrow 36 = 4 \times 9$; $48 = 4(4 + 8) \Leftrightarrow 48 = 4 \times 12$.

27. Scriind sistematic numerele, obținem:
$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + c + 10c + a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c}$.

Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, $\boldsymbol{c + 11a + 10b}$, obținem $\boldsymbol{89a = b + 10c}$. Se observă că: $\boldsymbol{10c}$ este un multiplu de **10**, deci terminat în **0**; $\boldsymbol{c < 10}$, $\boldsymbol{b < 10}$, fiind cifre, iar $\boldsymbol{c \neq b}$.

Singura valoare ce convine pentru $\boldsymbol{a}$ este **1**, deoarece din două numere, unul de o cifră şi altul de două cifre - multiplu de **10**, nu se poate obține o sumă mai mare decât **99**.

Deci $\boldsymbol{a = 1}$; atunci, $\boldsymbol{89 \times 1 = b + 10c}$; rezultă $\boldsymbol{b = 9}$, $\boldsymbol{c = 8}$.

Sau: $\boldsymbol{10c = 89a - b}$, adică $\boldsymbol{10c \geq 80}$; dar $\boldsymbol{10c}$ este multiplu de **10**; rezultă $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b = 9}$, iar $\boldsymbol{c = 8}$.

Verificare: $\boldsymbol{198 = 19 + 98 + 81}$.

Răspuns: $\boldsymbol{\overline{abc} = 198}$.

28. $\boldsymbol{\overline{xx} + \overline{yx} + \overline{zx} = \overline{xy3}} \Leftrightarrow \boldsymbol{13x + 10y + 10z = 100x + 10y + 3}$. Scăzând, din fiecare membru al egalității, $\boldsymbol{13x}$ şi $\boldsymbol{10y}$, obținem: $\boldsymbol{10z = 87x + 3}$.

$\boldsymbol{10z}$ este un număr terminat în **0** şi este mai mare decât **87**.

Rezultă $\boldsymbol{z = 9, x = 1}$. Deci: $\boldsymbol{11 + \overline{y1} + 91 = \overline{1y3}} \Leftrightarrow \boldsymbol{103 + 10y = 103 + 10y}$.

Dacă $\boldsymbol{y}$, fiind cifră, este mai mică decât **10** şi este diferită de $\boldsymbol{z}$ şi de $\boldsymbol{x}$, rezultă $\boldsymbol{y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$.

Numerele sunt: $\boldsymbol{11 + 21 + 91 = 123}$; $\boldsymbol{11 + 31 + 91 = 133}$; $\boldsymbol{11 + 41 + 91 = 143}$;
$\boldsymbol{11 + 51 + 91 = 153}$; $\boldsymbol{11 + 61 + 91 = 163}$; $\boldsymbol{11 + 71 + 91 = 173}$;
$\boldsymbol{11 + 81 + 91 = 183}$.

29. Scriind sistematic numerele, obținem:

$$\boldsymbol{100x + 10y + z + 100x + 10z + y + 100y + 10x + z + 100y + 10z + x + 100z +}$$
$$\boldsymbol{+ 10x + y + 100z + 10y + x = 111x + 111y + 111z + 666} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{222x + 222y + 222z = 111x + 111y + 111z + 666.}$$

Scădem din fiecare membru al egalității $\boldsymbol{111x + 111y + 111z}$ şi obținem $\boldsymbol{666 = 111(x + y + z)} \Leftrightarrow \boldsymbol{x + y + z = 6}$. Fiind diferite de zero, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ pot lua, pe rând, una dintre valorile **1**, **2** şi **3**.

Dacă $\boldsymbol{x = 1}$, atunci $\boldsymbol{y = 2}$ şi $\boldsymbol{z = 3}$; $\boldsymbol{x = 2, y = 3, z = 1}$;
$\boldsymbol{x = 2}$, atunci $\boldsymbol{y = 1}$ şi $\boldsymbol{z = 3}$; $\boldsymbol{x = 3, y = 1, z = 2}$;
$\boldsymbol{x = 1}$, atunci $\boldsymbol{y = 3}$ şi $\boldsymbol{z = 2}$; $\boldsymbol{x = 3, y = 2, z = 1}$.

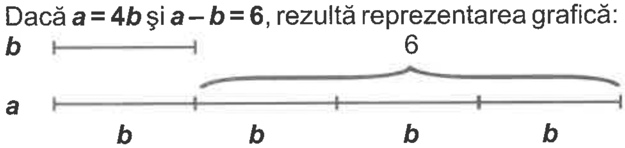
Verificări:

$\boldsymbol{123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 111 + 222 + 333 + 666} \Leftrightarrow \boldsymbol{1\,332 = 1\,332}$ etc.

30. Rezolvarea 1

Dacă $\boldsymbol{\overline{ab} - 54 = \overline{ba}}$, rezultă $\boldsymbol{\overline{ab} - \overline{ba} = 54} \Leftrightarrow \boldsymbol{9(a - b) = 54} \Leftrightarrow \boldsymbol{a - b = 6}$.

Dacă $\boldsymbol{a = 4b}$ şi $\boldsymbol{a - b = 6}$, rezultă reprezentarea grafică:



Dacă $\boldsymbol{3b = 6}$, rezultă $\boldsymbol{b = 2}$, iar $\boldsymbol{a = 8}$.

Rezolvarea 2:

Pentru a scrie numărul $\boldsymbol{\overline{ab}}$, putem folosi două dintre cifrele de la **1** la **9**. În cazul dat, raportul dintre ele este **4**. Dacă $\boldsymbol{a = 4}$, $\boldsymbol{b = 1}$, dar $\boldsymbol{41 - 54 \neq 14}$. Unica soluție este $\boldsymbol{a = 8}$ şi $\boldsymbol{b = 2}$, pentru că $\boldsymbol{82 - 54 = 28}$.

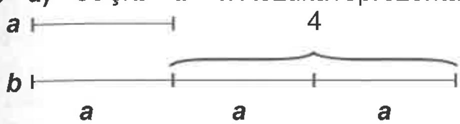
Rezolvarea 3

Dacă $9(a-b)=54$ şi $a-b=6$, prin înlocuirea lui a cu $4b$ în a doua relație, rezultă $4b-b=6$, adică $3b=6$,iar $b=2$; $a=4\times2=8$.

Răspuns: $\overline{ab}=82$.

31. Rezolvarea 1

Dacă $\overline{ba}-\overline{ab}=36$ şi $b=3a$, atunci $10b+a-10a-b=36$, adică $9(b-a)=36$ şi $b-a=4$. Rezultă reprezentarea grafică:



Dacă $2a=4$, rezultă $a=2$, iar $b=3\times2=6$.

Rezolvarea 2

Pentru a scrie numărul cerut putem folosi două dintre cifrele de la **1** la **9**, între care, luate ca simple unități, există raportul **3**. Cifrele pot fi: **1** şi **3**, **2** şi **6**, **3** şi **9**. Dacă $\overline{ba}-\overline{ab}=36$, rezultă $\overline{ba}>36$; însă $b=3a$, rezultă că $\overline{ba}$ poate fi **62** sau (şi) **93**. Verifică numai **62**,p entru că $62-26=36$, iar $93-39\neq36$.

Rezolvarea 3

Dacă $9(b-a)=36$ şi $b=3a$, rezultă $b-a=4$, adică $3a-a=4$.

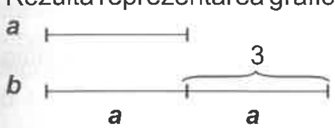
Atunci $2a=4 \Leftrightarrow a=2$; $b=2\times3=6$.

Răspuns: $\overline{ab}=26$.

32. Rezolvarea 1

Fie numărul $\overline{ab}$, în care a este mai mic de **2** ori decât b şi $\overline{ba}-\overline{ab}=27$. Atunci $10b+a-10a-b=27 \Leftrightarrow b-a=3$.

Rezultă reprezentarea grafică:



Deci $a=3$, $b=6$, iar $\overline{ab}=36$.

Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea **30** şi **31**.

33. 1) Enunțul se poate scrie astfel: $b=a+1$ şi $a=bc+r$, c şi r fiind câtul şi, respectiv, restul împărțirii lui a prin b, iar $r<b$. Înlocuind b în a doua relație, obținem: $a=(a+1)\times c+r$.

Deoarece în primul membru al egalității avem a, iar în al doilea $a+1$, singura valoare ce convine pentru cât, ca să fie egalitatea, este zero.

Deci: $(a+1)\times c=0$ şi $r=a$. Exemplu: $6=0\times7+6$.

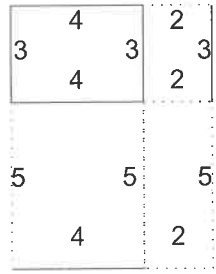
2) Distingem două situații: $a>1$ şi $a=1$.

Dacă $a>1$, din $\left.\begin{matrix} b=ac+r \\ b=a+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+1=ac+r$.

Pe baza unicității câtului şi a restului, rezultă $c=1$, iar $r=1$. Exemplu: $7=1\times6+1$.

Dacă $a=1$, din $\left.\begin{matrix} b=c\times1+r \\ b=1+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2=c\times1+r$.

Ştiind că $r < a$, rezultă, datorită unicităţii câtului şi a restului, $c = 2$, iar $r = 0$. Exemplu: $2 = 1 \times 2 + 0$.



34. Verificarea prin calcul: $6 \times 8 = 12 + 6 + 20 + 10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 48 = 48$; pentru verificarea geometrică e necesar să observăm că numerele din paranteză sunt diferite; deci, ele pot reprezenta dimensiunile unui dreptunghi.

Fie un dreptunghi cu dimensiunile **4** şi **3**, cu aria de **12** (unităţi de arie); atunci când mărim dimensiunile cu **2** şi, respectiv, cu **5**, se obţine un alt dreptunghi, cu o altă arie, compusă din **4** arii mai mici, adică: aria dreptunghiului mare este **48**, căci $(L + 2) \times (l + 5) = (4 + 2) \times (3 + 5) = 6 \times 8 = 48$.

Tot **48** este rezultatul adunării numerelor ce reprezintă ariile celor **4** dreptunghiuri mici, adică $4 \times 3 + 2 \times 3 + 4 \times 5 + 2 \times 5 = 48$.

35. Se observă că fiecare termen al egalităţii, exclusiv y, a fost împărţit la **2**, ceea ce se mai scrie: $y + (3 + 5 + 7 + 9) : 2 = 13$, adică $y + 24 : 2 = 13$, de unde $y = 1$.

În alte două moduri de rezolvare, se lucrează cu fracţii sau cu fracţii zecimale.

36. Înmulţind cu **2** fiecare membru al primei egalităţi şi apoi scăzând membru cu membru, se obţine $\frac{3}{2} \times a = 15$, iar $a = 10$; $b = 8$.

37. Rezolvarea 1

Egalitatea din enunţ devine: $\overline{abab} = 909 \times b \Leftrightarrow 909 \times b = \overline{.....b}$. Singura valoare ce convine pentru b este **5**, căci $\overline{.....9} \times 5 = \overline{.....5}$.

Verificare: $909 \times 5 = 4\,545$.

Rezolvarea 2

Scriind sistematic deîmpărţitul, obţinem: $1\,010a + 101b = 909b$. Împărţind prin **101** ambii membri ai egalităţii şi apoi, scăzând b, rezultă: $10a + b = 9b \Leftrightarrow 10a = 8b$. Împărţind prin **2** ambii membri, obţinem $5a = 4b$. Deci, $a = 4$, $b = 5$. Numărul este **4 545**.

Observaţie: Deîmpărţitul poate fi scris sistematic şi astfel: $100 \times \overline{ab} + \overline{ab} = 101 \times \overline{ab}$. Rezultă $101 \times \overline{ab} = 909b$ etc.

38. Rezolvarea 1

Dacă jumătatea numărului este de **8** ori mai mare decât media aritmetică a cifrelor sale, rezultă că jumătatea este de **4** ori mai mare decât suma cifrelor (căci media aritmetică este jumătate din suma cifrelor).

Deci, numărul căutat este de **8** ori mai mare decât suma cifrelor sale.

Pe scurt:

Fie numărul $\overline{ab}$. Din enunţ, rezultă:

$$\frac{1}{2}\overline{ab} = 8 \times \left(\frac{a + b}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overline{ab}) = 4(a + b) \Leftrightarrow \overline{ab} = 8(a + b).$$

Deci, $\overline{ab}$ este un multiplu de **8**, adică $\overline{ab} \in \{16, 24, ..., 96\}$. Verifică numai **72**, căci $72 : 2 = 8(7 + 2) : 2 \Leftrightarrow 36 = 36$.

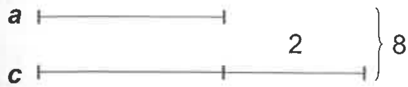
Rezolvarea 2

Reluând scrierea de la rezolvarea 1, $\overline{ab} = 8(a + b)$ şi scriind sistematic numărul, se obține: $10a + b = 8a + 8b$. Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, b şi $8a$, rezultă $2a = 7b$. Deci, $a = 7$, $b = 2$, iar $\overline{ab} = 72$.

39. Rezolvarea 1

Fie numărul $\overline{abc}$. Din enunț rezultă: $\overline{abc} + \overline{cba} = 888$, în care $a < b < c$, adică $a = b - 1$, $b = c - 1$, iar $c - a = 2$.

Dacă $c - a = 2$ şi $a + c = c + a = 8$, se pot reprezenta grafic astfel:



Din desen, rezultă: $2a = 8 - 2 = 6$. Deci, $a = 3$, iar $c = 3 + 2 = 5$.

Dacă $b + b = 8$, rezultă $b = 4$, iar $\overline{abc} = 345$.

Rezolvarea 2

Din enunț rezultă: $\overline{a(a+1)(a+2)} + \overline{(a+2)(a+1)a} = 888$.

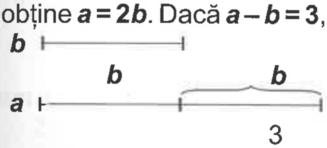
Scriind sistematic numerele (în baza **10**), suma devine:

$100a + 10(a + 1) + a + 2 + 100(a + 2) + 10(a + 1) + a = 888 \Leftrightarrow 222a + 222 = 888$.

Rezultă: $a = 3$, $c = 5$. Dacă $a + c = c + a = 8$, iar $b + b = 8$, rezultă $b = 4$, iar $\overline{abc} = 345$.

40. Rezolvarea 1

Fie $\overline{ab}$ numărul căutat, în care $a - b = 3$, iar $\overline{ab} = 7(a + b)$. Scriind sistematic numărul, obținem: $10 \times a + b = 7a + 7b$. Scăzând, pe rând, din fiecare membru al egalității, b şi $7a$, rezultă $3a = 6b$. Împărțind prin **3** ambii termeni, se obține $a = 2b$. Dacă $a - b = 3$, iar $a = 2b$, rezultă $b = 3$, iar $a = 6$, deoarece:



sau: $a - b = 3 \Leftrightarrow 2b - b = 3 \Leftrightarrow b = 3$;

$a - 3 = 3 \Leftrightarrow a = 6$; $\overline{ab} = 63$.

Rezolvarea 2

Fie $\overline{a(a-3)}$ numărul căutat. Scriind sistematic numărul, rezultă:

$10 \times a + a - 3 = 7[a + (a - 3)] \Leftrightarrow 11a - 3 = 14a - 21$. Scăzând, din fiecare membru al egalității $11a$ şi, apoi, adunând **3**, rezultă: $0 = 3a - 18 \Leftrightarrow 3a = 18 + 0 \Leftrightarrow a = 6$; atunci $a - 3 = 6 - 3 = 3$; deci numărul căutat este **63**.

41. Rezolvarea 1

Fie a deîmpărțitul, b împărțitorul, c câtul, r restul împărțirii lui a la b. Deci $a = b \times c + r$, în care $r < b$. Din enunț rezultă: $a - r = 6c$ şi $b = 3c$, iar $r > 4$.

Dacă $a - r = 6c$ şi $a = b \times c + r \Leftrightarrow a - r = b \times c$, rezultă:

1) $b \times c = 6 \times c$, deci $b = 6$;

2) $4 < r < 6$, deci $r = 5$;

3) $c = 6 : 3 = 2$

4) $a = 6 \times 2 + 5 = 17$.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile anterioare. Dacă $a = b \times c + r \Leftrightarrow a - r = b \times c$, $a - r = 6c$, iar $b = 3c$, rezultă $a - r = 2b$, căci $6c = 2 \times 3c$. Dacă $a - r = 2b$, iar $a - r = bc$, rezultă:

1) $2b = bc$, deci $c = 2$;
2) $b = 3 \times 2 = 6$;
3) $4 < r < 6$, deci $r = 5$;
4) $a = 6 \times 2 + 5 = 17$.

42. Rezolvarea 1

Fie a acel număr, b, c, d şi, respectiv, e câturile împărțirii lui a prin numerele date.

Din enunț rezultă: $a = 3b + 1$; $a = 4c + 2$; $a = 5d + 3$; $a = 6e + 4$.

Dacă adunăm **2** la fiecare membru al fiecarei egalități, avem:

$a + 2 = 3b + 3$; $a + 2 = 4c + 4$; $a + 2 = 5d + 5$; $a + 2 = 6e + 6$.

Rezultă că $a + 2$ se împarte exact la (este multiplu de) **3, 4, 5** şi **6**.

Pentru clasa a IV-a:

Dacă $a + 2$ se împarte la **5** şi la **4**, el se va termina în **0**.

Care este cel mai mic număr cu asemenea proprietăți, care să fie divizibil (să se împartă exact) prin **3** (fiind divizibil cu **3** şi cu **4**, va fi divizibil şi cu **6**)?

Este numărul **60**. Deci $a + 2 = 60$, iar $a = 58$.

Pentru clasa a V-a:

$[3, 4, 5, 6] = 60$; deci $a + 2 = 60$, iar $a = 58$.

43. Rezolvarea 1

Fie a numărul căutat, c câtul împărțirii enunțate.

Rezultă: $a = 13c + 3$ şi $a = 12c + 7$. Rezultă $13c + 3 = 12c + 7$.

Scăzând pe rând **3** şi $12c$ din fiecare membru al egalității, obținem $c = 4$. Atunci: $a = 13 \times 4 + 3 = 55$ sau $a = 12 \times 4 + 7 = 55$.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile anterioare.

Dacă $a = 13c + 3$ şi $a = 12c + 7$, atunci: $a - 3$ este multiplu de **13** mai mare decât **16**, căci $a - 3 = 13c$ şi $a - 3 = 12c + 4$, iar $c \neq 0$.

Dacă $c = 1$, atunci $13 \neq 12 + 4$;
dacă $c = 2$, atunci $26 \neq 24 + 4$;
dacă $c = 3$, atunci $39 \neq 40$;
dacă $c = 4$, atunci $52 = 48 + 4$. Deci $a - 3 = 52$. Rezultă $a = 55$.

44. Rezolvarea 1

Dacă notăm cu a primul cât, cu b al doilea cât, rezultă: $100 = na + 5$ şi $85 = nb + 9$, în care $n > 9$.

Cele două relații devin: $100 - 5 = na \Leftrightarrow 95 = na$; $85 - 9 = nb \Leftrightarrow 76 = nb$.

Care sunt cele două numere al căror produs este **95**? Dacă produsul este terminat în **5**, rezultă că un factor este **5** (sau se termină în **5**).

Deci: $95 : 5 = 19$ (unica posibilitate).

Dar $n > 9$ şi $76 = 4 \times 19$. Rezultă $n = 19$.

Pentru clasa a V-a:

Dacă $na = 95$ şi $nb = 76$, rezultă că n este divizor comun al numerelor **95** şi **76**, notat $d > 9$.

Deoarece $\mathbf{95 = 5\times19}$ şi $\mathbf{76 = 2^2\times19}$, rezultă $\boldsymbol{d} = \mathbf{19}$.

45. Calculând n şi m în forma în care sunt date, obţinem $n = 13$ şi $m = 4$. Dacă $n = 3\times5 : 1 - 2$, punând între paranteze scăderea, rezultă $n \notin N$.

Punând între paranteze împărţirea, rezultatul nu se modifică. Unica soluţie este: $n = 3\times(5 : 1 - 2) = 9$.

Dacă $m = 9$, rezultă: $(5 + 1)\times2 - 3 = 9$.

46. Notăm cu *î* şi *r* împărţitorul şi, respectiv, restul împărţirii.

Dacă $4\times î = \overline{...0}$ şi dacă $869 - \overline{**0} = 9$, rezultă $\overline{**0} = 860$, deci $4\times î = 860$, de unde $î = 215$.

Se observă uşor că a doua cifră a câtului este **0**.

Dacă $r = 0$, atunci $215\times ? = \overline{6**}$. Rezultă că ultima cifră a câtului este **3**, iar ultima cifră a deîmpărţitului este **5**, pentru că $215\times3 = 645$.

Dacă $\overline{9**} - \overline{8**} = 64$, atunci $215\times ? = \overline{8**}$; rezultă că cifra de pe locul zecilor câtului este **4**, căci $215\times4 = 860$, iar $\overline{9**} = 924$.

Răspuns: **869 245 : 215 = 4 043.**

47. Dacă ultima cifră a produsului este **2**, rezultă că A, ultima cifră a primului produs parţial şi ultima cifră a celui de-al doilea factor, este **2**.

Dacă $\overline{BBC}\times2 = \overline{CD2}$, rezultă $C = 6$, căci $\overline{...6}\times2 = \overline{...2}$.

(Soluţia $C = 1$ nu convine, căci $\overline{BBC}\times 2 \neq \overline{1...}$, întrucât cifrele sunt diferite de zero.) Deci $\overline{BB6}\times2 = \overline{CD2}$.

Dacă $\overline{EO}\times\overline{BB6} = \overline{AGEE0}$, adică $\overline{...E}\times6 = \overline{...E}$, atunci E poate fi **4** sau **8**.

Pentru determinarea lui E, parcurgem o cale mai uşoară:

– dacă $E = 4$, atunci $\overline{EA} = 42$, iar $27\,552 : 42 = 656$, dar $\overline{BBC} \neq 656$;

– dacă $E = 8$, atunci $\overline{EA} = 82$, iar $27\,552 : 82 = 336$.

Verificare:

$$\begin{array}{r} 336\ \times \\ \underline{82} \\ 672 \\ \underline{2688} \\ 27552 \end{array}$$

48. Rezolvarea 1

Scriind sistematic produsul, rezultă: $2a\times(4a - 27) = 10a \Leftrightarrow 4a - 27 = 10a : 2a = 5 \Leftrightarrow 4a = 32 \Leftrightarrow a = 8$.

Verificare: $2\times8\times(4\times8 - 27) = 80 \Leftrightarrow 16\times(32 - 27) = 80 \Leftrightarrow 80 = 80$.

Rezolvarea 2

Dacă a este cifră semnificativă, iar $4a - 27 \in N^*$, rezultă $6 < a \leq 9$.

Dacă $a = 7$, rezultă $2\times7\times(4\times7 - 27) \neq 70$;

Dacă $a = 8$, rezultă $2\times8\times(4\times8 - 27) = 80$;

Dacă $a = 9$, rezultă $2\times9\times(4\times9 - 27) \neq 90$.

Unica soluţie: $a = 8$.

49. Asemănătoare cu **13**.

Din enunţ rezultă: $1 = 2 + 3 + 4 + ... + 20 = (1 + 20)\times20 : 2 = 210$.

Dacă în condiţiile date se obţine o egalitate adevărată, rezultă că suma

termenilor din fiecare membru al egalității este **105**, căci **210 : 2 = 105**. Notăm cu n numărul după care se pune semnul "egal".
Atunci: $1 + 2 + 3 + ... + n = 105$ sau $(n + 1) + ... + 20 = 105$. Prima egalitate devine: $(1 + n) \times n : 2 = 105 \Leftrightarrow (1 + n) \times n = 210 = 2 \times 7 \times 3 \times 5 = 14 \times 15$.

(De ce am scris astfel cei **4** factori? Pentru că n şi $n + 1$ sunt numere consecutive).

Deci $n = 14$, numărul după care se pune semnul "egal".

Sau: a doua egalitate devine:

$(n + 1 + 20) \times (20 - n) : 2 = 105 \Leftrightarrow (n + 21) \times (20 - n) = 210 \Leftrightarrow 20n + 420 - n^2 - 21n = 210 \Leftrightarrow 420 - (n^2 + n) = 210 \Leftrightarrow n(n + 1) = 210 = 14 \times 15$.

Deci $n = 14$.

50. Din enunț rezultă că, dacă la alunele rămase s-ar mai adăuga câte una, fiecare copil ar putea face un număr întreg de grămezi de câte **4** sau de câte **3**, ori de câte **2** alune.

Care sunt numerele mai mici decât **26**, care se împart exact la **4** şi la **3**?

Sunt numerele **12** şi **24**.

Rezultă că Alexandrei i-au rămas **11** alune, iar lui Samuel, **23** de alune.

Pentru alt mod de redare a raționamentului, a se vedea soluția **1** de la problema **42**.

51. 1) $a \times b = (3 - 2) + (5 - 4) + (7 - 6) + ... + (57 - 56) = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{\text{28 de termeni,}} = 28 \times 1 = 28$

căci de la **2** la **57** inclusiv sunt **28** de numere impare şi **28** de numere pare.

Perechile de numere naturale (a, b) care au produsul **28** sunt: **(1, 28), (28, 1), (7, 4), (4, 7), (14, 2), (2, 14)**.

2) $a : b = 18$. Deoarece $0 < b \leq 3$, rezultă perechile de numere naturale: **(18,1), (36, 2), (54, 3)**.

3) $a - b = 7$. Deoarece $a < 10$, rezultă perechile de numere naturale (a, b): **(10 , 3), (9, 2), (8, 1), (7, 0)**.

52. a) **47**; b) **119**; c) **48**; d) **792**; e) **9 810**; f) **1**; g) **6**; h) **2**; i) **497**; j) **674**; k) **1212**; l) **1**; m) **938 326**; n) **4**; o) **42 525**.

53. a) Asociem primii doi termeni, iar la suma obținută adunăm al treilea termen: **(45 + 22) + 55 = 67 + 55 = 122** *sau*

Comutăm termenul al treilea şi îl asociem cu primul, iar la suma obținută adunăm al doilea termen: **(45 + 55) + 22 = 100 + 22 = 122.**

b) Avem de adunat un număr cu o sumă. 1) Efectuăm adunarea din paranteză şi apoi la rezultatul obținut adunăm numărul dat: **138 + 491 = 629** *sau* 2) Adunăm numărul cu unul dintre termenii sumei din paranteză, iar rezultatul îl adunăm cu celălalt termen:

138 + (129 + 362) = (138 + 362) + 129 = 500 + 129 = 629 sau

138 + (129 + 362) = (138 + 129) + 362 = 267 + 362 = 629.

c) Asemănător cu exercițiul anterior: 1) **1 745 + 996 = 2 741** sau

2) **132 + (1 004 + 996) + 6 099 = 132 + 2 000 + 609 = 2 741**.

d) Trebuie să scădem dintr-o sumă un număr. 1) Efectuăm suma, iar din rezultatul obținut scădem numărul dat: **2 277 – 694 = 1 583** sau 2) Putem scădea numărul din unul dintre termenii sumei, iar rezultatul îl adunăm cu celălalt termen: **(1 694 – 694) + 583 = 1 000 + 583 = 1 583**.

e) Asemănător cu exercițiul anterior: 1) **6 549 – 1 976 = 4 573** sau 2) **389 + 3 184 + (2 976 – 1 976) = 4 573**.

f) Trebuie să scădem dintr-un număr o sumă. 1) Efectuăm adunarea, iar rezultatul îl scădem din numărul dat: **86 – 61 = 7** sau 2) Putem scădea din număr primul termen al sumei, iar din rezultat scădem al doilea termen (adică scădem din acel număr în mod succesiv, fiecare termen al sumei): **68 – (32 +29) = 68 – 32 – 29 = 36 – 29 = 7**.

g) Asemănător cu exercițiul anterior: 1) **91 – 87 = 4** sau 2) **91– (54 + 17 + 16) = 91 – 54 – 17– 16 = 37 – 17 – 16 = 20 – 16 = 4**.

h) Trebuie să adunăm un număr cu o diferență. 1) Efectuăm diferența, iar restul îl adunăm cu numărul dat: **36 + 23 = 59** sau 2) Adunăm numărul dat cu descăzutul, iar din rezultat scădem scăzătorul, adică **36 + (44 – 21) = = (36 + 44) – 21 = 80 – 21 = 59**.

i) Asemănător cu exercițiul precedent: 1) **153 + 15 = 168** sau 2) **(153 + 128) – 113 = 281 – 113 = 168**.

j) Trebuie să scădem dintr-un număr o diferență. 1) Efectuăm diferența din paranteză, apoi o scădem din numărul dat: **36 – 36 = 0** sau 2) Putem aduna la numărul dat scăzătorul diferenței, iar din rezultat scădem descăzutul diferenței: **36 – (100 – 64) = (36 + 64) – 100 = 100 – 100 = 0**, adică **36 – (100 – 64) = 36 – 100 + 64 = 36 + 64 – 100 = 100 –100 = 0**.

k) Asemănător cu exercițiul precedent: 1) **159 – 58 = 101** sau 2) **159 – (99 – 41) = (159 + 41) – 99 = 200 – 99 = 101**.

l) 1) **11 + 9 = 20** sau 2) Dacă dintr-un număr dat scădem și apoi adunăm același număr, numărul inițial rămâne neschimbat, adică **20 – 9 + 9 = 20**.

m) Asemănător cu exercițiul anterior: 1) **60 + 70 = 130** sau 2) **130 – 70 + 70 = 130**.

n) 1) **300 – 200 = 100** sau 2) dacă la un număr dat adunăm și apoi scădem același număr, numărul inițial rămâne neschimbat, adică **100 + 200 – 200 = 100** (A se vedea şi explicația de la exercițiul d)**2)**).

o) Asemănător cu exercițiul anterior: 1) **117 – 39 = 78** sau 2) **78 + 39 – 39 = 78**.

p) 1) **84 – 19 – 64 = 65 – 64 = 1** sau 2) Transformăm exercițiul, înlocuind scăzătorii prin suma lor (a se vedea şi explicațiile de la exercițiul f)**2)**): **100 – 16 – 19 – 64 = 100 – (16 + 19 + 64) = 100 – 99 = 1**.

q) Asemănător cu exercițiul anterior:
1) **1 534 – 326 – 109 – 98 = 1 208 – 109 – 98 = 1 099 – 98 = 1 001** sau
2) **1 986 – 452 – 326 – 109 – 98 = 1 986 – (452 + 326 + 109 + 98) = = 1 986 – 985 = 1 001**.

54. Urmând şirul operațiilor concrete din enunț se ajunge într-adevăr la scăderea **9 – 11** care nu este posibilă în mulțimea numerelor naturale. Dacă la suma pe care o are, Silviu adaugă întâi suma pe care o primeşte de la Cristi şi apoi dă **11** lei, se ajunge la exercițiul: **9 + 4 – 11 = 13 – 11 = 2**.

Deci **9 – 11 + 4 = 9 + 4 – 11 = 2** (lei), problema fiind astfel rezolvată.

55. 1) **9 000 + 869 – 9 868 = 9 869 – 9 868 = 1**; 2) **83 + 17 – 91 = 100 – 91 = 9**; 3) **(98 + 3 + 200 + 117) – 101 – 190 = 101 + 200 + 117 – 101 – 190 =**

= 418 – 101 – 190 = 127 sau **(98 + 3 + 200 + 117) – (101 + 190) = = 418 – 291 = 127**. Pe baza exercițiilor **54** şi **55.**1), putem afirma că într-o succesiune de adunări şi de scăderi (suma algebrică), procedăm şi astfel: calculăm suma termenilor care se adună şi, separat, suma termenilor care se scad; apoi efectuăm diferența dintre cele două sume obținute.

4) **10 + 70 – 20 = 80 – 20 = 60** sau **(100 + 70) – (90 + 20) = 170 – 110 = 60.**

5) **900 – 88 – 814 + 6 = 812 – 814 + 6 = ?** Aplicând regula de la punctul 3), obținem: **(900 + 6) – (88 + 814) = 906 – 902 = 4** sau, de la etapa intermediară, se ajunge la: **812 – 814 + 6 = 812 + 6 – 814 = 818 – 814 = 4**.

6) **(19 + 81) – (28 + 16 + 6) = 100 – 50 = 50**.

7) Asemănător cu exercițiul precedent:
(3×4 + 3×3 + 7×3) – (5×3 + 3×6) = (12 + 9 + 21) – (15 + 18) = 42 – 33 = 9; dacă se observă că **3** este factor comun, se poate calcula şi astfel: **3×(4 + 3 + 7) – 3×(5 + 6) = 3×14 – 3×11 = 3×(14 – 11) = 3×3 = 9**.

8) a) **8×6×5 = 48×5 = 204** sau b) Aplicând asociativitatea şi comutativitatea înmulțirii, putem efectua: **(2×5)×(4×6) = 10×24 = 240.**

9) a) **32×7×75×25 = 224×75×25 = 420 000** sau
b) **(4×25)×(8×75)×7 = 100×600×7 = 60 000×7 = 420 000**.

10) Trebuie să înmulțim un produs (neefectuat) cu un număr
a) **(30×8)×100 = 240 ×100 = 24 000** sau
b) Putem înmulți întâi numărul **100** cu unul dintre factorii produsului, adică:
(5×6× 8)×100 = (6×100)×(5×8) = 600×40 = 24 000.

11) a) **14×(72×2×5) = 14×(144×5) = 14×720 = 10 080** sau
b) Putem înmulți întâi numărul **14** cu produsul dintre **2** şi **5**, adică:
(14×2×5)×(9×8) = 140×72 = 10 080.

12) a) **2×15 = 30** sau b) Înmulțirea este distributivă față de adunare, adică la înmulțirea unei sume (a unei adunări neefectuate) cu un număr, obținem acelaşi rezultat ca în modul anterior, dacă distribuim ca factor (adică înmulțim) numărul cu fiecare termen al sumei, iar rezultatele le adunăm, deci: **2×(7 + 8) = 2×7 + 2×8 = 14 + 16 = 30**. În general:
a*×(*b* + *c*) = *a*×*b* + *a*×*c.

13) a) **9×6 = 54** sau b) **(4 + 5)×6 = 4×6 + 5×6 = 24 + 30 = 54.**

14) a) **6×30 = 180** sau
b) **6×(5 + 15 + 10) = 6×5 + 6×15 + 6×10 = 30 + 90 + 60 = 180**.

15) a) **4×4 = 16** sau b) Înmulțirea este distributivă şi față de scădere, adică la înmulțirea unei diferențe (a unei scăderi neefectuate) cu un număr, obținem acelaşi rezultat ca în modul anterior, dacă distribuim ca factor (înmulțim) numărul cu fiecare termen al diferenței, iar rezultatele le scădem, deci: **4×(11 – 7) = 4×11 – 4× 7 = 44 – 28 = 16**, în general: ***a*×(*b* – *c*) = *a*×*b* – *a*×*c***.

16) a) **9×9 = 81** sau b) **180×9 – 171×9 = 1 620 – 1 539 = 81**.

17) a) **10×(33 – 13) = 10×20 = 200** sau
b) **10×72 – 10×39 – 10×13 = 720 – 390 – 130 = 200**.

18) a) **6×(8 + 4) = 6×12 = 72** sau **6×40 – 6×32 + 6×4 = 240 – 192 + 24 = 72.**
b) Avem de efectuat suma a două produse.
Respectând regulile privitoare la ordinea efectuării operațiilor, obținem: **6×40 + 6×32 = 240 + 192 = 432.** Dacă observăm că în cele două produse **6** este factor comun, obținem: **6×(40 + 32) = 6×72 = 432**.
c) **103 + 515 – 206 = 618 – 206 = 412**. Observând că **103** este factor comun, căci **103 = 1×103**, obținem: **103×(1 + 5 – 2) = 103×4 = 412**.

19) Trebuie să înmulțim două sume (neefectuate).

a) Efectuăm adunările din fiecare paranteză, iar rezultatele le înmulțim, adică: $291 \times 12 = 3\,492$ *sau*

b) Înmulțirea a două sume se poate efectua şi înmulțind fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al sumei a doua, iar produsele obținute se adună, adică:

$(200 + 90 + 1) \times (10 + 2) = 200 \times 10 + 90 \times 10 + 1 \times 10 + 2 \times 200 + 2 \times 90 + 2 \times 1 =$
$= 2\,000 + 900 + 10 + 400 + 180 + 2 = 3\,492$.

20) a) $49 \times 13 = 637$ sau

b) $(30 + 15 + 4) \times (7 + 6) = 30 \times 7 + 15 \times 7 + 4 \times 7 + 6 \times 30 + 6 \times 15 + 6 \times 4 =$
$= 210 + 105 + 28 + 180 + 90 + 24 = 637$.

21) a) $265 \times 100 = 26\,500$ sau

b) $136 \times 10 + 136 \times 20 + 136 \times 30 + 136 \times 40 + 129 \times 10 + 129 \times 20 +$
$+ 129 \times 30 + 129 \times 40 = 26\,500$.

22) $9 \times 63 : 63 = 567 : 63 = 9$ sau b) Dacă înmulțim şi apoi împărțim cu acelaşi număr un număr dat, acesta din urmă rămâne neschimbat:

$9 \times 63 : 63 = 9$; putem scrie exercițiul şi astfel: $\frac{9 \times 63}{63} = 9$.

în general: $a \times b : b = a$; a se vedea şi execițiul $(4 \times 6 \times 5) : 3$.

23) a) $105 \times 14 : 14 = 1\,470 : 14 = 105$ sau b) $105 \times 14 : 14 = 105$.

24) a) $5\,588 : 4 = 1\,397$ sau

b) Numărul dat este **1 397**, deci $1\,397 \times 4 : 4 = 1\,397$.

25) a) $864 : 72 \times 72 = 12 \times 72 = 864$ sau b) Dacă împărțim şi apoi înmulțim cu acelaşi număr un număr dat, acesta din urmă rămâne neschimbat:

$864 : 72 \times 72 = 864$; putem scrie exercițiul şi astfel: $\frac{864}{72} \cdot 72 = 864$;
în general, $a : b \times b = a$.

26) a) $324 : 18 \times 18 = 18 \times 18 = 324$; b) $324 : 18 \times 18 = 324$.

27) Trebuie să împărțim un produs la un număr. a) Efectuăm produsul, iar apoi îl împărțim la numărul dat, adică $120 : 3 = 40$ sau b) Putem împărți unul dintre factori la numărul dat, iar rezultatul îl înmulțim cu ceilalți factori, adică $4 \times (6 : 3) \times 5 = 4 \times 2 \times 5 = 4 \times 10 = 40$.

28) $(14\,976 \times 96) : 4 = 1\,437\,696 : 4 = 359\,424$ sau b) Se observă că fiecare factor se împarte la **4**. Îl împărțim pe **208**, fiind un număr mai mare, adică: $(208 : 4) \times 72 \times 96 = 52 \times 72 \times 96 = 359\,424$.

29) a) $774\,000 : 1\,000 = 774$ sau b) $(2\,000 : 1\,000) \times 387 = 2 \times 387 = 774$.

30) Trebuie să împărțim un număr la un produs. a) Efectuăm produsul, la care împărțim apoi numărul dat, adică $180 : 60 = 3$ sau b) Împărțim pe rând la fiecare factor al produsului, adică: $180 : 3 : 4 : 5 = 60 : 4 : 5 = 15 : 5 = 3$.

31) a) $3\,240 : (27 \times 24) = 3\,240 : 648 = 5$ sau

b) $3\,240 : (9 \times 3 \times 24) = 3\,240 : 9 : 3 : 24 = 360 : 3 : 24 = 120 : 24 = 5$

Observații: a) Dacă numărul se împarte exact (este divizibil) la (cu) fiecare factor, atunci numărul se împarte exact şi la produsul factorilor. b) Al doilea mod de calcul este necesar la simplificarea fracțiilor sau când scriem exercițiul astfel:

$$\frac{\overset{360}{\cancel{3\,240}}}{\cancel{9} \times 3 \times 24} = \frac{\overset{120}{\cancel{360}}}{\cancel{3} \times 24} = \frac{120}{24} = 5$$

32) Trebuie să împărţim un produs la un alt produs: a) **288 : 24 = 12** sau

b) Putem împărţi pe rând factorii deîmpărţitului la factorii împărţitorului (dacă sunt împărţiri exacte), iar câturile le înmulţim, adică:
(9 : 3)×(8 : 2)×(4 : 4) = 3×4×1 = 12. *Observaţie*: Al doilea mod de calcul este necesar la simplificarea fracţiilor sau când scriem exerciţiul astfel:

$$\frac{9\times8\times4}{3\times2\times4} = \frac{3\times8\times4}{2\times4} = \frac{3\times8}{2} = 3\times4 = 12.$$

33) a) **432 : 24 = 18** sau b) **(6 : 2)×(9 : 3)×(8 : 4) = 3×3×2 = 18**.
34) a) **648 : 108 = 6** sau b) **(18 : 3)×[36 : (9×4)] = 6×(36 : 36) = 6×1 = 6**.
35) a) **2304 : 64 = 36** sau b) **(72 : 8)×2×(16 : 8) = 9×2×2 = 36** sau

$$\frac{\overset{9}{\cancel{72}}\times2\times\overset{2}{\cancel{16}}}{\cancel{8}\times\cancel{8}} = 9\times2\times2 = 36$$

36) Trebuie să împărţim un număr la un cât neefectuat.
a) **324 : (18 : 6) = 324 : 3 = 108** sau b) Putem împărţi numărul la deîmpărţit, dacă este împărţire exactă, iar rezultatul îl înmulţim cu împărţitorul, adică: **324 : (18 : 6) = 324 : 18×6 = 18×6 = 108** sau: înmulţim numărul cu împărţitorul, iar rezultatul îl împărţim la deîmpărţit, adică: **324×6 : 18 = 1 944 : 18 = = 108**.
37) a) **18 : (42 : 7) = 18 : 6 = 3** sau b) **18 : (42 : 7) = 18×7 : 42 = 126 : 42 = 3.**
38) a) **63 : (6 : 2) = 63 : 3 = 21** sau b) **63 : 6×2 = 63×2 : 6 = 126 : 6 = 21.**
39) Trebuie să împărţim o sumă la (printr-un) un număr. a) Efectuăm suma şi apoi o împărţim la numărul dat, adică: **(55 + 10) : 5 = 65 : 5 = 13**; b) Împărţim fiecare termen al sumei prin numărul dat (dacă împărţirile sunt exacte), apoi adunăm câturile obţinute, adică: **(55 + 10) : 5 = 55 : 5 + 10: 5 = 11 + 2 = 13**.
40) a) **826 : 7 = 118** sau b) **63 : 7 + 28 : 7 + 735 : 7 = 9 + 4 + 105 = 118.**
41) Trebuie să împărţim o diferenţă la (printr-un) număr. a) Efectuăm diferenţa, apoi o împărţim la numărul dat, adică: **(72 – 36) : 9 = 36 : 9 = 4** sau b) Împărţim fiecare termen al diferenţei prin numărul dat, dacă este posibil, apoi scădem câturile obţinute, adică: **(72 – 36) : 9 = 72 : 9 – 36 : 9 = 8 – 4 = 4.**
42) a) **(180 – 36) : 6 = 144 : 6 = 24**;

b) **192 : 6 – 12 : 6 – 36 : 6 = 32 – 2 – 6 = 30 – 6 = 24**.

Observaţii: a) Regula se aplică numai în cazul în care fiecare termen al sumei sau al diferenţei se împarte exact (este divizibil) la (cu) numărul dat, deoarece este posibil ca termenii sumei să nu se împartă exact la numărul dat şi totuşi suma sau diferenţa să fie divizibilă prin acel număr. De exemplu: în **(1 + 2 + 3) : 3 = 2**, **1** şi **2** nu sunt divizibile cu **3**, dar **6 : 3 = 2**; suma **31 + 13 + 11** este divizibilă prin **5**, dar nici un termen al sumei nu este divizibil prin **5**. b) În cazul în care trebuie să împărţim un număr la o sumă sau la o diferenţă, unica posibilitate este să efectuăm suma sau diferenţa, apoi să împărţim numărul la rezultatul obţinut (excepţie făcând numărul **0**).
De exemplu: 1) **108 : (12 + 6) = 108 : 18 = 6**;
2)**3 294 : (2974 – 2 965) = 3294 : 9 = 366**;
3) **0 : (7 + 8) = 0 : 7 = 0 : 8 = 0 + 0 = 0**.

56. 1) Dacă mărim unul dintre cei doi termeni ai unei sume cu un număr, suma se măreşte cu acel număr.

a) **(1 009 + 137) + 2 991 = 4 000 + 137 = 4 137**; (verificare: **1 146 + 2 991 = = 4 137**); b) **1 009 + (2991 + 248) = 4 000 + 248 = 4 248**; (verificare:

$1\,009 + 3\,239 = 4\,248$); c) $(1\,009 + 248) + 2\,991 = 4\,000 + 248 = 4\,248$; (verificare: $1\,257 + 2\,991 = 4\,248$).

2) Asemănător cu exercițiul precedent: a) $4\,910 = 4\,908 + 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4\,910 + 5\,092 = 10\,000 + 2 = 10\,002$; (verificare: $4\,910 + 5\,092 = 10\,002$); b) $5\,101 = 5\,092 + 9 \Rightarrow 4\,908 + 5\,101 = 10\,000 + 9 = 10\,009$; (verificare: $4\,908 + 5\,101 = 10\,009$); c) $4\,917 = 4\,908 + 9 = 4\,917 + 5\,092 = 10\,000 + 9 =$ $= 10\,009$; (verificare: $4\,917 + 5\,092 = 10\,009$);
în general: $a + b = c \Rightarrow (a + d) + b = c + d$ sau $a + (b + d) = c + d$.

3) Dacă micşorăm unul dintre termenii unei sume cu un număr, suma se micşorează cu acel număr. a) $(2\,098 - 2) + 6\,992 = 9\,090 - 2 = 9\,088$; (verificare: $2\,096 + 6\,992 = 9\,088$); b) $2\,098 + (6\,992 - 2) = 9\,090 - 2 = 9\,088$; (verificare: $2\,098 + 6\,990 = 9\,088$); c) $(2\,098 - 87) + 6\,992 = 9\,090 - 87 =$ $= 9\,003$; (verificare: $2\,011 + 6\,992 = 9\,003$); în general: $a - (b - d) = c - d$.

4) Asemănător cu exercițiul precedent: a) $3\,006 = 3\,026 - 20 \Rightarrow 3\,006 + 414 =$ $= 3\,440 - 20 = 3\,420$; (verificare: $3\,006 + 414 = 3\,420$); b) $404 = 414 - 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3\,026 + 404 = 3\,440 - 10 = 3\,430$; (verificare: $3\,026 + 404 = 3\,430$); c) $3\,022 = 3\,026 - 4 \Rightarrow 3\,022 + 414 = 3\,440 - 4 = 3\,436$; (verificare: $3\,022 + 414 = 3436$).

5) Dacă mărim ambii termeni ai unei sume cu acelaşi număr, suma se măreşte cu dublul acelui număr.
a) $(998 + 14) + (2\,002 + 14) = 3\,000 + 14 + 14 = 3\,028$;
b) $(998 + 115) + (2\,002 + 115) = 3\,000 + 115 + 115 = 3\,230$;
c) $(998 + 333) + (2\,002 + 333) = 3\,000 + 333 + 333 = 3\,666$.
În general: $a + b = c \Rightarrow (a + d) + (b + d) = c + d + d = c + 2d$.

6) Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $\left.\begin{array}{l} 3\,903 = 3\,900 + 3 \\ 4\,918 = 4\,915 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,903 + 4\,918 = 8\,815 + 3 + 3 = 8\,821$;
b) $\left.\begin{array}{l} 3\,909 = 3\,900 + 9 \\ 4\,924 = 4\,915 + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,909 + 4\,924 = 8\,815 + 9 + 9 = 8\,833$;
c) $\left.\begin{array}{l} 3\,910 = 3\,900 + 10 \\ 4\,925 = 4\,915 + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,910 + 4\,925 = 8\,815 + 10 + 10 = 8\,835$;

7) Dacă micşorăm ambii termeni ai unei sume cu acelaşi număr, suma se micşorează cu dublul acelui număr.
a) $(4\,799 - 54) + (3\,611 - 54) = 8\,410 - 2 \times 54 = 8\,410 - 108 = 8\,302$;
b) $(4\,799 - 45) + (3\,611 - 45) = 8\,410 - 2 \times 45 = 8\,410 - 90 = 8\,320$;
c) $(4\,799 - 1\,000) + (3\,611 - 1\,000) = 8\,410 - 2 \times 1\,000 = 8\,410 - 2\,000 = 6\,410$.
În general: $a + b = c \Rightarrow (a - d) + (b - d) = c - d - d = c - 2d$.

8) Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{array}{l} 3\,486 = 3786 - 300 \\ 616 = 916 - 300 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,486 + 616 = 4\,702 - 2 \times 300 = 4\,702 - 600 = 4\,102$;
b) $\left.\begin{array}{l} 3736 = 3786 - 50 \\ 866 = 916 - 50 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,736 + 866 = 4\,702 - 2 \times 50 = 4\,702 - 100 = 4\,602$;
c) $\left.\begin{array}{l} 3\,785 = 3786 - 1 \\ 915 = 916 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,785 + 915 = 4\,702 - 2 \times 1 = 4\,702 - 2 = 4\,700$.

9) Dacă mărim ambii termeni ai unei sume, primul cu d, al doilea cu e, suma se măreşte cu $d + e$.
a) $(46 + 3) + (136 + 1) = 182 + (3 + 1) = 182 + 4 = 186$
b) $(46 + 2) + (136 + 3) = 182 + (2 + 3) = 182 + 5 = 187$

c) **(46 + 1) + (136 + 3) = 182 + (1 + 3) = 182 + 4 = 186**

În general: $a + b = c \Rightarrow (a + d) + (b + e) = c + (d + e)$.

10) a) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{185 = 183 + 2}\\ \mathbf{194 = 191 + 3}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{185 + 194 = 374 + (2 + 3) = 374 + 5 = 379}$;

b) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{193 = 183 + 10}\\ \mathbf{195 = 191 + 4}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{193 + 195 = 374 + (10 + 4) = 374 + 14 = 388}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{187 = 183 + 4}\\ \mathbf{201 = 191 + 10}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{187 + 201 = 374 + (4 + 10) = 374 + 14 = 388}$.

11) Dacă micşorăm ambii termeni ai unei sume, primul cu ***d***, al doilea cu ***e***, suma se micşorează cu ***d* + *e***.

a) **(76 – 2) + (189 – 3) = 265 – (2 + 3) = 265 – 5 = 260**;
b) **(76 – 1) + (189 – 2) = 265 – (1 + 2) = 265 – 3 = 262**;
c) **(76 – 2) + (189 – 1) = 265 – (2 + 1) = 265 – 3 = 262**.

În general: $a + b = c \Rightarrow (a - d) + (b - e) = c - (d + e)$.

12) a) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{387 = 397 - 10}\\ \mathbf{183 = 184 - 1}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{387 + 183 = 581 - (10 + 1) = 581 - 11 = 570}$;

b) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{297 = 397 - 100}\\ \mathbf{174 = 184 - 10}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{297 + 174 = 581 - (100 + 10) = 581 - 110 = 471}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{396 = 397 - 1}\\ \mathbf{174 = 184 - 10}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{396 + 174 = 581 - (1 + 10) = 581 - 11 = 570}$.

13) Dacă mărim unul dintre cei doi termeni ai unei sume cu ***a***, iar celălalt îl micşorăm cu ***b***, atunci:

– în cazul în care $a - b = c$, suma se măreşte cu ***c***;
– în cazul în care $b - a = d$, suma se micşorează cu ***d***.

a) **(597 + 5) + (486 – 4) = 1 083 + (5 – 4) = 1 083 + 1 = 1 084**;
b) **(597 – 5) + (486 + 4) = 1 083 – (5 – 4) = 1 083 – 1 = 1 082**;
c) **(597 + 1) + (486 – 2) = 1 083 – (2 – 1) = 1 083 – 1 = 1 082**.

14) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{1\,608 = 1\,609 - 1}\\ \mathbf{898 = 896 + 2}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1\,608 + 898 = 2\,505 + (2 - 1) = 2\,505 + 1 = 2\,506}$;

b) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{1\,617 = 1\,609 + 8}\\ \mathbf{893 = 896 - 3}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1\,617 + 893 = 2\,505 + (8 - 3) = 2\,505 + 5 = 2\,510}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{1\,709 = 1\,609 + 100}\\ \mathbf{696 = 896 - 200}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1\,709 + 696 = 2\,505 - (200 - 100) = 2\,505 - 100 = 2\,405}$.

15) Dacă mărim unul dintre cei doi termeni ai unei sume cu un număr, iar pe celălalt îl micşorăm cu acelaşi număr, suma rămâne neschimbată.

a) **(938 + 6) + (9 986 – 6) = 10 924 + 6 – 6 = 10 924**;
b) **(938 + 37) + (9 986 – 37) = 10 924 + 37 – 37 = 10 924**;
c) **(938 – 248) + (9 986 + 248) = 10 924**.

16) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{1\,894 = 1\,892 + 2}\\ \mathbf{727 = 729 - 2}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1\,894 + 727 = 2\,621 + 2 - 2 = 2\,621}$;

b) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{1\,882 = 1\,892 - 10}\\ \mathbf{739 = 729 + 10}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1\,882 + 739 = 2\,621}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{1\,792 = 1\,892 - 100}\\ \mathbf{829 = 729 + 100}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1\,792 + 829 = 2\,621}$.

17) Dacă mărim descăzutul cu un număr, scăzătorul fiind acelaşi, diferența se măreşte cu acel număr.

a) **(11 002 + 10) – 398 = 10 604 + 10 = 10 614**;

b) $(11\,002+344)-398=10\,604+344=10\,948$;
c) $(11\,002+1)-398=10\,604+1=10\,605$.
În general: $a-b=c \Rightarrow (a+d)-b=c+d$.
18) Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $3\,010=3\,007+3 \Rightarrow 3\,010-19=2\,988+3=2\,991$;
b) $3\,107=3\,007+100 \Rightarrow 3\,107-19=2\,988+100=3\,088$;
c) $3\,008=3\,007+1 \Rightarrow 3\,008-19=2\,988+1=2\,989$.
19) Dacă micşorăm descăzutul cu un număr, scăzătorul fiind acelaşi, diferența se micşorează cu acelaşi număr.
a) $(9\,032-32)-2\,927=6\,105-32=6\,073$;
b) $(9\,032-5)-2\,927=6\,105-5=6\,100$;
c) $(9\,032-1\,000)-2\,927=6\,105-1\,000=5\,105$.
În general: $a-b=c \Rightarrow (a-d)-b=c-d$.
20) Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $8\,145=8\,146-1 \Rightarrow 8\,145-987=7\,159-1=7158$;
b) $8\,136=8\,146-10 \Rightarrow 8\,136-987=7159-10=7149$;
c) $8\,046=8\,146-100 \Rightarrow 8\,146-987=7\,159-100=7\,059$.
21) Dacă mărim scăzătorul cu un număr, descăzutul fiind acelaşi, diferența se micşorează cu acelaşi număr.
a) $501-(36+1)=465-1=464$;
b) $501-(36+10)=465-10=455$;
c) $501-(36+100)=465-100=365$.
În general: $a-b=c \Rightarrow a-(b+d)=c-d$.
22) Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $386=385+1 \Rightarrow 712-386=327-1=326$;
b) $395=385+10 \Rightarrow 712-395=327-10=317$;
c) $485=385+100 \Rightarrow 712-485=327-100=227$.
23) Dacă micşorăm scăzătorul cu un număr, descăzutul fiind acelaşi, diferența se măreşte cu acelaşi număr.
a) $1\,000-(786-1)=214+1=215$;
b) $1\,000-(786-10)=214+10=224$;
c) $1\,000-(786-100)=214+100=314$.
În general: $a-b=c \Rightarrow a-(b-d)=c+d$.
24) Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $1\,808=1\,809-1 \Rightarrow 3\,101-1\,808=1\,292+1=1\,293$;
b) $1\,799=1\,809-10 \Rightarrow 3\,101-1\,799=1\,292+10=1\,302$;
c) $1\,709=1\,809-100 \Rightarrow 3\,101-1\,709=1\,292+100=1\,392$.
25) Dacă mărim atât descăzutul, cât şi scăzătorul cu acelaşi număr, diferența rămâne neschimbată.
a) $(3\,102+2)-(983+2)=2\,119+2-2=2\,119$;
b) $(3\,102+20)-(983+20)=2\,119+20-20=2\,119$;
c) $(3\,102+200)-(983+200)=2\,119+200-200=2\,119$.
În general: $a-b=c \Rightarrow (a+d)-(b+d)=c$.
26) Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $\left.\begin{array}{r} 2\,024=2\,023+1 \\ 638=637+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,024-638=1\,386$;
b) $\left.\begin{array}{r} 2\,033=2\,023+10 \\ 647=637+10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,033-647=1\,386$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{3\,023=2\,023+1\,000}\\ \mathbf{1\,637=637+1\,000}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{3\,023-1\,637=1\,386}.$

27) Dacă micşorăm atât descăzutul, cât şi scăzătorul cu acelaşi număr, diferența rămâne neschimbată.

a) $\mathbf{(1\,713-3)-(824-3)=889-3+3=889}$;

b) $\mathbf{(1\,713-30)-(824-30)=889-30+30=889}$;

c) $\mathbf{(1\,713-300)-(824-300)=889-300+300=889}$;

În general: $\boldsymbol{a-b=c\Rightarrow(a-d)-(b-d)=c}$.

28) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{9\,099=9\,100-1}\\ \mathbf{7\,887=7\,888-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{9\,099-7\,887=1\,212}$;

b) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{9\,000=9\,100-100}\\ \mathbf{7\,788=7\,888-100}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{9\,000-7\,788=1\,212}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{8\,100=9\,100-1\,000}\\ \mathbf{6\,888=7\,888-1\,000}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{8\,100-6\,888=1\,212}.$

29) Dacă mărim descăzutul cu un număr şi micşorăm scăzătorul cu acelaşi număr, diferența se măreşte cu dublul acelui număr.

a) $\mathbf{(1\,114+1)-(367-1)=747+2\times1=749}$;

b) $\mathbf{(1\,114+40)-(367-40)=747+2\times40=747+80=827}$;

c) $\mathbf{(1\,114+100)-(367-100)=747+2\times100=747+200=947}$.

În general: $\boldsymbol{a-b=c\Rightarrow(a+d)-(b-d)=c+d+d=c+2d}$.

30) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2\,101=2\,100+1}\\ \mathbf{790=791-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{2\,101-790=1\,309+2\times1=1\,309+2=1\,311}$;

b) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2\,110=2\,100+10}\\ \mathbf{781=791-10}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{2\,110-781=1\,309+2\times10=1\,309+20=1\,329}$;

c) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2\,200=2\,100+100}\\ \mathbf{691=791-100}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{2\,200-691=1\,309+2\times100=1\,309+200=1\,509}.$

31) Dacă micşorăm descăzutul cu un număr şi mărim scăzătorul cu acelaşi număr, diferența se micşorează cu dublul acelui număr.

a) $\mathbf{(6\,106-1)-(3\,207+1)=2\,899-2\times1=2\,899-2=2\,897}$;

b) $\mathbf{(6\,106-100)-(3\,207+100)=2\,899-2\times100=2\,899-200=2\,699}$;

c) $\mathbf{(6\,106-1\,000)-(3\,207+1\,000)=2\,899-2\times1\,000=2\,899-2\,000=899}$.

În general: $\boldsymbol{a-b=c\Rightarrow(a-d)-(b+d)=c-d-d=c-2d}$.

32) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{6\,846=6\,847-1}\\ \mathbf{1\,979=1\,978+1}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{6\,846-1\,979=4\,869-2\times1=4\,869-2=4\,867}$;

b) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{6\,837=6\,847-10}\\ \mathbf{1\,988=1\,978+10}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{6\,837-1\,988=4\,869-2\times10=4\,869-20=4\,849}$;

c) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{5\,847=6\,847-1\,000}\\ \mathbf{2\,978=1\,978+1\,000}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathbf{5\,847-2\,978=4\,869-2\times1\,000=4\,869-2\,000=2\,869}$

33) Dacă mărim descăzutul cu $\boldsymbol{d}$, iar scăzătorul îl micşorăm cu $\mathbf{e}$, diferența se măreşte cu $\boldsymbol{d+e}$.

a) $\mathbf{(162+1)-(86-2)=76+(1+2)=76+3=79}$;

b) $\mathbf{(162+3)-(86-1)=76+(3+1)=76+4=80}$;

c) $\mathbf{(162+4)-(86-3)=76+(4+3)=76+7=83}$.

În general: $\boldsymbol{a-b=c\Rightarrow(a+d)-(b-e)=c+(d+e)}$.

34) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{aligned}918&=917+1\\176&=179-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow 918-176=738+(1+3)=738+4=742;$

b) $\left.\begin{aligned}927&=917+10\\171&=179-8\end{aligned}\right\}\Rightarrow 927-171=738+(10+8)=738+18=756;$

c) $\left.\begin{aligned}947&=917+30\\159&=179-20\end{aligned}\right\}\Rightarrow 947-159=738+(30+20)=738+50=788.$

35) Dacă micşorăm descăzutul cu ***d*** şi mărim scăzătorul cu ***e***, diferența se micşorează cu ***d + e***.

a) $(2\,437-5)-(978+4)=1\,459-(5+4)=1\,459-9=1\,450;$

b) $(2\,437-2)-(978+13)=1\,459-(2+13)=1\,459-15=1\,444;$

c) $(2\,437-17)-(978+15)=1\,459-(17+15)=1\,459-32=1\,427;$

În general: $a-b=c\Rightarrow(a-d)-(b+e)=c-(d+e).$

36) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{aligned}14\,765&=14\,766-1\\4\,369&=4\,367+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 14\,765-4\,369=10\,399-(1+2)=10\,399-3=$
$=10\,396;$

b) $\left.\begin{aligned}14\,666&=14\,766-100\\4\,567&=4\,367+200\end{aligned}\right\}\Rightarrow 14\,666-4\,567=10\,399-(100+200)=$
$=10\,399-300=10\,099;$

c) $\left.\begin{aligned}12\,766&=14\,766-2\,000\\5\,367&=4\,367+1\,000\end{aligned}\right\}\Rightarrow 12\,766-5\,367=10\,399-(2\,000+1\,000)=$
$=10\,399-3\,000=7\,399.$

37) Dacă mărim ambii termeni ai unei diferențe, descăzutul cu ***a***, iar scăzătorul cu ***b***, atunci:

– diferența se măreşte cu ***c***, dacă ***a – b = c***;

– diferența se micşorează cu ***d***, dacă ***b – a = d***.

a) $(2\,306+4)-(878+3)=1\,428+(4-3)=1\,428+1=1\,429;$

b) $(2\,306+3)-(878+4)=1\,428-(4-3)=1\,428-1=1\,427;$

c) $(2\,306+2)-(878+1)=1\,428+(2-1)=1\,428+1=1\,429.$

38) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{aligned}3\,002&=3\,001+1\\188&=186+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3\,002-188=2\,815-(2-1)=2\,815-1=2\,814;$

b) $\left.\begin{aligned}3\,011&=3\,001+10\\187&=186+1\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3\,011-187=2\,815+(10-1)=2\,815+9=2\,824;$

c) $\left.\begin{aligned}3\,010&=3\,001+9\\196&=186+10\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3\,010-196=2\,815-(10-9)=2\,815-1=2\,814.$

39) Dacă micşorăm ambii termeni ai unei diferențe, descăzutul cu ***a***, scăzătorul cu ***b***, atunci:

– diferența se micşorează cu ***c***, dacă ***a – b = c***;

– diferența se măreşte cu ***d***, dacă ***b – a = d***.

a) $(1\,597-3)-(999-2)=598-(3-2)=598-1=597;$

b) $(1\,597-7)-(999-8)=598+(8-7)=598+1=599;$

c) $(1\,597-8)-(999-7)=598-(8-7)=598-1=597.$

40) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{aligned}8\,690&=8\,696-6\\5\,579&=5\,589-10\end{aligned}\right\}\Rightarrow 8\,690-5\,579=3\,107+(10-6)=3\,107+4=3\,111;$

b) $\left.\begin{aligned}8\,496&=8\,696-200\\5\,489&=5\,589-100\end{aligned}\right\}\Rightarrow 8\,496-5\,489=3\,107-(200-100)=3107-100=$
$=3\,007;$

c) $\left.\begin{aligned}7\,696 = 8\,696 - 1\,000\\ 3\,589 = 5\,589 - 2\,000\end{aligned}\right\} \Rightarrow$ **7 696 – 3 589 = 3107 + (2 000 – 1 000) = 3107 + + 1 000 = 4 107.**

41) Dacă mărim un factor de un număr de ori, se măreşte şi produsul de acelaşi număr de ori.

a) $(6\times6)\times12=72\times6=432$;

b) $(6\times36)\times12=72\times36=2\,592$;

c) $6\times(12\times4)=72\times4=288$;

În general: $a\times b=c\Rightarrow(a\times d)\times b=c\times d$ sau $a\times(b\times d)=c\times d$.

42) Asemănător cu exerciţiul anterior:

a) $26=2\times13\Rightarrow26\times24=552\times2=1\,104$;

b) $48=2\times24\Rightarrow13\times48=2\times552=1\,104$;

c) $52=4\times13\Rightarrow52\times24=4\times552=2\,208$.

43) Dacă micşorăm un factor de un număr de ori, se micşorează şi produsul de acelaşi număr de ori.

a) $(8\,104:2)\times8=64\,832:2=32\,416$;

b) $8\,104\times(8:2)=64\,832:2=32\,416$;

c) $(8\,104:4)\times8=64\,832:4=16\,208$;

În general: $a\times b=c\Rightarrow(a:d)\times b=c:d$ sau $a\times(b:d)=c:d$.

44) Asemănător cu exerciţiul precedent:

a) $12=48:4\Rightarrow12\times96=4\,608:4=1\,152$;

b) $24=48:2\Rightarrow24\times96=4\,608:2=2\,304$;

c) $16=96:6\Rightarrow48\times16=4\,608:6=768$.

45) Dacă mărim ambii factori de acelaşi număr de ori, se măreşte şi produsul de acelaşi număr de ori la pătrat.

a) $(4\times2)\times(8\times2)=32\times(2\times2)=32\times4=128$;

b) $(4\times3)\times(8\times3)=32\times(3\times3)=32\times9=288$;

c) $(4\times5)\times(8\times5)=32\times(5\times5)=32\times25=800$.

46) Asemănător cu exerciţiul precedent:

a) $\left.\begin{aligned}36 = 9\times4\\ 24 = 6\times4\end{aligned}\right\}\Rightarrow36\times24=54\times(4\times4)=54\times16=864$;

b) $\left.\begin{aligned}90 = 9\times10\\ 60 = 6\times10\end{aligned}\right\}\Rightarrow90\times60=54\times(10\times10)=54\times100=5\,400$;

c) $\left.\begin{aligned}72 = 9\times8\\ 48 = 6\times8\end{aligned}\right\}\Rightarrow72\times48=54\times(8\times8)=54\times64=3\,456$.

47) Dacă micşorăm ambii factori de acelaşi număr de ori, se micşorează şi produsul de acelaşi număr de ori la pătrat.

a) $(174:2)\times(126:2)=21\,924:(2\times2)=21\,924:4=5\,481$;

b) $(174:3)\times(126:3)=21\,924:(3\times3)=21\,924:9=2\,436$;

c) $(174:6)\times(126:6)=21\,924:(6\times6)=21\,924:36=609$.

În general: $a\times b=c\Rightarrow(a:d)\times(b:d)=c:(d\times d)$.

48) Asemănător cu exerciţiul anterior:

a) $\left.\begin{aligned}62=186:3\\ 26=78:3\end{aligned}\right\}\Rightarrow62\times26=14\,508:(3\times3)=14\,508:9=1\,612$;

b) $\left.\begin{aligned}93=186:2\\ 39=78:2\end{aligned}\right\}\Rightarrow93\times39=14\,508:4=3\,627$;

c) $\left.\begin{aligned}31=186:6\\ 13=78:6\end{aligned}\right\}\Rightarrow31\times13=14\,508:36=403$.

49) Dacă mărim ambii factori, primul de ***a*** ori, al doilea de ***b*** ori, produsul dat se măreşte de $a \times b$ ori.

a) $(6 \times 2) \times (8 \times 4) = 48 \times (2 \times 4) = 48 \times 8 = 384$;

b) $(6 \times 3) \times (8 \times 2) = 48 \times (3 \times 2) = 48 \times 6 = 288$;

c) $(6 \times 2) \times (8 \times 3) = 48 \times (2 \times 3) = 48 \times 6 = 288$.

În general: $a \times b = c \Rightarrow (a \times d) \times (b \times e) = c \times (d \times e)$.

50) Asemănător cu exerciţiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r} 72 = 2 \times 36 \\ 72 = 3 \times 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 72 \times 72 = 864 \times (2 \times 3) = 864 \times 6 = 5\,184$;

b) $\left.\begin{array}{r} 108 = 36 \times 3 \\ 48 = 24 \times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 108 \times 48 = 864 \times (3 \times 2) = 864 \times 6 = 5\,184$;

c) $\left.\begin{array}{r} 144 = 36 \times 4 \\ 72 = 24 \times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 144 \times 72 = 864 \times (4 \times 3) = 864 \times 12 = 10\,368$.

51) Dacă micşorăm ambii factori, primul de ***a*** ori, al doilea de ***b*** ori, produsul dat se micşorează de $a \times b$ ori.

a) $(4\,788 : 4) \times (1\,872 : 2) = 8\,963\,136 : (4 \times 2) = 8\,963\,136 : 8 = 1\,120\,392$;

b) $(4\,788 : 2) \times (1\,872 : 3) = 8\,963\,136 : (2 \times 3) = 8\,963\,136 : 6 = 1\,493\,856$;

c) $(4\,788 : 3) \times (1\,872 : 2) = 8\,963\,136 : (3 \times 2) = 8\,963\,136 : 6 = 1\,493\,856$.

În general: $a \times b = c \Rightarrow (a : d) \times (b : e) = c : (d \times e)$.

52) Asemănător cu exerciţiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r} 1\,233 = 3\,699 : 3 \\ 936 = 1\,872 : 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1\,233 \times 936 = 6\,924\,528 : (3 \times 2) = 6\,924\,528 : 6 =$
$= 1\,154\,088$;

b) $\left.\begin{array}{r} 411 = 3\,699 : 9 \\ 624 = 1\,872 : 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 411 \times 624 = 6\,924\,528 : (9 \times 3) = 6\,924\,528 : 27 = 256\,464$;

c) $\left.\begin{array}{r} 137 = 3\,699 : 27 \\ 468 = 1\,872 : 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 137 \times 468 = 6\,924\,528 : (27 \times 4) = 6\,924\,528 : 108 = 64\,116$.

53) Dacă mărim unul dintre factori de un număr de ori, iar pe celălalt îl micşorăm de acelaşi număr de ori, produsul dat rămâne neschimbat.

a) $(2\,024 \times 4) \times (4\,048 : 4) = 8\,193\,152 \times (4 : 4) = 8\,193\,152 \times 1 = 8\,193\,152$;

b) $(2\,024 : 8) \times (4\,048 \times 8) = 8\,193\,152 \times (8 : 8) = 8\,193\,152 \times 1 = 8\,193\,152$;

c) $(2\,024 : 2) \times (4\,048 \times 2) = 8\,193\,152$.

În general: $a \times b = c \Rightarrow (a \times d) \times (b : d) = c$.

54) Asemănător cu exerciţiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{r} 81 = 324 : 4 \\ 912 = 228 \times 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 81 \times 912 = 73\,872$;

b) $\left.\begin{array}{r} 108 = 324 : 3 \\ 684 = 228 \times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 108 \times 684 = 73\,872$;

c) $\left.\begin{array}{r} 668 = 324 \times 2 \\ 114 = 228 : 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 668 \times 114 = 73\,872$.

55) Într-un produs de doi factori, dacă mărim unul dintre factori de ***a*** ori, iar pe celălalt îl micşorăm de ***b*** ori, atunci:

– în cazul în care $a : b = c$, produsul se măreşte de ***c*** ori;

– în cazul în care $b : a = d$, produsul se micşorează de ***d*** ori.

a) $(28 \times 4) \times (36 : 2) = 1\,008 \times (4 : 2) = 1\,008 \times 2 = 2\,016$;

b) $(28 : 2) \times (36 \times 6) = 1\,008 \times (6 : 2) = 1\,008 \times 3 = 3\,024$;

c) $(28 \times 2) \times (36 : 4) = 1\,008 : (4 : 2) = 1\,008 : 2 = 504$.

56) Asemănător cu exerciţiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r} 36 = 324 : 9 \\ 864 = 288 \times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 36 \times 864 = 93\,312 : (9 : 3) = 93\,312 : 3 = 31\,104$ sau
$93\,312 : 9 \times 3 = 10\,368 \times 3 = 31\,104$;

b) $\left.\begin{array}{r} 648 = 324 \times 2 \\ 48 = 288 : 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 648 \times 48 = 93\,312 : (6 : 2) = 93\,312 : 3 = 31\,104$ sau $93\,312 : 6 \times 2 = 15\,552 \times 2 = 31\,104$;

c) $\left.\begin{array}{r} 81 = 324 : 4 \\ 576 = 288 \times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 81 \times 576 = 93\,312 : (4 : 2) = 93\,312 : 2 = 46\,656$ sau $93\,312 : 4 \times 2 = 23\,328 \times 2 = 46\,656$.

57) Într-un produs de doi factori, dacă mărim unul dintre factori cu un număr, rezultatul se măreşte cu produsul dintre acel număr şi celălalt factor.

a) $(37 + 10) \times 12 = 444 + 12 \times 10 = 444 + 120 = 564$;

b) $(37 + 5) \times 12 = 444 + 5 \times 12 = 444 + 60 = 504$;

c) $37 \times (12 + 6) = 444 + 6 \times 37 = 444 + 222 = 666$.

În general: $\boldsymbol{a \times b = c \Rightarrow (a + d) \times b = c + d \times b}$ sau $\boldsymbol{a \times b = c \Rightarrow a \times (b + d) = c + a \times d}$.

58) Asemănător cu exerciţiul anterior:

a) $102 = 92 + 10 \Rightarrow 102 \times 18 = 1\,656 + 10 \times 18 = 1\,656 + 180 = 1\,736$ sau $(92 + 10) \times 18 = 92 \times 18 + 10 \times 18 = 1\,656 + 180 = 1\,736$;

b) $28 = 18 + 10 \Rightarrow 92 \times 28 = 1\,656 + 10 \times 92 = 1\,656 + 920 = 2\,576$ sau $92 \times (18 + 10) = 92 \times 18 + 92 \times 10 = 1\,656 + 920 = 2\,576$;

c) $23 = 18 + 5 \Rightarrow 92 \times 23 = 1\,656 + 5 \times 92 = 1\,656 + 460 = 2\,116$ sau $92 \times (18 + 5) = 92 \times 8 + 92 \times 5 = 1\,656 + 460 = 2\,116$.

59) Într-un produs de doi factori, dacă micşorăm unul dintre factori cu un număr, rezultatul dat se micşorează cu produsul din acel număr şi celălalt factor.

a) $(28 - 10) \times 43 = 1\,204 - 10 \times 43 = 1\,204 - 430 = 774$;

b) $28 \times (43 - 10) = 1\,204 - 28 \times 10 = 1\,204 - 280 = 924$;

c) $(28 - 2) \times 43 = 1\,204 - 2 \times 43 = 1\,204 - 86 = 1\,118$.

În general: $\boldsymbol{a \times b = c \Rightarrow (a - d) \times b = c - d \times b}$ sau $\boldsymbol{a \times b = c \Rightarrow a \times (b - d) = c - a \times d}$.

60) Asemănător cu exerciţiul anterior:

a) $294 = 394 - 100 \Rightarrow 294 \times 189 = 74\,466 - 189 \times 100 = 74\,466 - 18\,900 = 55\,566$ sau $(394 - 100) \times 189 = 394 \times 189 - 100 \times 189 = 74\,466 - 18\,900 = 55\,566$;

b) $89 = 189 - 100 \Rightarrow 394 \times 89 = 74\,466 - 100 \times 394 = 74\,466 - 39400 = 35\,066$ sau $394 \times (189 - 100) = 394 \times 189 - 394 \times 100 = 74\,466 - 39\,400 = 35\,066$;

c) $384 = 394 - 10 \Rightarrow 384 \times 189 = 74\,466 - 10 \times 189 = 74\,466 - 1\,890 = 72\,576$ sau $(394 - 10) \times 189 = 394 \times 189 - 10 \times 189 = 74\,466 - 1\,890 = 72\,576$.

61) Dacă mărim deîmpărţitul de un număr de ori, împărţitorul fiind neschimbat, câtul se măreşte de acelaşi număr de ori.

a) $(120 \times 2) : 4 = 30 \times 2 = 60$;

b) $(120 \times 10) : 4 = 30 \times 10 = 300$;

c) $(120 \times 3) : 4 = 30 \times 3 = 90$.

În general: $\boldsymbol{a : b = c \Rightarrow (a \times d) : b = c \times d}$.

62) Asemănător cu exerciţiul anterior:

a) $532 = 4 \times 133 \Rightarrow 532 : 19 = 4 \times 7 = 28$;

b) $399 = 3 \times 133 \Rightarrow 399 : 19 = 3 \times 7 = 21$;

c) $1\,064 = 8 \times 133 \Rightarrow 1\,064 : 19 = 8 \times 7 = 56$.

63) Dacă micşorăm deîmpărţitul de un număr de ori, împărţitorul fiind neschimbat, câtul se micşorează de acelaşi număr de ori.

a) $(120:2):4=30:2=15$;
b) $(120:10):4=30:10=3$;
c) $(120:3):4=30:3=10$.

În general: $\boldsymbol{a:b=c \Rightarrow (a:d):b=c:d}$.

64) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $192=960:5 \Rightarrow 192:24=40:5=8$;
b) $120=960:8 \Rightarrow 120:24=40:8=5$;
c) $96=960:10 \Rightarrow 96:24=40:10=4$.

65) Dacă mărim împărțitorul de un număr de ori, deîmpărțitul fiind neschimbat, câtul se micșorează de același număr de ori.

a) $120:(4\times3)=30:3=10$;
b) $120:(4\times2)=30:2=15$;
c) $120:(4\times6)=30:6=5$.

În general: $\boldsymbol{a : b = c \Rightarrow a : (b\times d) = c : d}$.

66) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $45=3\times15 \Rightarrow 675:45=45:3=15$;
b) $75=5\times15 \Rightarrow 675:75=45:5=9$;
c) $225=15\times15 \Rightarrow 675:225=45:15=3$.

67) Dacă micșorăm împărțitorul de un număr de ori, deîmpărțitul fiind același, câtul se mărește de același număr de ori.

a) $126:(18:2)=7\times2=14$;
b) $126:(18:3)=7\times3=21$;
c) $126:(18:9)=7\times9=63$.

În general: $\boldsymbol{a : b = c \Rightarrow a : (b : d) = c\times d}$.

68) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $18=36:2 \Rightarrow 432:18=12\times2=24$;
b) $9=36:4 \Rightarrow 432:9=12\times4=48$;
c) $3=36:12 \Rightarrow 432:3=12\times12=144$.

69) Dacă mărim atât deîmpărțitul, cât și împărțitorul de același număr de ori, câtul rămâne neschimbat.

a) $(120\times2):(4\times2)=240:8=30$;
b) $(120\times10):(4\times10)=30$;
c) $(120\times5):(4\times5)=30$.

În general: $\boldsymbol{a:b=c \Rightarrow a\times d:(b\times d)=c}$.

70) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{l}288=2\times144\\ 24=2\times12\end{array}\right\} \Rightarrow 288 : 24 = 12$;

b) $\left.\begin{array}{l}720=5\times144\\ 60=5\times12\end{array}\right\} \Rightarrow 720 : 60 = 12$;

c) $\left.\begin{array}{l}1\,440=1\times144\\ 120=10\times12\end{array}\right\} \Rightarrow 1\,440 : 120 = 12$.

71) Dacă micșorăm atât deîmpărțitul, cât și împărțitorul de același număr de ori, câtul rămâne neshimbat.

a) $(4\,944:2):(48:2)=2\,472:24=103$;
b) $(4\,944:4):(48:4)=103$;
c) $(4\,944:6):(48:6)=103$.

În general: $\boldsymbol{a:b=c \Rightarrow (a:d):(b:d)=c}$.

72) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2\,520=5\,040:2} \\ \mathbf{24=48:2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{2\,520:24=105};$

b) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{1680=5\,040:3} \\ \mathbf{16=48:3} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{1680:16=105};$

c) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{840=5\,040:6} \\ \mathbf{8=48:6} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{840:8=105}.$

73) Dacă mărim deîmpărțitul de un număr de ori şi micşorăm împărțitorul de acelaşi număr de ori, câtul se măreşte de acel număr de ori la pătrat.

a) $\mathbf{(13\,392\times3):(558:3)=24\times(3\times3)=24\times9=216;}$

b) $\mathbf{(13\,392\times9):(558:9)=24\times(9\times9)=24\times81=1\,944;}$

c) $\mathbf{(13\,392\times2):(558:2)=24\times(2\times2)=24\times4=96.}$

În general: $\boldsymbol{a:b=c\Rightarrow(a\times d):(b:d)=c\times(d\times d)}$.

74) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{928\,512=116\,064\times8} \\ \mathbf{78=624:8} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{928\,512:78=186\times(8\times8)=186\times64=11\,904};$

b) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{464\,256=116\,064\times4} \\ \mathbf{156=624:4} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{464\,256:156=186\times(4\times4)=186\times16=2\,976};$

c) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{348\,192=116\,064\times3} \\ \mathbf{208=624:3} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{348\,192:208=186\times(3\times3)=186\times9=1\,674}.$

75) Dacă micşorăm deîmpărțitul de un număr de ori şi mărim împărțitorul de acelaşi număr de ori, câtul se micşorează de acel număr de ori la pătrat.

a) $\mathbf{(720:2):(4\times2)=180:(2\times2)=180:4=45;}$

b) $\mathbf{(720:3):(4\times3)=180:(3\times3)=180:9=20;}$

c) $\mathbf{(720:6):(4\times6)=180:(6\times6)=180:36=5.}$

În general: $\boldsymbol{a:b=c\Rightarrow(a:d):(b\times d)=c:(d\times d)}$.

76) Asemănător cu exercițiul precedent:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{157\,248=471\,744:3} \\ \mathbf{1\,512=504\times3} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{157\,248:1\,512=936:(3\times3)=936:9=104};$

b) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{235\,872=471\,744:2} \\ \mathbf{1\,008=504\times2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{235\,872:1\,008=936:(2\times2)=936:4=234};$

c) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{78\,624=471\,744:6} \\ \mathbf{3\,024=504\times6} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{78\,624:3\,024=936:(6\times6)=936:36=26}.$

77) Dacă mărim deîmpărțitul de $\boldsymbol{d}$ ori, iar împărțitorul îl micşorăm de $\boldsymbol{e}$ ori, câtul se măreşte de $\boldsymbol{d\times e}$ ori.

a) $\mathbf{(2\,640\times4):(24:2)=110\times(4\times2)=110\times8=880;}$

b) $\mathbf{(2\,640\times3):(24:2)=110\times(3\times2)=110\times6=660;}$

c) $\mathbf{(2\,640\times2):(24:3)=110\times(2\times3)=110\times6=660.}$

În general: $\boldsymbol{a:b=c\Rightarrow(a\times d):(b:e)=c\times(d\times e)}$.

78) Asemănător cu exercițiul anterior:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{220\,736=110\,368\times2} \\ \mathbf{97=388:4} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{220\,736:97=286\times(2\times4)=286\times8=2\,288};$

b) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{331\,104=110\,368\times3} \\ \mathbf{194=388:2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{331\,104:194=286\times(3\times2)=286\times6=1\,716};$

c) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{441\,472=110\,368\times4} \\ \mathbf{194=388:2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{441\,472:194=286\times(4\times2)=286\times8=2\,288}.$

79) Dacă micşorăm deîmpărțitul de $\boldsymbol{d}$ ori şi mărim împărțitorul de $\boldsymbol{e}$ ori, câtul se micşorează de $\boldsymbol{d\times e}$ ori.

a) $\mathbf{(10\,656:2):(24\times3)=444:(2\times3)=444:6=74;}$

b) $(10\,656:6):(24\times2)=444:(6\times2)=444:12=37$;
c) $(10\,656:3):(24\times2)=444:(3\times2)=444:6=74$.
În general: $a:b=c\Rightarrow(a:d):(b\times e)=c:(d\times e)$.
80) Asemănător cu exercițiul anterior:
a) $\left.\begin{aligned}4\,704&=18\,816:4\\168&=84\times2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4\,704:168=224:(4\times2)=224:8=28$;
b) $\left.\begin{aligned}2\,352&=18\,816:8\\168&=84\times2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\,352:168=224:(8\times2)=224:16=14$;
c) $\left.\begin{aligned}9\,408&=18\,816:2\\336&=84\times4\end{aligned}\right\}\Rightarrow 9\,408:336=224:(2\times4)=224:8=28$.
81) Dacă mărim ambii termeni ai unei împărțiri, primul de ***a*** ori, al doilea de ***b*** ori, atunci:
– câtul se mărește de ***c*** ori, dacă $a:b=c$;
– câtul se micşorează de ***d*** ori, dacă $b:a=d$.
a) $(21\,384\times6):(594\times3)=36\times(6:3)=36\times2=72$;
b) $(21\,384\times3):(594\times6)=36:(6:3)=36:2=18$;
c) $(21\,384\times9):(594\times3)=36\times(9:3)=36\times3=108$.
82) Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{aligned}87\,552&=43\,776\times2\\3\,648&=912\times4\end{aligned}\right\}\Rightarrow 87\,552:3\,648=48:(4:2)=48:2=24$;
b) $\left.\begin{aligned}175\,104&=43\,776\times4\\1\,824&=912\times2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 175\,104:1\,824=48\times(4:2)=48\times2=96$;
c) $\left.\begin{aligned}87\,552&=43\,776\times2\\5\,472&=912\times6\end{aligned}\right\}\Rightarrow 87\,552:5\,472=48:(6:2)=48:3=16$.
83) Dacă micșorăm ambii termeni ai unei împărțiri, primul de ***a*** ori, al doilea de ***b*** ori, atunci:
– câtul se micşorează de ***c*** ori, dacă $a:b=c$;
– câtul se mărește de ***d*** ori, dacă $b:a=d$.
a) $(30\,752:4):(248:2)=124:(4:2)=124:2=62$;
b) $(30\,752:2):(248:4)=124\times(4:2)=124\times2=248$;
c) $(30\,752:4):(248:8)=124\times(8:4)=124\times2=248$.
84) Asemănător cu exercițiul precedent:
a) $\left.\begin{aligned}384&=3\,072:8\\96&=384:4\end{aligned}\right\}\Rightarrow 384:96=8:(8:4)=8:2=4$;
b) $\left.\begin{aligned}768&=3\,072:4\\192&=384:2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 768:192=8:(4:2)=8:2=4$;
c) $\left.\begin{aligned}1\,536&=3\,072:2\\96&=384:4\end{aligned}\right\}\Rightarrow 1\,536:96=8\times(4:2)=8\times2=16$.

57. 1) Ştiind că adunarea numerelor naturale este o operație asociativă şi comutativă, putem scrie: $(60+b)+a=60+(a+b)=60+32=92$.
2) Deoarece $(2+a)+b=2+(a+b)\Rightarrow(2+a)+b=2+3=5$.
3) Deoarece $18+(a+5)=(18+a)+5\Rightarrow18+(a+5)=20+5=25$.
4) Deoarece $(200+100)+x=200+(x+100)\Rightarrow(200+100)+x=200+$ $+200=400$.
5) Deoarece $20+(x+19)=(20+x)+19\Rightarrow20+(x+19)=35+19=54$.
6) Deoarece înmulțirea de numere naturale este o operație asociativă, rezultă: $(4\times a)\times b=4\times(a\times b)=4\times200=800$.

7) Deoarece înmulțirea este o operație asociativă și comutativă, putem scrie: $(8\times7)\times a=8\times(a\times7)=8\times91=728$.
8) Deoarece $9\times(7\times a)=(9\times a)\times7$, rezultă: $9\times(7\times a)=630\times7=4\,410$.
9) Deoarece $a\times(5\times2\times10)=(a\times10)\times(5\times2)$, rezultă:
$a\times(5\times2\times10)=130\times10=1\,300$.
10) Înmulțirea este distributivă față de adunare. Deci:
$a\times(b+c)=a\times b+a\times c=96+120=216$.
11) Deoarece $z\times(u+y)=z\times u+z\times y\Rightarrow 98+140=238$.
12) Înmulțirea este distributivă și față de scădere. Deci:
$a\times(b-c)=a\times b-a\times c=288-120=168$.
13) Deoarece $m\times(n-p)=mn-mp\Rightarrow m\times(n-p)=128-48=80$.
14) Avem de calculat suma a două produse care au ca factor comun pe x. Scoatem în factor comun și obținem: $xy+xz=x(y+z)=8\times23=184$. (Altfel spus: care era exercițiul ce a devenit $xy+xz$? Evident, $x(y+z)=xy+xz$, căci înmulțirea este distributivă față de adunare).
15) Deoarece $a\times b+a\times c=a\times(b+c)$, rezultă $a\times b+a\times c=18\times19=342$.
16) Avem de calculat o diferență de produse care au ca factor comun pe x. Scoatem în factor comun și obținem: $x\times y-x\times z=x\times(y-z)=14\times3=42$. (Se observă că scrierea $xy-xz$ a fost obținută prin aplicarea distributivității înmulțirii față de scădere, adică: $x\times(y-z)=x\times y-x\times z$).
17) Deoarece $a\times b-a\times c=a\times(b-c)$, rezultă: $a\times b-a\times c=80\times5=400$.
18) Deoarece $x\times y+x\times z=x\times(y+z)$, rezultă: $2x\times(y+z)=2\times476=952$.
19) Deoarece $ab+ac=a(b+c)=(b+c)\cdot a$, rezultă:
$(b+c)\cdot3a=285\cdot3=855$.
20) Deoarece $xy-xz=x(y-z)$, rezultă $5x(y-z)=5\cdot26=130$.
21) Deoarece $ab-ac=a(b-c)=(b-c)\times a$, rezultă:$(b-c)\times a:8=64:8=8$.
22) Deoarece $a(b+c)=ab+ac$, iar $a(b-c)=ab-ac$, rezultă: $a(b+c):4=$ $=(608+416):4=1\,024:4=256$, iar $a(b-c):6=(608-416):6=$ $=192:6=32$.

58. Deoarece $ac-ab=a(c-b)$, iar b și c sunt numere consecutive pare, deci $c-b=2$; rezultă $ac-ab=a\cdot2=32$, iar $a=32:2\Leftrightarrow a=16$; $b=16+2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b=18$; $c=18+2\Leftrightarrow c=20$.

59. Deoarece $ab+ac=a(b+c)$, rezultă: $21\cdot(b+c)=252$, iar $b+c=252:21=$ $=12$. Deoarece $b+c=12$, iar $b=2c$, rezultă: $2c+c=12\Leftrightarrow3c=12\Rightarrow c=4$, iar $b=8$.

60. Orice număr natural diferit de **1**, care se împarte doar la **1** și la el însuși (are numai doi divizori) se numește număr prim. În general, orice număr prim este impar, cu excepția lui **2**, care este număr prim, dar par. Rezultă $x=2$.
a) deoarece $xy+xz=x(y+z)$, rezultă $2(y+z)=168$, iar $y+z=168:2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y+z=84$. Atunci $x+y+z=2+84=86$.
b) $x+2y+2z=x+2(y+z)=2+2\cdot84=2+168=170$.
c) $4x+4y+4z=4\times2+4\times(y+z)=4\times2+4\cdot84=8+336=344$.
d) $10x+y+z=10\times2+84=20+84=104$.
e) $x(y+z)\times7=(xy+xz)\cdot7=168\times7=1\,176$.
f) Deoarece $y+z=84$, iar $x=2$, rezultă: $(y+z):x=84:2=42$.

61. a) Deoarece $ab + ac = a(b + c)$, rezultă:
$(ab + ac) : (b + c) : a = a(b + c) : (b + c) : a = a : a = 1$.
b) Deoarece $ab - ac = a(b - c)$, rezultă:
$(ab - ac) : (b - c) : a = a(b - c) : (b - c) : a = a : a = 1$.
c) Scriind sistematic numerele date, avem:
$[(1\,000a + 100b + 10c + d) + (100a + 10b + c) - (100b + 10c + d) - (10b + c)] : (10a + a) = (1\,000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c - 100b - 10c - d - 10b - c) : 11a = 1\,100a : 11a = 100$.
Sau: $[\overline{abc0} + d + \overline{abc} - (\overline{bc0} + d) - \overline{bc}] : 11a =$
$= (10\overline{abc} + \overline{abc} + d - 10\overline{bc} - \overline{bc} - d) : 11a = (11\overline{abc} - 11\overline{bc}) : 11a =$
$= 11(\overline{abc} - \overline{bc}) : 11a = (\overline{abc} - \overline{bc}) : a = (100a + \overline{bc} - \overline{bc}) : a = 100a : a = 100$.
Sau: $(1\,000a + \overline{bcd} - \overline{bcd} + 100a + \overline{bc} - \overline{bc}) : 11a = 1\,100a : 11a = 100$.
d) $[(1\,000a + 100b + 10c + d) - (100b + 10c + d)] : 10a - [(100b + 10c + d) - (10c + d)] : b = (1\,000a + 100b + 10c + d - 100b - 10c - d) : 10a - (100b + 10c + d - 10c - d) : b = 1\,000a : 10a - 100b : b = 100 - 100 = 0$.
Sau: $(1\,000a + \overline{bcd} - \overline{bcd}) : 10a - (100b + \overline{cd} - \overline{cd}) : b =$
$= 1\,000a : 10a - 100b : b = 100 - 100 = 0$.
Am folosit şi aici scrierea *sistematică*.

Observaţii metodice:
În clasele a III-a şi a IV-a, elevii învaţă să scrie numerele naturale ca sumă "în care fiecare termen conţine unităţi de un singur ordin"; la formarea numerelor învaţă cheia sistemului de numeraţie zecimal (***10** unităţi* de un anumit ordin formează *o unitate de ordin superior*), iar în clasa a IV-a întâlnesc exerciţii de forma $\overline{ab} + \overline{ba} = 44$ sau $n = \overline{xyut}$. Asemenea priceperi şi deprinderi ar putea fi consolidate cu enunţuri de felul celor ce urmează:

1) Scrieţi câte zeci şi câte unităţi au (scrieţi sistematic) numerele: **68**; **94**.
Răspuns: $68 = 6\times10 + 8$; $94 = 9\times10 + 4 = 10\times9 + 4$.
În general:
a) $\overline{ab} = a\times10 + b = 10a + b$;
b) $\overline{a0} = 10a$;
c) $\overline{aa} = 10a + a = 11a$.
2) Scrieţi sistematic (din câte sute, câte zeci şi câte unităţi sunt formate) numerele: **134** şi **908**.
Răspuns: $134 = 1\times100 + 3\times10 + 4 = 100\times1 + 10\times3 + 4$;
$908 = 9\times100 + 0\times10 + 8 = 100\times9 + 8$.
În general:
a) $\overline{abc} = a\times100 + b\times10 + c = 100a + 10b + c$;
b) $\overline{aa0} = 100a + 10a + 0 = 110a$;
c) $\overline{a00} = 100a + 0\times10 + 0 = 100a$.
3) Scrieţi sistematic (din câte mii, câte sute, câte zeci şi câte unităţi sunt formate) numerele: **1 306**; **9 860**.
Răspuns: $1\,306 = 1\,000\times1 + 100\times3 + 10\times0 + 6$;
$9\,860 = 1\,000\times9 + 100\times8 + 10\times6 + 0$.
În general:
a) $\overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$;

b) $\overline{abab} = \mathbf{1\,000}\boldsymbol{a} + \mathbf{100}\boldsymbol{b} + \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{1\,010}\boldsymbol{a} + \mathbf{101}\boldsymbol{b} = \mathbf{101(10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mathbf{)}$ sau:
$\overline{abab} = \overline{ab00} + \overline{ab} = \mathbf{100}\,\overline{ab} + \overline{ab} = \mathbf{101}\overline{ab}$.
c) $\overline{abc\,abc} = \overline{abc\,000} + \overline{abc} = \mathbf{1\,000}\overline{abc} + \overline{abc} = 1\,001\overline{abc}$ etc.
4) Scrieți câte sute sunt în numerele: **2 384**; **9 865**.
Răspuns: Deoarece **2 384 = 2 300 + 84 = 23×100 + 84**, rezultă că sunt **23** de sute întregi (şi **84** de unități); deoarece **9 865 = 9 800 + 65 = 98×100 + 65**, rezultă că sunt **98** de sute întregi (şi **65** de unități).
5) Scrieți câte zeci sunt în numerele: **68 504**; **136 812**.
Răspuns: **68 504 = 68 500 + 4 = 6 850×10 + 4**, deci sunt **6 850** de zeci (şi **4** unități); **136 812 = 136 810 + 2 = 13 681×10 + 2**, deci sunt **13 681** de zeci întregi (şi **2** unități).
În general:
a) în numărul $\overline{abc}$ sunt $\overline{ab}$ zeci, căci $\overline{abc} = \overline{ab}\times\mathbf{10} + \boldsymbol{c}$;
b) în numărul $\overline{abcde}$ sunt $\overline{abc}$ sute, căci $\overline{abcde} = \overline{abc}\times\mathbf{100} + \overline{de}$.

62. a) $\mathbf{5\times8 = 8+8+8+8+8}$ sau $\mathbf{5+5+5+5+5+5+5+5}$;
b) $6b = b+b+b+b+b+b$ sau $\underbrace{6+6+6+\ldots+6}_{\text{de } b \text{ ori}}$;
c) $ab = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{\text{de } a \text{ ori}}$ sau $\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{\text{de } b \text{ ori}}$.

63. a) $\mathbf{4\times7}\ \square\ \mathbf{6\times4} \Leftrightarrow \mathbf{4\times7}\ \boxed{>}\ \mathbf{4\times6}$ sau $\mathbf{7\times4}\ \boxed{>}\ \mathbf{6\times4}$;
b) $\mathbf{8+8+8+8+8}\ \square\ \mathbf{4\times8} \Leftrightarrow \mathbf{5\times8}\ \boxed{>}\ \mathbf{4\times8}$ sau $\mathbf{8\times5}\ \boxed{>}\ \mathbf{8\times4}$;
c) $2a\ \boxed{\leq}\ 3a$. Dacă $a = 0$, $2a = 3a$. Dacă $a \neq 0$, $2a < 3a$.

64. a) Reformulare parțială: Aflați două numere naturale $(x + 3)$ şi $(y - 2)$ care înmulțite între ele dau produsul **12.** Avem vreo informație care să ne coordoneze căutările? Da. $3 \leq 3 + x \leq 12$, căci $y - 2 \neq 0$. (Dacă $y - 2 = 0$, atunci produsul este **0**, ceea ce nu convine). Rezultă: $(x + 3) \in \{6, 4, 3, 12\}$, adică: $(x+3)(y-2) = 12$;

$6\times2 = 12$; $\quad 4\times3 = 12$; $\quad 3\times4 = 12$; $\quad 12\times1 = 12$.

Dacă $x + 3 = 6$, rezultă $x = 3$, iar $y - 2 = 2$, deci $y = 4$;
dacă $x + 3 = 4$, rezultă $x = 1$, iar $y - 2 = 3$, deci $y = 5$;
dacă $x + 3 = 3$, rezultă $x = 0$, iar $y - 2 = 4$, deci $y = 6$;
dacă $x + 3 = 12$, rezultă $x = 9$, iar $y - 2 = 1$, deci $y = 3$.
b) Deoarece $16 = 4\times4 = 8\times2 = 2\times8 = 16\times1 = 1\times16$, iar $(y + 4) \geq 4$, rezultă $(y+4) \in \{4, 8, 16\}$.
Dacă $y + 4 = 4$, rezultă $y = 0$, iar $x + 1 = 4$, deci $x = 3$;
dacă $y + 4 = 8$, rezultă $y = 4$, iar $x + 1 = 2$, deci $x = 1$;
dacă $y + 4 = 16$, rezultă $y = 12$, iar $x + 1 = 1$, deci $x = 0$.
c) Deoarece $y + 7 \geq 7$, iar $14 = 2\times7 = 1\times14$, rezultă $(y + 7) \in \{7, 14\}$.
Dacă $y + 7 = 7 \Rightarrow y = 0$, iar $x - 7 = 2$, deci $x = 9$;
dacă $y + 7 = 14$, rezultă $y = 7$, iar $x - 7 = 1$, deci $x = 8$.
d) Din scrierea $(x - 10) \in \mathbb{N}$ rezultă $x \geq 10$, iar din $(10 - x) \in \mathbb{N}$, rezultă $x \leq 10$.

Din $x \geq 10$ şi $x \leq 10$ rezultă $x = 10$, iar $y = 0$, căci $(x - 10)(10 - x) = y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (10-10)(10-10) = 0 \times 0 = 0$.

65. O soluție ar putea fi:
a) $9 \times 8 \; \square \; (8+4) \times 6 \Leftrightarrow 9 \times 8 \; \square \; 8 \times 6 + 4 \times 6 \Leftrightarrow 9 \times 8 \; \square \; 8 \times 6 + 4 \times 2 \times 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9 \times 8 \; \square \; 8 \times 6 + 8 \times 3 \Leftrightarrow 9 \times 8 \; \square \; 8(6+3) \Leftrightarrow 9 \times 8 \; \square \; 8 \times 9$.
b) $2 \times 6 \; \square \; 3 \times 4 \Leftrightarrow 2 \times 6 \square 3 \times (2+2) \Leftrightarrow 2 \times 6 \square \; 3 \times 2 + 3 \times 2 \Leftrightarrow 2 \times 6 \square \; 6+6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 \times 6 \; \boxed{=} \; 2 \times 6$.

66. Din scrierea $(a-8) \in \mathbf{N}$, rezultă $a \geq 8$; din scrierea $(8-a) \in \mathbf{N}$ rezultă $a \leq 8$. Din $a \geq 8$ şi $a \leq 8$ rezultă $a = 8$. Rezultă $(8-8) \bullet (8-8) \times 8 < (8-8) \times (8-8) + 8$, căci $0 \bullet 0 \bullet 8 < 0 \bullet 0 + 8$, adică $0 < 8$.

67. a) $a \times a + a \times a = 18 \Leftrightarrow 2 \times a \times a = 18 \Rightarrow a \times a = 18 : 2 \Leftrightarrow a \times a = 9 \Rightarrow a = 3$;
b) $a \times a \times a + a \times a \times a = 54 \Leftrightarrow 2 \times a \times a \times a = 54 \Rightarrow a \times a \times a = 27 \Rightarrow a = 3$;
c) $1 \times 2 \times 3 \times a \times 4 = 4 \times 3 \times 3 \times 2$, rezultă $a = 3$, căci $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 4$;
d) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 8 \times 9 = 1 \times a \times 8 \times 8 \times 9$, rezultă $a = 3$, deoarece $2 \times 4 = 8$, iar $1 \times 8 \times 9 = 1 \times 8 \times 9$;
e) $a \in \mathbf{N}$, căci $1 \times 2 \times 3 \times 100 = 100 \times 2 \times 1 \times 3$;
f) deoarece $a \neq 0$, iar $a : a = 1$, rezultă: $1 + a - 1 = 100 \Rightarrow a = 100$;
g) deoarece $a : b \times b = a$, căci $a > b \neq 0$, rezultă $a - a + a + a = 100 \Leftrightarrow 2a = 100$ $\Rightarrow a = 50$;
h) deoarece $a \neq 0$, iar $a : a : 2 = 1 : 2 = \frac{1}{2}$ şi $a : a : 4 = \frac{1}{4}$, rezultă: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = a \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 = a$;

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a = 2 \Leftrightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$;

j) Rezolvarea 1
Deoarece $\overline{1a} = 10 + a$, rezultă $10 + a = 3a \Leftrightarrow 10 = 2a \Rightarrow a = 5$.
Rezolvarea 2
$\overline{1a} = M_3$ şi $10 < M_3 < 20$. Deci $M_3 \in \{12, 15, 18\}$. Rezultă $a = 5$, căci $15 = 3 \times 5$.
k) Rezolvarea 1
$\overline{3a} = 30 + a$; $6a = 30 + a / -a \Rightarrow 5a = 30 \Rightarrow a = 6$.
Rezolvarea 2
$\overline{3a} = M_6$ şi $30 \leq M_6 < 40$. Rezultă $M_6 \in \{30, 36\}$. Deci $36 = 6 \times 6$, iar $a = 6$.
l) Rezolvarea 1
$\overline{2a} = 20 + a$; $6a = 20 + a / -a \Rightarrow 5a = 20 \Rightarrow a = 4$.
Rezolvarea 2
$\overline{2a} = M_6$ şi $20 < M_6 < 30$, deci $M_6 \in \{24\}$; rezultă $24 = 6 \times 4$, iar $a = 4$.
m) Rezolvarea 1
$\overline{1a} = 10 + a$; $10 + a = 6 \times a \; / -a \Rightarrow 10 = 5a \Leftrightarrow a = 2$, căci $12 = 6 \times 2$.
Rezolvarea 2
$\overline{1a} = M_6$ şi $M_6 < 20$ şi $M_6 > 10$, deci $M_6 \in \{12, 18\}$; $\overline{1a} = 12$, căci $12 = 6 \times 2$, iar $a = 2$.

68. Rezolvarea 1

Număr nenul înseamnă număr diferit de **0**. Exercițiul se poate rezolva astfel:

$\mathbf{1\times2\times3\times4\times5} = \overline{...0}$;

$\overline{...0}\times\mathbf{6\times7\times8\times9\times10} = \overline{...0}\times\mathbf{10} = \overline{...00}$;

$\overline{...00}\times\mathbf{11\times12\times13\times14\times15} = \overline{...00}\times\mathbf{14\times15} = \overline{...000}$;

$\overline{...000}\times\mathbf{16\times17\times18\times19\times20} = \overline{...000}\times\mathbf{20} = \overline{...0000}$;

$\overline{...0000}\times\mathbf{21\times22\times23\times24\times25} = \overline{...0000}\times\mathbf{24\times25} = \overline{...0000}\times\mathbf{6\times4\times25} =$

$= \overline{...0000}\times\mathbf{100} = \overline{...000000}$.

Răspuns: **6** cifre zero.

Rezolvarea 2

Se ştie că la înmulțirea oricărui număr natural terminat în zero (multiplu de **10**) cu alt număr se obține un produs terminat în zero, adică: $a\times\overline{b0} = \overline{...0}$. În şirul dat avem asemenea factori: **10** şi **20**. Ce alți factori au produsul terminat în zero? Orice multiplu de **5** înmulțit cu un număr par (cu soț) dă un produs multiplu de **10**. Câți multipli de **5** sunt în şirul dat? Multiplii de **5** sunt din **5** în **5**, deci vor fi **25 : 5 = 5** numere care se împart exact la **5** şi care, înmulțite cu oricare dintre cele **12** numere pare vor da la produs câte un zero (cuprinzând şi factorii **10** şi **20**). Ținând cont de faptul că până la înmulțirea cu **25** obținem un produs terminat în **4** cifre de zero, deci un produs par mai mare decât **2**, produsul final va avea **6** cifre de zero, căci la înmulțirea lui **25** cu un număr par mai mare decât **2** apar la terminația produsului încă **2** cifre de zero. Deci: în câte cifre de zero se termină produsul dat? **5 + 1 = 6** sau **4 + 2 = 6** cifre zero, adică: $\mathbf{1\times2\times3\times4\times ... \times25} = \overline{...000000}$.

69. Fie ***a***, ***b*** şi, respectiv, ***c*** cele trei numere naturale. Din enunț rezultă: $ab = 12$; $bc = 28$; $a + c = 10$. Deoarece $ab + bc = b(a + c)$, rezultă $12 + 28 = b\times10$, adică $b = 4$; $a = 3$; $c = 7$.

70. a) Se numeşte număr par (cu soț) acel număr care se împarte exact la **2**. Numerele pare formează şirul **0, 2, 4, 6, 8, 10**, ..., căci $0 : 2 = 0 \Rightarrow 0 = 2\times0$; $2 : 2 = 1 \Rightarrow 2 = 2\times1$; $4 : 2 = 2 \Rightarrow 4 = 2\times2$; $6 : 2 = 3 \Rightarrow 6 = 2\times3$ etc. Atunci, în general: $a : 2 = n \Rightarrow a = 2n$.

b) Se numeşte număr impar (fără soț) acel număr care nu se împarte exact la **2**. Care poate fi restul? Deoarece împărțitorul este **2**, atunci restul trebuie să fie mai mic decât **2**. Rezultă că restul este **1**. Numerele impare formează şirul **1, 3, 5, 7, 9**, ..., căci $1 : 2 = 0$ (rest 1) $\Rightarrow 1 = 2\times0 + 1$;

$3 : 2 = 1$ (rest 1) $\Rightarrow 3 = 2\times1 + 1$;

$5 : 2 = 2$ (rest 1) $\Rightarrow 5 = 2\times2 + 1$;

$7 : 2 = 3$ (rest 1) $\Rightarrow 7 = 2\times3 + 1$;

$9 : 2 = 4$ (rest 1) $\Rightarrow 9 = 2\times4 + 1$; etc.

Atunci, în general, $a : 2 = n$ (rest 1) $\Rightarrow a = 2n + 1$.

71. 1) Din enunț rezultă: $a : 3 = n$ (rest < 3) $\Rightarrow r\in\{0, 1, 2\}$. Rezultă: $a = 3n$; $a = 3n + 1$; $a = 3n + 2$.

2) $a : 4 = q$ (rest < 4) $\Rightarrow r\in\{0, 1, 2, 3\}$. Rezultă: $a = 4q$; $a = 4q + 1$; $a = 4q + 2$; $a = 4q + 3$.

3) $a : 5 = k$ (rest < 5) $\Rightarrow r\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Rezultă: $a = 5k$; $a = 5k + 1$; $a = 5k + 2$; $a = 5k + 3$; $a = 5k + 4$.

72. Dacă avem $2k + (2k + 1) + (2k + 2) = 6k + 3$, sumă impară, deci nu convine; dacă avem $(2k + 1) + (2k + 2) + (2k + 3) = 6k + 6$, sumă pară. Deci numărul mai mare este număr impar.

73. Dacă avem $2k + (2k + 1) + (2k + 2) = 6k + 3$, sumă impară, deci numărul mai mic este număr par. Dacă avem $(2k + 1) + (2k + 2) + (2k + 3) = 6k + 6$, o sumă pară, deci nu convine.

74. a) $a : (72 : 9) \Leftrightarrow a : 8$; $a : 8 = 3 \Leftrightarrow a = 8 \times 3 \Rightarrow a = 24$;
b) $36 : a = 6 \Leftrightarrow a = 36 : 6 \Rightarrow a = 6$;
c) $a \times 2 \times 8 = 32 \Leftrightarrow a \times 16 = 32 \Leftrightarrow a = 32 : 16 \Rightarrow a = 2$;
d) $a = 8 \times 6 + 5 \Leftrightarrow a = 48 + 5 \Rightarrow a = 53$;
e) $r \neq 0$ şi $r < 3$, rezultă $r \in \{1, 2\}$. Dacă $r = 1$, atunci $a = 8 \times 3 + 1 \Rightarrow a = 25$; dacă $r = 2$, atunci $a = 8 \times 3 + 2 \Rightarrow a = 26$;
f) $r < 1 \Rightarrow r = 0$, iar $a = 7 \times 9 + 0 \Rightarrow a = 63$;
g) $6 < r < 9$, rezultă $r \in \{7, 8\}$; dacă $r = 7$, atunci $a = 7 \times 9 + 7 \Rightarrow a = 70$; dacă $r = 8$, atunci $a = 7 \times 9 + 8 \Rightarrow a = 71$;
h) $(37 - 1) : a = 9 \Leftrightarrow 36 : a = 9 \Rightarrow a = 36 : 9 \Rightarrow a = 4$;
i) $r < 6$ şi $(26 - r)$ se împarte exact la 3, adică $(26 - r) : 3$. Rezultă $r \in \{2, 5\}$, iar $a = (26 - 2) : 3 \Leftrightarrow a = 8$ şi $a = (26 - 5) : 3 \Leftrightarrow a = 21 : 3 \Leftrightarrow a = 7$.
j) Deoarece $a = (19 - r) : 2$, iar 19 este număr impar, rezultă r număr impar (ca să obţinem o diferenţă pară). Dacă $r = 3$, atunci $a > 3$, iar $a = (19 - 3) : 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 8$; dacă $r = 5$, atunci $a > 5$, căci $a = (19 - 5) : 2 \Rightarrow a = 7$; dacă $r = 7$, atunci $a > 7$, iar $a = (19 - 7) : 2 \Rightarrow a = 6$ (fals); deci $a \in \{7, 8\}$.
k) Deoarece câtul este 1, rezultă $3 < a \leq 6$, deci $a \in \{4, 5, 6\}$. Sau: deoarece $a = (6 - r) : 1$, iar $r < a$, rezultă: dacă $r = 0$, $a = (6 - 0) : 1 = 6$; dacă $r = 1$, $a = (6 - 1) : 1 = 5$; dacă $r = 2$, $a = (6 - 2) : 1 = 4$; dacă $r = 3$, $a = (6 - 3) : 1 = 3$ (fals).
l) Dacă $r = c$ şi $r < 4$, rezultă $c < 4$, adică $c \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Dacă $c = 0 \Rightarrow a = 4 \times 0 + 0 \Rightarrow a = 0$;
dacă $c = 1 \Rightarrow a = 4 \times 1 + 1 \Rightarrow a = 5$;
dacă $c = 2 \Rightarrow a = 4 \times 2 + 2 \Rightarrow a = 10$;
dacă $c = 3 \Rightarrow a = 4 \times 3 + 3 \Rightarrow a = 15$; deci $a \in \{0, 5, 10, 15\}$.
m) Din $r < 3$ şi $c = 3r \Rightarrow (r, c) \in \{(1, 3), (2, 6)\}$. Dacă $r = 1$ şi $c = 3 \Rightarrow a = 3 \times 3 + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 10$; dacă $r = 2$ şi $c = 6 \Rightarrow a = 3 \times 6 + 2 \Leftrightarrow a = 20$;
Sau: dacă $c = 3r$, rezultă $a = 3 \times 3r + r \Leftrightarrow a = 10r$; din $r < 3$ şi $c = 3r$, rezultă $r \in \{1, 2\}$. Dacă $r = 1 \Rightarrow a = 10 \times 1 \Leftrightarrow a = 10$; Dacă $r = 2 \Rightarrow a = 2 \times 10 \Leftrightarrow a = 20$.
n) Din $r < 10$ şi $r = 4c$ rezultă $4c < 10 \Leftrightarrow c < 2,5$, deci $c \in \{1, 2\}$. Dacă $c = 1$, atunci $a = 10 \times c + 4c \Leftrightarrow a = 10 + 4 \Leftrightarrow a = 14$; dacă $c = 2$, atunci $a = 10 \times c + 4c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 10 \times 2 + 4 \times 2 \Leftrightarrow a = 20 + 8 \Leftrightarrow a = 28$;
Sau: $a = 14c \Rightarrow a = 14 \times 1$, dacă $c = 1$ şi $a = 14 \times 2$, dacă $c = 2$.
o) $a = 7c + r$, iar $r = c + 2$. Rezultă $a = 7c + c + 2 \Leftrightarrow a = 8c + 2$, în care $r < 7$, adică $c + 2 < 7$. Atunci $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Din $a = 8c + 2$, rezultă:
dacă $c = 0 \Rightarrow a = 8 \times 0 + 2 \Rightarrow a = 2$;
dacă $c = 1 \Rightarrow a = 8 \times 1 + 2 \Rightarrow a = 10$;

dacă $c = 2 \Rightarrow a = 8 \times 2 + 2 \Rightarrow a = 18$;
dacă $c = 3 \Rightarrow a = 8 \times 3 + 2 \Rightarrow a = 26$;
dacă $c = 4 \Rightarrow a = 8 \times 4 + 2 \Rightarrow a = 34$; deci $a \in \{2, 10, 18, 26, 34\}$. Verificați.
p) $a = 3c + r$, iar $r = c - 2 \Rightarrow c = r + 2$. Deoarece $r < 3$, rezultă $c - 2 < 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2 \leq c < 5 \Rightarrow c \in \{2, 3, 4\}$. Din $a = 3c + r$, rezultă:
dacă $c = 2$, rezultă $2 = r + 2 \Rightarrow r = 0$, iar $a = 3 \times 2 + 0 = 6$;
dacă $c = 3$, rezultă $3 = r + 2 \Rightarrow r = 1$, iar $a = 3 \times 3 + 1 \Rightarrow a = 10$ etc.

75. a) Deoarece $c = 8r$ și $r < 1\,994$, rezultă $a = 1\,994 \times 8r + r \Leftrightarrow a = 15\,952r + r \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 15\,953r$. Pentru a maxim, $r = 1\,993$, deci $a = 15\,953 \times 1\,993 = 31\,794\,329$.
b) Deoarece $r = 8c$ și $r < 1\,994$, rezultă $8c < 1\,994 \Leftrightarrow c < 1\,994 : 8 \Leftrightarrow c < 249,25$. Pentru a maxim, $c = 249$, deci $a = 1\,994 \times c + 8c \Leftrightarrow a = 2\,002c \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 2\,002 \times 249 \Leftrightarrow a = 498\,498$.

76. Numerotăm locurile posibile cu numere de la **1** la **5**, iar valoarea premiului primit de fiecare elev dintre cei cinci, în ordinea locurilor, cu a, b, c, d și, respectiv, e. Rezultă că se poatre scrie: $1a = 2b = 3c = 4d = 5e$, în care numai **3** asemenea produse sunt egale. Știind că suma celor **3** produse egale este **20 475**, rezultă că un produs este $20\,475 : 3 = 6\,825$. Dintre cele **5** produse, ținând cont de faptul că valoarea premiului este număr natural, alegem numai: $1a$, $3c$ și $5e$, deoarece: $1a = 6\,825 \Rightarrow a = 6\,825 : 1 \Rightarrow a = 6825 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \mathbf{N}$;
$3c = 6\,825 \Rightarrow c = 2\,275 \Rightarrow c \in \mathbf{N}$;
$5e = 6\,825 \Rightarrow e = 1\,365 \Rightarrow e \in \mathbf{N}$;
$2b = 6\,825 \Rightarrow b \notin \mathbf{N}$;
$4d = 6\,825 \Rightarrow d \notin \mathbf{N}$.
Răspuns: Cei trei reprezentanți s-au clasat pe locurile **1, 3** și **5**.

77. Așa-numita metodă "încercare și eroare" poate fi utilizată, dar când avem numere mai mari, aceasta este incomodă. Din practică știm:
1) Suma a două numere naturale pare este un număr par (de forma $2n$, căci prin împărțirea sumei la **2** obținem câtul n).
2) Suma a două numere naturale impare este un număr par.
3) Suma dintre un număr natural par și un număr natural impar este un număr impar de forma $2n + 1$.
4) Produsul dintre un număr par și un număr impar este un număr par; rezultă astfel că și produsul a două numere consecutive este un număr par.
5) Produsul dintre două numere impare este un număr impar.
6) Produsul a două numere pare este un număr par.
a) <u>Rezolvarea 1</u>. Pe baza regulilor de mai sus, deducem că $3b$ este un număr par, deoarece **12** și $2a$ sunt numere pare, iar număr par minus număr par dă număr par. Dacă $3b$ este număr par și $3b \leq 12$ (un termen nu poate fi mai mare decât suma), rezultă $3b \in \{0, 6, 12\}$, iar $b \in \{0, 2, 4\}$.
Dacă $b = 0$, rezultă $a = (12 - 3 \times 0) : 2 \Rightarrow a = 6$;
dacă $b = 2$, rezultă $a = (12 - 3 \times 2) : 2 \Rightarrow a = 3$;
dacă $b = 4$, rezultă $a = (12 - 3 \times 4) : 2 \Rightarrow a = 0$.

Perechile de numere natuale (a, b) sunt: $(6, 0), (3, 2), (0, 4)$.

Rezolvarea 2: $2a = 12 - 3b \Leftrightarrow a = \frac{12-3b}{2} \Leftrightarrow a = 6 - \frac{3b}{2}$, în care $\frac{3b}{2} \leq 6$ şi

$(b : 2) \in \mathbf{N}$. Rezultă (b, a): $(0, 6), (2, 3), (4, 0)$.

b) 1) $12 + \overline{...0} + 33 = \overline{...5}$ (ultima cifră a sumei).

2) $\overline{...0} + \overline{...0} + 2 = \overline{...2}$.

3) $\overline{...4} + \overline{...1} + \overline{...5} = \overline{...0}$.

4) Sunt două cazuri:

– dacă $\overline{ab}$ este un număr par, $\overline{ab} \times 5 = \overline{...0}$, iar $\overline{...0} + \overline{...0} = \overline{...0}$;

– dacă $\overline{ab}$ este un număr impar, $\overline{ab} \times 5 = \overline{...5}$, iar $\overline{...5} + \overline{...0} = \overline{...5}$.

5) $\overline{...0} + \overline{...0} = \overline{...0}$.

6) $\overline{aa5} - 27 = \overline{...5} - \overline{...7} = \overline{...8}$.

7) $\overline{...1} - (\overline{..6} + \overline{...4}) = \overline{...1} - \overline{...0} = \overline{...1}$.

8) $\overline{...8}$.

9) $\overline{...9} \times \overline{...7} \times 7 = \overline{...3} \times 7 = \overline{...1}$.

10) $\overline{...9} \times \overline{...3} \times 3 \times 3 = \overline{...7} \times 3 \times 3 = \overline{...1} \times 3 = \overline{...3}$.

c) 1) În asemenea exerciţii (pe care elevii le întâlnesc mai ales când utilizează scrierea sistematică a numerelor), sunt necesare comparaţii între termeni (factori) şi rezultate, cât şi reguli practice privind ultima cifră a unui rezultat (a se vedea şi regulile de la punctul a).

$\mathbf{500a + 100b + 15c + 2d = 753}$. Un termen poate fi cel mult egal cu suma, adică $\mathbf{500a \leq 753}$. Rezultă $\mathbf{a = 1}$, iar $\mathbf{100b + 15c + 2d = 753 - 500 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{\Leftrightarrow 100b + 15c + 2d = 253}$. Deoarece $\mathbf{100b = \overline{...00}}$, rezultă $\mathbf{15c + 2d = \overline{...3}}$. Se observă că **2d** este un număr par, atunci $\mathbf{15c}$ este un număr impar, căci suma terminată cu cifra **3** este un număr impar. Rezultă $\mathbf{15c} = \overline{...5}$, iar $\mathbf{2d} = \overline{...8}$, căci $\overline{...5} + \overline{...8} = \overline{...3}$. Dacă $\mathbf{2d = 8 \Rightarrow d = 4}$, $\mathbf{a = 1}$, iar $\mathbf{100b + 15c = 253 - 8 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{\Leftrightarrow 100b + 15c = 245}$. Deoarece $\mathbf{100b} = \overline{..00}$, iar $\mathbf{100b \leq 245}$, rezultă $\mathbf{b \leq 2}$, iar $\mathbf{15c} = \overline{...45}$. Dacă $\mathbf{b = 2}$, rezultă $\mathbf{15c = 245 - 2 \times 100 \Leftrightarrow 15c = 45 \Leftrightarrow c = 3}$.

Soluţia $\mathbf{b = 1}$ nu convine, căci $\mathbf{[(245 - 100) : 15] \notin N}$. Nici soluţia $\mathbf{2d = 18}$ nu convine, căci $\mathbf{(235 : 15) \notin N}$. Deci: $\mathbf{a = 1, b = 2, c = 3, d = 4}$.

2) Din $\mathbf{112a + 22b + 13c = 195}$ şi $\mathbf{a \neq 0}$, rezultă $\mathbf{112a \leq 195}$, iar $\mathbf{a = 1}$. Atunci $\mathbf{22b + 13c = 195 - 112 \times 1 \Leftrightarrow 22b + 13c = 83}$. Se observă că $\mathbf{13c}$ este un număr impar, deci $\mathbf{c}$ este un număr impar mai mic decât **7**, căci $\mathbf{13 \times 7 > 83}$, iar $\mathbf{c \neq a}$, deci $\mathbf{c \neq 1}$. Dacă $\mathbf{c = 5}$, $\mathbf{22b = 83 - 65 \Leftrightarrow 22b = 18}$, fals, căci $\mathbf{b \notin N}$; dacă $\mathbf{c = 3}$, rezultă $\mathbf{22b = 83 - 3 \times 13 \Leftrightarrow 22b = 44 \Rightarrow b = 2}$. Deci $\mathbf{a = 1, b = 2, c = 3}$.

3) Din $\mathbf{1\ 000a + 200b + 30c + 4d = 1\ 986}$ şi $\mathbf{a \neq 0}$, rezultă $\mathbf{a = 1}$, căci $\mathbf{1\ 000a \leq 1\ 986}$, iar $\mathbf{200b + 30c + 4d = 986\ / : 2 \Rightarrow 100b + 15c + 2d = 493}$. De aici putem continua ca în exerciţiul **1** de mai sus sau, mai pe scurt: din $\mathbf{100b + 15c + 2d = 493 \Rightarrow b \leq 4}$; dar $\mathbf{c \leq 9}$, $\mathbf{d \leq 9}$ (căci sunt cifre); dacă $\mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$ ar avea valori maxime, atunci $\mathbf{15c + 2d = 15 \times 9 + 2 \times 9 = 153}$, iar $\mathbf{100b = 340}$, ceea ce nu convine. Rezultă $\mathbf{b = 4}$, iar $\mathbf{15c + 2d = 493 - 400 \Leftrightarrow 15c + 2d = 93}$. Deoarece **2d** este un număr par, iar **93** este o sumă impară, rezultă că $\mathbf{15c}$ este un număr impar, deci $\mathbf{c}$ este un număr impar. Dacă $\mathbf{c = 3}$, $\mathbf{(c \neq 1)}$, rezultă $\mathbf{d > 9}$, ceea ce nu convine; dacă $\mathbf{c = 5}$, rezultă $\mathbf{2d = 93 \Rightarrow 2d =}$ $\mathbf{= 93 - 15 \times 5 \Rightarrow d = 9}$. Deci $\mathbf{a = 1, b = 4, c = 5, d = 9}$.

4) Din enunţ rezultă: $\mathbf{200b + 1\ 010c = \overline{...0}}$, $\mathbf{10\ 001d + 1\ 011a = \overline{...1}}$, $\mathbf{d < 8}$, iar

$\overline{...1} \times d + \overline{...1} \times a = \overline{...1}$, adică $\overline{...7} + \overline{...4} = \overline{...1}$. Dacă $d = 7$, $a = 4$, iar $200b + 1\,010c = 81\,111 - (70\,007 + 4\,044) \Leftrightarrow 200b + 1\,010c = 7\,060$.
Deoarece $200b = \overline{...00}$, rezultă $1\,010c = \overline{...60}$, deci $c = 6$, iar $b = (7\,060 - 6 \times 1\,010) : 200 \Rightarrow b = 5$. Deci $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, iar $d = 7$.
5) Dacă un termen şi suma sunt pare, rezultă că şi celălalt termen, $7c$, este un număr par, deci c este un număr par. Suma maximă se obţine dacă $b = 9$ şi $c = 8$, adică $26a \leq 54 + 56 \Leftrightarrow 26 \leq 110 \Rightarrow a \leq 4$.
Dacă $a = 4$, rezultă $104 = 6b + 7c$, deci $c = 8$, iar $b = 8$, ceea ce nu convine.
Dacă $a = 3$, rezultă $26 \times 3 = 6b + 7c \Rightarrow b = c = 6$, ceea ce contrazice enunţul.
Dacă $a = 2$ sau $a = 1$, rezultă $b = c = 4$, respectiv $b = c = 2$, ceea ce, de asemenea, contrazice enunţul.
Sarcină suplimentară: Eliminaţi o condiţie din enunţ, astfel încât exerciţiul c.5. să aibă mai multe soluţii.
6) $81a = 101b + 101c + 1 \Leftrightarrow 81a = 101(b + c) + 1$. Pentru a maxim, rezultă $81a = 81 \bullet 9$. Rezultă apoi că produsul $101(b + c)$ are cifra zecilor zero, ca şi $81 \times a$, ceea ce duce la $a = 5$ (De ce? $101(b + c) \leq 81 \times 9 \Leftrightarrow 101(b + c) \leq 729 \Rightarrow \Rightarrow b + c \leq 7$).
Rezultă $81 \times 5 = 101(b + c) + 1 \Leftrightarrow 405 = 101(b + c) + 1 \Leftrightarrow b + c = (405 - 1) : 101 \Rightarrow b + c = 4$. Deci $(b, c) \in \{(1, 3), (3, 1)\}$.
7) $a - b - c = 6 \Leftrightarrow a = 6 + b + c$, în care $a < 10$, iar $a \neq b \neq c \neq 0$. Pentru valoarea maximă $a = 9$ rezultă $9 = 6 + b + c$, deci $b + c = 3$, adică $(b, c) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$.
Pentru $a = 8$, rezultă $8 = 6 + b + c$, deci $b + c = 2$, dar $b \neq c$; nu convine nici $a = 7$ sau $a = 6$, căci $b \neq c \neq 0$.
8) $a - b - 3c = 2 \Rightarrow a = 2 + b + 3c$, în care $a < 10$, iar $a \neq b \neq c \neq 0$. Pentru valoarea maximă $a = 9$ rezultă $9 = 2 + b + 3c$, deci $b + 3c = 7$, adică $(b, c) \in \{(1, 2), (4, 1)\}$. Pentru $a = 8$, rezultă $6 = b + 3c$, adică $(b, c) \in \{(3, 1)\}$.
9) În $11a + 2b = 101$, $2b < 20$, iar $11a$ este un număr impar, ce se împarte exact la 11, mai mare decât 80.
Unica soluţie: $a = 9$, iar $b = (101 - 99) : 2 \Rightarrow b = 1$.
10) $99\overline{ab} - 99 = 1\,089 \Leftrightarrow 99(\overline{ab} - 1) = 1\,089$; $\overline{ab} - 1 = 1\,089 : 99 \Leftrightarrow \overline{ab} = 12$ sau: $99\overline{ab} = 1\,089 + 99 \Leftrightarrow 99\overline{ab} = 1\,198 \Leftrightarrow \overline{ab} = 1\,198 : 99 \Rightarrow \overline{ab} = 12$.

78. Deoarece $4x$ este un număr par, $58y$ este un număr par, iar $2z$ este tot un număr par, rezultă că şi suma trebuia să fie un număr par, deci nu putea fi terminată în **5** (a se vedea regulile de la exerciţiul nr. **121**).

79. a) Fie cele trei numere naturale consecutive: a, $a + 1$ şi $a + 2$. Din enunţ rezultă că 109 este suma a două dintre numere, iar $a + (a + 1) + (a + 2) = 109 + ?$. Deoarece 109 este o sumă impară, rezultă că ea a fost obţinută dintr-un număr par şi unul impar sau invers. În acest şir de **3** numere, primul şi ultimul pot fi pare, iar cel din mijloc impar sau primul şi ultimul pot fi impare, iar cel din mijloc, par. Deci în compunerea sumei **109** pot intra primele două numere sau ultimele două, adică: $a + a + 1 = 109$ sau $a + 1 + a + 2 = 109$. În prima situaţie $2a = 108 \Rightarrow a = 54$, iar numerele sunt **54**, **55**, **56**. În a doua situaţie $2a = 106 \Rightarrow a = 53$, iar numerele sunt **53**, **54**, **55**.

b) Fie cele trei numere naturale consecutive: a, $a + 1$, $a + 2$. Rezultă: $? + 98 = a + a + 1 + a + 2$. Deoarece **98** este o sumă pară, rezultă că ea a fost obținută din **2** numere pare sau **2** numere impare. În acest şir de **3** numere consecutive, primul şi ultimul dintre ele pot fi pare sau pot fi impare. Rezultă că suma dintre primul şi ultimul număr este **98**, adică $\boldsymbol{a + a + 2 = 98 \Rightarrow}$ $\boldsymbol{\Rightarrow 2a = 96 \Rightarrow a = 48}$. Numerele sunt: **48, 49, 50**.

80. Rezolvarea 1
Exemplu numeric: $\boldsymbol{a = 26}$, $\boldsymbol{b = 8}$. Rezultă: **26 : 8 = 3** (rest **2**), adică $\boldsymbol{26 = 8 \times 3 + 2}$, în care **2 < 8**. Atunci: $\boldsymbol{(2 \times 26) : (2 \times 8) = 52 : 16 = 3}$, rest **4**. Deci la împărțirea cu rest, dacă mărim deîmpărțitul şi împărțitorul de un număr de ori, restul se măreşte de acelaşi număr de ori, iar câtul este tot acelaşi (unic).
Răspuns: Câtul este tot $\boldsymbol{q}$, iar restul este $\boldsymbol{2r}$.

Rezolvarea 2
Pe baza teoremei împărțirii cu rest (a împărțirii întregi), enunțul devine: $\boldsymbol{a = bq + r}$, în care $\boldsymbol{0 \leq r < b}$; $\boldsymbol{2a = 2b \times q_1 + r_1}$; $\boldsymbol{q_1 = ?}$; $\boldsymbol{r_1 = ?}$. Cum se ajunge de la prima egalitate la a doua? Prin înmulțirea cu **2** a fiecărui membru al primei egalități, adică: $\boldsymbol{a = bq + r \,/\times 2 \Rightarrow 2a = 2bq + 2r}$. Se observă că $\boldsymbol{2 \times bq =}$ $\boldsymbol{= (2b) \times q}$, deci $\boldsymbol{q = q_1}$, câtul fiind unic; $\boldsymbol{0 \leq 2r < 2b}$. Rezultă: $\boldsymbol{r_1 = 2r}$.
Răspuns: Câtul este tot $\boldsymbol{q}$, iar restul este $\boldsymbol{2r}$.

81. Camelia a aplicat proprietatea potrivit căreia, la împărțirea exactă, dacă micşorăm atât deîmpărțitul, cât şi împărțitorul, de acelaşi număr de ori, câtul rămâne neschimbat. Or, împărțirea din enunț are restul diferit de zero (împărțire neexactă); ca atare, şi restul s-a micşorat de acelaşi număr de ori. Numărul **5** este rest pentru împărțirea **23 : 6**, nu la împărțirea ce trebuia efectuată (a se vedea şi rezolvarea de la exercițiul anterior).
Dinu a arătat corect restul, căci potrivit teoremei împărțirii cu rest, $\boldsymbol{23\,000 = 6\,000 \times 3 + 5\,000}$, iar $\boldsymbol{23\,000 \neq 6\,000 \times 3 + 5}$.

Observație: Această proprietate se aplică numai dacă şi deîmpărțitul şi împărțitorul (deci şi restul) se împart exact (sunt divizibili cu) la acelaşi număr.

82. Rezolvarea 1
a) **8 + 3 = 11**; b) **4 + 6 = 10**; c) **8 + 4 = 12**;
d) **5 + 4 = 9**; e) **7 – 3 = 4**; f) **7 – 4 = 3**.

Rezolvarea 2
Aplicând regula: "Dacă fiecare termen al sumei sau al diferenței se împarte exact la un număr, atunci şi suma sau diferența se împarte exact la acel număr", putem scrie:
a) **64 : 8 + 24 : 8 = (64 + 24) : 8 = 88 : 8 = 11**; b) **(36 + 54) : 9 = 90 : 9 = 10**;
c) **(56 + 28) : 7 = 84 : 7 = 12**; d) **(30 + 24) : 6 = 54 : 6 = 9**;
e) **(63 – 27) : 9 = 36 : 9 = 4**; f) **(56 – 32) : 8 = 24 : 8 = 3**.

Observație: Reciproca regulii nu este valabilă, căci **(3 + 5) : 8 = 8 : 8 = 1**, dar **3 : 8 = 0** (rest **3**).

83. $\boldsymbol{71 : 9 = 8}$ (rest **8**) $\boldsymbol{\Rightarrow 71 = 9 \times 7 + 8}$;

73 : 9 = 8 (rest **1**) $\Rightarrow$ **71 = 9** $\times$ **8 + 1**;

55 : 9 = 6 (rest **1**) $\Rightarrow$ **55 = 9** $\times$ **6 + 1**, iar **(71 + 55) : 9 = 126 : 9 = 14** (rest **0**), dar **(73 + 55) : 9 = 128 : 9 = 14** (rest **2**).

Din ce cauză în prima situație suma se împarte exact la **9**, iar în a doua, nu? Deoarece suma resturilor în primul caz este **8 + 1 = 9**, care se împarte exact la **9**, iar în al doilea caz, suma resturilor este **1 + 1 = 2**, care nu se împarte exact la **9**, căci **2 : 9 = 0** (rest **2**).

84. 56 : 6 = 9 (rest **2**) $\Rightarrow$ **56 = 6** $\times$ **9 + 2**;

57 : 6 = 9 (rest **3**) $\Rightarrow$ **57 = 6** $\times$ **9 + 3**;

38 : 6 = 6 (rest **2**) $\Rightarrow$ **38 = 6** $\times$ **6 + 2**, iar **(56 – 38) : 6 = 18 : 6 = 3** (rest **0**), dar **(57 – 38) : 6 = 19 : 6 = 3** (rest **1**).

Din ce cauză în primul caz diferența se împarte exact la **6**, iar în al doilea, nu? Deoarece diferența resturilor în primul caz are valoarea **2 – 2 = 0**, valoare care se împarte exact la **6**, căci **0 : 6 = 0**, iar în al doilea caz, diferența resturilor are valoarea **3 – 2 = 1**, care nu se împarte exact la **6**, căci **1 : 6 = 0** (rest **1**).

85. 72 : 7 = 10 (rest **2**) $\Rightarrow$ **72 = 7** $\times$ **10 + 2**. În celelalte împărțiri date, deîmpărțitul se mărește sau se micșorează cu un număr ce se împarte exact la **7**. Deci câturile și resturile vor fi: **10 + (14 : 7) = 12** (rest **2**); **10 + (21 : 7) = 13** (rest **2**); **10 – (14 : 7) = 8** (rest **2**); **10 – (21 : 7) = 7** (rest **2**).

Generalizare:

Dacă deîmpărțitul se mărește sau se micșorează cu un număr ce se împarte exact la împărțitor, restul nu se schimbă, iar câtul dat se mărește sau se micșorează cu câtul dintre numărul cu care se operează asupra deîmpărțitului și împărțitorului inițial.

86. 102 $\times$ **6 = 612** $\Leftrightarrow$ **612 : 102 = 6**.

a) **714 = 612 + 102**, iar **102 : 102 = 1**, rezultă **714 : 107 = 7,** căci **6 + 1 = 7**.

b) **614 = 612 + 2**, iar **2 : 102 = 0** (rest **2**), rezultă **614 : 102 = 2** (rest **2**).

c) **916 = 612 + 304**, iar **304 : 102 = 2** (rest **100)**, rezultă **916 : 102 = 8** (rest **100**), căci **6 + 2 = 8**, iar **100 < 102**.

d) **510 = 612 – 102**, iar **102 : 102 = 1**, rezultă **510 : 102 = 5,** căci **6 – 1 = 5**.

e) **610 = 612 – 2**, rezultă **610 : 102 = 5**, rest **100,** căci **102 – 2 = 100**, iar **6 – 1 = 5**.

f) **926 = 612 + 314**, iar **314 : 102 = 3** (rest **8**), rezultă **926 : 102 = 9** (rest **8**), căci **6 + 3 = 9**, iar **8 < 102**.

g) **296 = 612 – 316**, iar **316 = 102** $\times$ **3 + 10**, rezultă **296 : 102 = 2** (rest **92**), căci **6 – 4 = 2**, iar **102 – 10 = 92**.

87. a) **8** numere.

b) Dacă de la **1** la **8** sunt **8** numere, rezultă că de la **2** la **8** sunt **7** numere, căci **8 – 1** (numărul **1** lipsește) = **7** (numere).

c) **8 – 2 = 6** (numere); (Nu luăm în calcul numerele **1** și **8**).

d) **8 – 1 – 2 = 5** (numere).

e) **16 – 5 = 11** (numere) sau **2(8 – 3) + 1 = 2 • 5 + 1 = 11** (numere).

f) $16 - 6 - 1 = 9$ (numere) sau $2(8 - 3) - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$ (numere).

g) $91(90 - 89) + 1 = 91 \times 1 + 1 = 92$ (numere) sau: $8\,190 - (8\,099 - 1) =$ $= 8\,190 - 8\,098 = 92$ (numere).

h) $91(90 - 89) - 1 = 91 \cdot 1 - 1 = 90$ (numere) sau: $8\,190 - (8\,099 + 1) =$ $= 8\,190 - 8\,100 = 90$ (numere).

i) $4 \times 9 - 4 \times 5 = 4(9 - 5) = 4 \times 4 = 16$ (numere) sau: $36 - 20 = 16$ (numere).

j) $4 \times 9 - 4 \times 5 + 1 = 4(9 - 5) + 1 = 16 + 1 = 17$ (numere) sau: $36 - (20 - 1) =$ $= 36 - 19 = 17$ (numere).

k) Asemănător cu exercițiul f): **9** numere.

l) $(24 - 16) : 2 - 1 = 8 : 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ (numere) sau: $12 - 8 - 1 = 4 - 1 = 3$ (numere).

m) $(32 - 20) : 4 + 1 = 12 : 4 + 1 = 3 + 1 = 4$ (numere) sau: $8 - 5 + 1 = 3 + 1 =$ $= 4$ (numere).

88. a) Deoarece şirul începe cu un număr impar şi se termină cu un număr par, iar în şir după un număr impar urmează un număr par, rezultă că jumătate din cele **20** de numere sunt impare, adică $20 : 2 = 10$ numere (iar cealaltă jumătate sunt numere pare).
b) Câte numere consecutive sunt de la **4** la **33**? $33 - 4 + 1 = 30$ sau $33 - 3 = 30$. Dacă şirul începe cu un număr par şi se termină cu un număr impar, înseamnă că $30 : 2 = 15$ sunt numere impare, iar celelalte **15** sunt numere pare.
c) Deoarece şirul începe şi se termină cu un număr impar, rezultă că jumătate plus **1** sunt numere impare. De la **1** la **31** sunt **31** numere consecutive. $31 = 2 \times 15 + 1$, deci $15 + 1 = 16$ numere sunt impare.
d) Câte numere consecutive sunt de la **15** la **75**? $75 - 15 + 1 = 61$ sau $75 - 14 = 61$ (numere). $61 : 2 = 30$ (rest **1**), rezultă $30 + 1 = 31$ (numere impare).

89. a) Deoarece şirul începe cu un număr par şi se termină cu un număr impar, iar în şir după un număr par urmează un număr impar, rezultă că din cele $81 - 5 = 76$ numere, jumătate, adică $76 : 2 = 38$ sunt numere pare (iar celelalte **38** sunt numere impare).
b) Câte numere consecutive sunt? $40 - 8 = 32$ sau $40 - 9 + 1 = 32$ (numere). $32 : 2 = 16$ numere pare (şi **16** numere impare, deoarece şirul începe cu un număr impar şi se termină cu un număr par).
c) Din cele **60** de numere, $60 : 2 = 30$ numere sunt pare (şi **30** sunt impare).
d) Câte numere consecutive sunt? $84 - 7 = 77$ sau $84 - 8 + 1 = 77$ (numere). Deoarece şirul începe şi se termină cu un număr par, rezultă că jumătate plus **1** vor fi numere pare, adică: $77 = 2 \times 38 + 1$; $38 + 1 = 39$ (numere pare) şi **38** numere impare.

90. a) Pentru a obține aceeaşi sumă, adunăm primul cu ultimul număr din şir, al doilea cu penultimul, al treilea cu antepenultimul ş.a.m.d., adică $1 + 70 =$ $= 2 + 69 = 3 + 68$ etc.
Câte numere sunt în şirul dat? **70** numere.
Câte perechi de numere care dau aceeaşi sumă se pot forma din cele **70** de numere? $70 : 2 = 35$ (perechi cu suma **71**).
b) Câte numere sunt în şirul dat? $85 - 2 = 83$ sau $85 - 3 + 1 = 83$ (numere).

Câte perechi cu aceeaşi sumă se pot forma din cele **83** de numere?
83 = 2×41 + 1. Rezultă că se pot forma **41** de perechi, iar un număr este fără pereche (care se află împărțind suma obținută la **2**, adică **88 : 2 = 44**).
c) Câte numere sunt în şirul dat? **94 – 7 = 87**. Câte perechi cu aceeaşi sumă se pot forma din cele **87** de numere? **87 = 2×43 + 1**. Rezultă că se pot forma **43** de perechi, iar un număr este fără pereche (tocmai numărul **51**, căci **102 : 2 = 51**).
d) Câte numere sunt de la **7** la **36**? **36 – 6 = 30** sau **36 – 7 + 1 = 30** (numere). Câte perechi cu aceeaşi sumă se pot forma? **30 : 2 = 15**.
e) Câte numere sunt de la **6** la **51**? **51 – 5 = 46** sau **51 – 6 + 1 = 45 + 1 = 46** (numere). Câte perechi cu aceeaşi sumă se pot forma? **46 : 2 = 23**.

91. a) Câte numere pare sunt în şirul dat? **80 : 2 = 40** (a se vedea explicațiile de la exercițiul **133**.a). (Şirul este: **2, 4, 6, 8, 10, ..., 80**, iar suma unei perechi este **2 + 80 = 82**).
Câte perechi se pot forma cu cele **40** de numere pare? **40 : 2 = 20** (perechi).
b) Câte numere impare sunt în şirul dat? **80 : 2 = 40** (Şirul este: **1, 3, 5, 7, 9, ..., 79**, iar suma unei perechi este **1 + 79 = 80**).
c) Câte numere sunt în şirul dat? **85 – 2 = 83** sau **85 – 3 + 1 = 83** (numere). Câte numere pare sunt în cele **83** de numere? **83 = 2×41 + 1**. Deci sunt **41** numere pare şi **42** numere impare. (Şirul numerelor pare este: **4, 6, 8, ..., 84**, iar suma unei perechi este **4 + 84 = 88**).
Câte perechi care au aceeaşi sumă se pot forma din cele **41** de numere pare? **41 = 2×20 + 1**, adică se pot forma **20** de perechi, iar un număr este fără pereche, acesta fiind **88 : 2 = 44**.
d) Câte numere consecutive sunt în şirul dat? **85 – 2 = 83** sau **85 – 3 + 1 = 83**. Câte numere impare sunt în cele **83** de numere? **83 = 2×41 + 1**. Deci sunt **41 + 1** numere impare (şirul începe şi se termină cu un număr impar). (Şirul numerelor impare este: **3, 5, 7, ..., 85**, iar suma unei perechi este **3 + 85 = 88**).
Câte perechi care au aceeaşi sumă se pot forma cu cele **42** de numere impare? **42 : 2 = 21** (perechi).
e) Câte numere sunt de la **8** la **94**? **94 – 7 = 87** sau **94 – 8 + 1 = 87**. Câte numere pare sunt în acest şir? **87 = 2×43 + 1**. Deci sunt **44** numere pare (şi **43** impare). (Şirul numerelor pare este: **8, 10, 12, ..., 94**, iar suma unei perechi este **8 + 94 = 102**).
Câte perechi care au aceeaşi sumă se pot forma cu cele **44** de numere pare? **44 : 2 = 22** (perechi).
f) În şirul dat sunt **87** numere consecutive şi **43** numere impare. (Şirul numerelor impare este: **9, 11, 13, 15, ..., 93**, iar suma unei perechi este **9 + 93 = 102**).
Câte perechi care au aceeaşi sumă se pot forma cu cele **43** de numere impare? **43 = 2×21 + 1**. Deci sunt **21** de perechi şi un număr fără pereche, acesta fiind **51**, adică **102 : 2 = 51**.
g) Câte numere consecutive sunt în şirul dat? **36 – 6 = 30** sau **36 – 7 + 1 = 30**. Câte numere pare sunt în cele **30** de numere? **30 : 2 = 15**, deoarece şirul începe cu un număr impar şi se sfârşeşte cu un număr par.
Câte perechi se pot forma cu cele **15** numere pare? **15 = 2×7 + 1**. Deci se pot forma **7** perechi, fiecare având suma **6 + 36 = 42**, iar un număr este fără pereche, acesta fiind **42 : 2 = 21**.

h) Între cele **30** de numere consecutive, **15** sunt impare. Câte perechi se pot forma cu cele **15** numere impare? $\mathbf{15 = 2 \times 7 + 1}$. Deci se pot forma **7** perechi, fiecare având suma **7 + 35 = 42**, iar un număr este fără pereche, acesta fiind **42 : 2 = 21**.

i) Câte numere consecutive sunt în şirul dat? **51 – 5 = 46** sau **51 – 6 + 1 = 46** (numere).

Câte numere pare sunt între cele **46** de numere? **46 : 2 = 23**. Şirul numerelor pare este: **6, 8, 10, 12, ..., 50**, iar o pereche are suma este **6 + 50 = 56**.

Câte perechi se pot forma din cele **23** numere pare? $\mathbf{23 = 2 \times 11 + 1}$. Deci se pot forma **11** perechi, fiecare având suma **56**, iar un număr este fără pereche acesta fiind **56 : 2 = 28**.

j) Între cele **46** de numere consecutive, **23** numere sunt impare; cu acestea se pot forma **11** perechi, fiecare având suma **7 + 51 = 58**, iar un număr este fără pereche (acesta fiind **58 : 2 = 29**).

92. a) Ce sumă au cele două numere ce formează o pereche? **1 + 100 = 2 + + 99 = 3 + 88 = ... = 101**. Atunci **53 + ? = 101**. Rezultă că lui **53** îi corespunde **48**, căci **101 – 53 = 48**, iar lui **68** îi corespunde **33**, deoarece **101 – 68 = 33**.

b) 1) Deoarece ***y* + 2** este o sumă pară (numai astfel se obține un număr natural), iar **2** este un număr par, rezultă că ***y*** este un număr par mai mic decât **1 000** (căci număr par plus număr par dă o sumă pară). Deci $y \in \{2, 4, 6, 8, ..., 998\}$. Câte astfel de numere sunt? De la **2** la **998** sunt **997** numere consecutive, dintre care jumătate sunt impare, iar jumătate plus **1** sunt numere pare (căci şirul începe şi se termină cu număr par), adică $\mathbf{997 = 2 \times 498 + 1}$; deci sunt **499** numere (pare).

2) Deoarece ***y* + 1** este o sumă pară, iar **1** este un număr impar, rezultă că ***y*** este un număr impar mai mic decât **1 000**, adică $y \in \{1, 3, 5, 7, 9, ..., 999\}$. Câte astfel de numere sunt? De la **1** la **999** sunt **999 de** numere consecutive, dintre care jumătate sunt pare, iar jumătate plus **1** sunt impare (şirul începe şi se termină cu număr impar), deci sunt **500** numere (impare).

3) Pentru ca ***y* + 5** să fie număr par, este necesar ca ***y*** să fie număr natural impar. Deci $y \in \{1, 3, 5, 7, 9, ..., 997, 999\}$, adică **500** numere (impare).

4) ***y*** este un număr natural par. Deci $y \in \{0, 2, 4, ..., 996, 998\}$, adică **500** numere (pare).

93. a) Din enunț rezultă ***y* + 1** divide **100**.
Deci $(y + 1) \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50\}$. Rezultă $y \in \{0, 1, 3, 4, 9, 19, 24, 29\}$.
b) $y \in \{0, 2, 3, 8, 18, 23, 48\}$.

94. Cel mai mare număr impar de două cifre este **99**. Dacă cifra zecilor este mai mică decât cifra unităților, numărul este **89**.

95. 987 – 111 = 876.

96. Sunt mai multe soluții:
a) $\underline{\mathbf{101}}$ **+ 102 + 103 = 306**;
b) **100 +** $\underline{\mathbf{101}}$ **+ 102 = 303**;
c) **99 + 100 +** $\underline{\mathbf{101}}$ **= 300**.

97. Sunt mai multe soluții:
a) $\underline{1\,002} + 1\,004 + 1\,006 + 1\,008 = 4\,020$;
b) $1\,000 + \underline{1\,002} + 1\,004 + 1\,006 = 4\,012$;
c) $998 + 1\,000 + \underline{1\,002} + 1\,004 = 4\,004$;
d) $996 + 998 + 1\,000 + \underline{1\,002} = 3\,996$.

98. Care numere au produsul **33**? $1 \times 33 = 3 \times 11 = 33$.
Dacă luăm prima pereche de factori, când îi adunăm, obținem **34**, deci mai mult decât **33**.
Dacă luăm a doua pereche, obținem $3 + 11 = 14$.
Ce numere am putea să adăugăm la **14**, fără ca produsul **33** să se schimbe?
Numai numărul **1**, care este element neutru la înmulțire, adică:

$$3 + 11 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{?} = 3 \times 11 \times \underbrace{1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{?}.$$

Câți termeni **1** vom putea adăuga, adică $14 + ? = 33$? Deci sunt **19** termeni **1**, căci $33 - 14 = 19$.

99. Dacă $n = 1$, rezultă $(2 \times 5) \cdot 3 + 2 = 30 + 2 = 32$, iar $3 + 2 = 5$; dacă $n = 2$, rezultă $(2 \times 5) \cdot (2 \times 5) \cdot 3 + 2 = 300 + 2 = 302$, iar $3 + 0 + 2 = 5$; dacă $n = 3$, rezultă $(2 \times 5) \cdot (2 \times 5) \cdot (2 \times 5) \cdot 3 + 2 = 3\,000 + 2 = 3\,002$, iar $3 + 0 + 0 + 2 = 5$.
Se observă că numerele sunt de forma:

$$3\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre } 0} + 2, \text{ adică } 3\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ cifre } 0}2$$

iar suma cifrelor oricărui număr de această formă este $3 + 2 = 5$, zero fiind element neutru la adunare.

100. a) Pentru a scrie cel mai mare număr în condițiile date, trebuie să folosim cât mai multe cifre **9**, scrise pe ordinele superioare. Deci în față vom scrie $100 - 20 = 80$ cifre de **9**, iar **20** vor fi cifra **1**, adică:

$$\underbrace{99\ldots9}_{80 \text{ cifre}}\underbrace{111\ldots1}_{20 \text{ cifre}}$$

b) Pentru a scrie cel mai mic număr în condițiile date, trebuie să folosim cât mai multe cifre zero, scrise pe ordinele superioare. Vom scrie o cifră **1** în față, apoi **80** cifre zero, urmate de **19** cifre **1**, adică:

$$1\underbrace{000\ldots0}_{80 \text{ de cifre}}\underbrace{111\ldots1}_{19 \text{ cifre}}$$

101. Observație: precedentul = predecesorul = numărul din față, în şirul numerelor naturale;
consecutiv = succesor = numărul care urmează, în şirul numerelor naturale.
a) Dacă $y + 2$ este predecesorul numărului **17**, rezultă că $y + 2$ este mai mic decât **17** cu **1**, adică $y + 2 = 17 - 1 \Leftrightarrow y + 2 = 16 \Leftrightarrow y = 16 - 2 \Leftrightarrow y = 14$.
b) Dacă $y + 2$ este precedentul lui **10**, înseamnă că $y + 2$ este mai mic decât **10** cu **1**, adică $y + 2 = 10 - 1 \Leftrightarrow y + 2 = 9 \Leftrightarrow y = 9 - 2 \Leftrightarrow y = 7$.
c) Dacă $y + 2$ este succesorul numărului **17**, rezultă că $y + 2$ este mai mare

decât **17** cu **1**, adică $y+2=17+1 \Leftrightarrow y+2=18 \Leftrightarrow y=18-2 \Leftrightarrow y=16$.

d) Dacă $y+2$ este consecutivul numărului **10**, rezultă că $y+2$ este mai mare decât **10** cu **1**, adică $y+2=10+1 \Leftrightarrow y+2=11 \Leftrightarrow y=11-2 \Leftrightarrow y=9$.

e) Dacă $y+2$ este consecutivul par al numărului **14**, rezultă că $y+2$ este mai mare cu **2** decât **14**, adică $y+2=14+2 \Leftrightarrow y+2=16 \Leftrightarrow y=14$.

f) Dacă $y+2$ este precedentul impar al numărului **9**, rezultă că $y+2$ este mai mic decât **9** cu **2**, adică $y+2=9-2 \Leftrightarrow y+2=7 \Leftrightarrow y=5$.

g) Dacă $y+2$ este consecutivul impar al numărului **9**, rezultă că $y+2$ este mai mare decât **9** cu **2**, adică $y+2=9+2 \Leftrightarrow y+2=11 \Leftrightarrow y=9$.

102. Folosim unul dintre procedeele utilizate la exercițiul **10.**, adică pe baza tehnicilor de la exercițiile de mai sus:

$91+a\cdot(1+90)\times 90:2=91\times 91 \Leftrightarrow 91+a\times 91\cdot 45=91\times 91 \Leftrightarrow 91(1+45a)=$
$=91\times 91\,/:91 \Leftrightarrow 1+45a=91\,/-1 \Leftrightarrow 45a=90 \Rightarrow a=90:45 \Leftrightarrow a=2$.

103. Aplicând reguli de calcul rapid (a se vedea ex. **10**), pe etape obținem:

I) $2(1+2+3+4+\ldots+500)-(1+3+5+\ldots+999)=2\cdot(1+500)\cdot 500:2-$
$-(1+999)\cdot(500:2)=250\,500-250\,000=500$;

II) $2(1+2+3+\ldots+50)-(1+3+5+\ldots+99)=2(1+50)\cdot 50:2-(1+3+$
$+5+\ldots+99)=2\times(1+50)\cdot 50:2-(1+99)\cdot(50:2)=2\,550-2\,500=50$;

III) $2(1+2+3+4+5)-(1+3+5+7+9)=30-25=5$. Rezultă:

$500:(50\cdot 5)=500:250=2$.

<u>sau</u>:

I) În prima parte a parantezei rotunde sunt numerele consecutive <u>pare</u> de la **2** la **1 000** inclusiv, iar în a doua parte (care sunt scăzute), numerele consecutive <u>impare</u> de la **1** la **999** inclusiv. În loc să scădem suma numerelor (din a doua parte a primei paranteze), putem scădea pe rând fiecare termen al acesteia. Cum? Deoarece $2-1=1$, iar $4-3=1$ etc., rezultă că putem scrie operațiile din prima paranteză astfel: $(2-1)+(4-3)+(6-5)+\ldots+$ $+(1\,000-999)$. Fiecare scădere are rezultatul **1**. Câte astfel de scăderi avem? Atâtea scăderi (deci atâtea rezultate egale cu **1**), câte numere pare (sau impare) sunt de la **2** la **1 000** (impare, de la **1** la **999**). Câte numere pare sunt de la **2** la **1 000**? De la **1** la **1 000** sunt **1 000** numere <u>consecutive</u>, de la **2** la **1000** sunt **999** numere <u>consecutive</u>, dar **500** numere <u>consecutive pare</u>.

Deci: $(2-1)+(4-3)+(6-5)+\ldots+(1\,000-999)=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{500\ \text{termeni}}=500$.

II) și III) În mod similar, obținem că primul factor din paranteza dreaptă are ca rezultat **50**, iar al doilea, **5**.

Atunci: $500:(50\cdot 5)=500:250=2$.

104. a) <u>Rezolvarea 1</u>

O reprezentare grafică poate fi:

Din desen rezultă că **7** sferturi din număr reprezintă **14**, un sfert fiind **2**, iar numărul căutat este **8**, căci $4\times 2=8$.

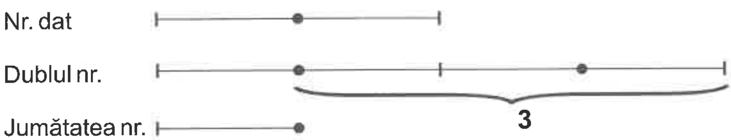
Rezolvarea 2

Notăm numărul căutat cu **y**. Atunci

$$y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y=14 \Leftrightarrow \frac{4}{4}y+\frac{2}{4}y+\frac{1}{4}y=14 \Leftrightarrow \frac{7}{4}y=14 \Leftrightarrow y=14:7\times4 \Leftrightarrow y=8.$$

b) Rezolvarea 1

O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că **3** jumătăți din numărul dat reprezintă **3**, iar o jumătate este **1**. Numărul cerut este **2**×**1 = 2**.

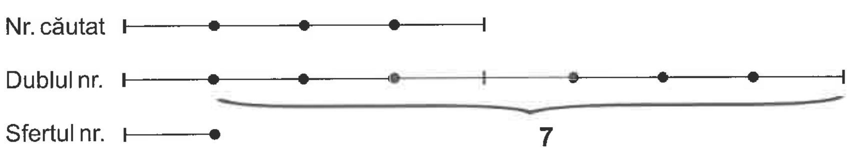
Rezolvarea 2

Notăm cu **y** numărul cerut. Atunci

$$2y-\frac{1}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{4}{2}y-\frac{1}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y=3 \Rightarrow y=3:3\times2 \Rightarrow y=2.$$

c) Rezolvarea 1

Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că **7** sferturi din număr reprezintă **7**, un sfert fiind **1**, iar numărul căutat este **4**×**1 = 4**.

Rezolvarea 2

Notăm cu **y** numărul căutat . Atunci:

$$2y-\frac{1}{4}y=7 \Leftrightarrow \frac{8}{4}y-\frac{1}{4}y=7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}y=7 \Leftrightarrow y=7:7\times4 \Rightarrow y=4.$$

d) Îndoitul unui număr înseamnă dublu acelui număr. Dublul jumătății unui număr este acel număr.

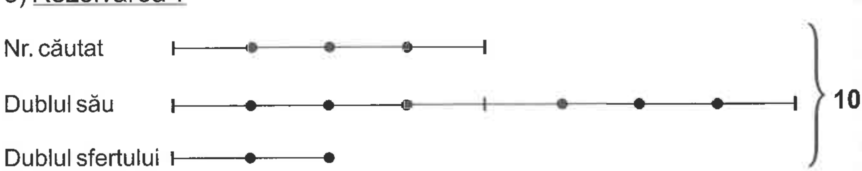
Rezolvarea 1

Dacă din dublul numărului scădem numărul (îndoitul jumătății sale), obținem numărul inițial. Deci numărul căutat este **2**.

Rezolvarea 2

Notăm cu **y** numărul căutat. $2y+2\cdot\frac{1}{2}y=2 \Leftrightarrow 2y-y=2 \Leftrightarrow y=2.$

e) Rezolvarea 1



Din desen rezultă că **10** sferturi din număr reprezintă **10**, un sfert este **1**, iar numărul căutat este **4**, căci $\mathbf{10:10\times4=4}$.

Rezolvarea 2

Notăm cu ***y*** numărul căutat. Atunci:

$$2y+2\cdot\frac{1}{4}y=10\Leftrightarrow 2y+\frac{2}{4}y=10\Leftrightarrow \frac{8}{4}y+\frac{2}{4}y=10\Leftrightarrow\frac{10}{4}y=10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=10:10\times4\Leftrightarrow y=4.$$

f) Rezolvarea 1

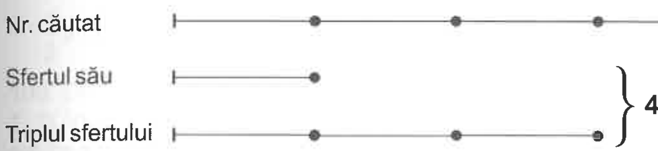
Rezultă că **3** jumătăți din număr reprezintă **3**, iar numărul căutat este $\mathbf{3:3\times2=2}$.

Rezolvarea 2

Dacă ***y*** este numărul căutat, rezultă:

$$\frac{1}{2}y+2\cdot\frac{1}{2}y=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}y+y=3\Leftrightarrow\frac{3}{2}y=3\Leftrightarrow y=3:3\times2\Leftrightarrow y=2.$$

g) Rezolvarea 1



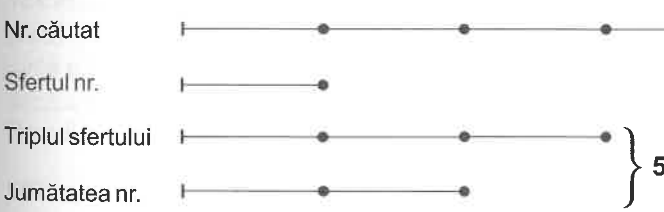
Din desen rezultă că **4** sferturi din număr reprezintă **4**, tocmai numărul căutat, căci un întreg are patru sferturi.

Rezolvarea 2

Notând numărul căutat cu ***y***, putem scrie:

$$\frac{1}{4}y+3\cdot\frac{1}{4}y=4\Leftrightarrow\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}y=4\Leftrightarrow\frac{4}{4}y=4\Leftrightarrow y=4.$$

h) Rezolvarea 1



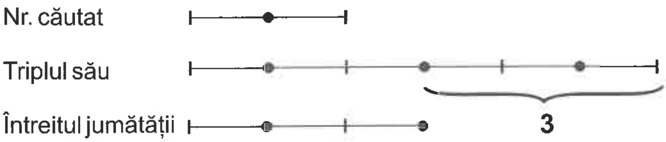
Din desen rezultă că **5** sferturi din număr reprezintă **5**, un sfert este **1**, iar numărul căutat este $\mathbf{1\times4=4}$.

Rezolvarea 2

Dacă ***y*** este numărul căutat, atunci:

$$3\cdot\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}y=5\Leftrightarrow\frac{3}{4}y+\frac{2}{4}y=5\Leftrightarrow\frac{5}{4}y=5\Leftrightarrow\frac{1}{4}y=1\Rightarrow y=1\times4=4.$$

i) Rezolvarea 1



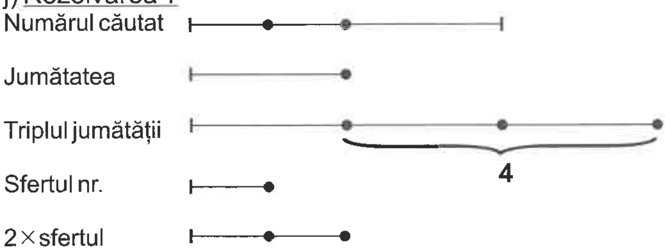
Din desen rezultă că trei jumătăți din număr reprezintă **3**, o jumătate **1**, iar numărul căutat este **2**, căci **3 : 3×2 = 2**.

Rezolvarea 2

Notăm cu ***y*** numărul căutat. Atunci:

$$3y-3\cdot\frac{1}{2}y=3 \Leftrightarrow 3y-\frac{3}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{6}{2}y-\frac{3}{2}y=3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}y=3 \Rightarrow y=3:3\times 2 \Rightarrow y=2.$$

j) Rezolvarea 1

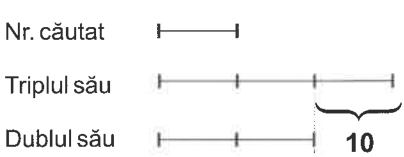


Din desen rezultă că **2** jumătăți, adică numărul căutat, reprezintă **4**.
sau:

Rezolvarea 2

$$3\cdot\frac{1}{2}y-2\cdot\frac{1}{4}y=4 \Leftrightarrow \frac{6}{4}y-\frac{2}{4}y=4 \Rightarrow y=4.$$

k) Rezolvarea 1

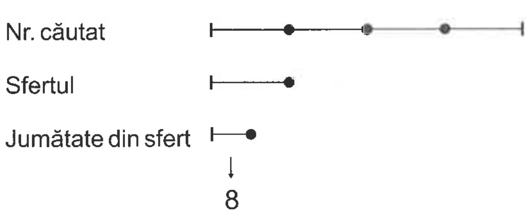


Din desen rezultă că numărul căutat este **10**.

Rezolvarea 2

$$3y-2y=10 \Rightarrow y=10.$$

l) Rezolvarea 1

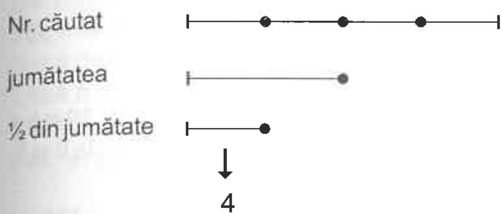


Din desen rezultă că sfertul numărului reprezintă **8 + 8 = 16**, iar numărul căutat este $\mathbf{4\times16=64}$.

Rezolvarea 2

$\frac{1}{4}y:2=8\Rightarrow\frac{1}{8}y=8\Rightarrow y=8\times8\Rightarrow y=64.$

m) Rezolvarea 1



Din desen rezultă că sfertul numărului căutat este 4, iar numărul căutat este $\mathbf{4\times4=16}$.

Rezolvarea 2

$\frac{1}{2}y:2=4\Rightarrow\frac{1}{4}y=4\Rightarrow y=4\times4\Leftrightarrow y=16.$

105. Din $b+(a+c)=11$ şi $b(a+c)=10$, rezultă că $b=1$, căci $11-10=1$, iar 1, la înmulțire, este element neutru. Atunci $a+c=10$. Din $a+c=10$ şi $a=2c+1$, rezultă $3c+1=9$, deci $c=3$, iar $a=7$.

106. Scriind sistematic numerele, obținem:

$100a+10b+c+10a+b+10b+c+10c+a+a+b+c=342\Leftrightarrow 112a+22b+13c=342$, în care a, b şi $c\neq0$.

Din compararea sumei cu termenii, rezultă $a<3$, deoarece un termen nu poate fi mai mare decât suma, iar $112\times3+22b+13c>342$.

Dacă $a=2$, atunci $112\times2+22b+13c=342\Rightarrow 22b+13c=342-224\Leftrightarrow 22b+13c=118$. Se observă că **118** şi $22b$ sunt numere pare. Rezultă că şi $13c$ este un număr par, deci c este un număr par, adică $c\in\{2,4,6,8\}$.

Dacă $c=2$, rezultă $b=(118-2\times3):2\Rightarrow b\notin\mathbb{N}$, fals;

dacă $c=4$, atunci $b=(118-52):22\Rightarrow b=3$;

dacă $c=6$ sau $c=8$, rezultă $b\notin\mathbb{N}$ (fals). La fel şi pentru $a=1$.

Rezultă $\overline{abc}=234$.

107. a) $10a+b=5a+5b \;\begin{vmatrix}-b\\-5a\end{vmatrix}\Rightarrow 5a=4b\Rightarrow a=4,\ b=5$, iar $\overline{ab}=45$;

b) $10a+b=6a+6b \;\begin{vmatrix}-b\\-6a\end{vmatrix}\Rightarrow 4a=5b\Rightarrow a=5,\ b=4$, iar $\overline{ab}=54$;

c) $10a+b=7a+7b \;\begin{vmatrix}-b\\-7a\end{vmatrix}\Rightarrow 3a=6b/:3\Rightarrow a=2b\Rightarrow(b,a)\in\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$, iar $\overline{ab}\in\{21,42,63,84\}$.

d) $10a+b=8a+8b \;\begin{vmatrix}-b\\-8a\end{vmatrix}\Rightarrow 2a=7b\Rightarrow a=7,\ b=2$, iar $\overline{ab}=72$;

e) $10a+b=9a+9b \;\begin{vmatrix}-b\\-9a\end{vmatrix}\Rightarrow a=8b\Rightarrow a=8,\ b=1$, iar $\overline{ab}=81$;

f) $100a+10b+c=11a+11b+11c \left| \begin{array}{l} -11a \\ -10b \\ -c \end{array}\right. \Rightarrow 89a=b+10c \Rightarrow 89a=\overline{cb} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=1$, $\overline{cb}=89$, iar $\overline{abc}=198$.

Sau: în $89a=b+10c$, $c<10$ şi $b<10$. Rezultă $b+10c\leq 9+10\times 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow b+10c\leq 99 \Rightarrow 89a\leq 99 \Rightarrow a=1$. Deci $89=b+10c$. Deoarece $10c=\overline{\cdot 0}$, rezultă $b=9$, $c=(89-9):10 \Leftrightarrow c=8$, iar $\overline{abc}=198$;

g) $100a+10b+c=13a+13b+13c \left| \begin{array}{l} -13a \\ -10b \\ -c \end{array}\right. \Rightarrow 87a=3b+12c\,/:3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 29a=b+4c$.

Dacă $b+4c\leq 9+4\times 9 \Leftrightarrow b+4c\leq 45$, rezultă $29a\leq 45$, deci $a=1$, iar $29=b+$ $+4c$. Se observă că b este un număr impar mai mic decât 10, diferit de 0 şi 1.

Dacă $b=3$, rezultă $c=(29-3):4 \Rightarrow c\notin N$;
dacă $b=5$, rezultă $c=(29-5):4 \Rightarrow c=6$, iar $\overline{abc}=156$;
dacă $b=7$, rezultă $c=(29-7):4 \Rightarrow c\notin N$;
dacă $b=9$, rezultă $c=(29-9):4 \Rightarrow c=5$, iar $\overline{abc}=195$.

h) $100a+10b+c=14a+14b+14c \left| \begin{array}{l} -13a \\ -10b \\ -c \end{array}\right. \Rightarrow 86a=4b+13c$. Pentru b şi c valori maxime, avem $86a\leq 4\cdot 9+13\cdot 9 \Leftrightarrow 86a\leq 153$, rezultă $a=1$.

Din $86=4b+13c$, rezultă $13c$ este un număr par mai mic decât 86, adică $c<86:13 \Leftrightarrow c\leq 6$.

Dacă $c=6$, atunci $b=(86-13\times 6):4 \Rightarrow b=2$, iar $\overline{abc}=126$;
dacă $c=4$, atunci $b=(86-13\times 4):4 \Rightarrow b\notin N$ (fals);
dacă $c=2$, atunci $b=(86-13\times 2):4 \Rightarrow b>10$ (fals).

i) $\overline{abc}=5\cdot\overline{bc} \Leftrightarrow 100a+10b+c=5(10b+c) \Leftrightarrow 100a+10b+c=50b+5c \left| \begin{array}{l} -10b \\ -c \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow 100a=40b+4c\,/:4 \Leftrightarrow 25a=10b+c \Leftrightarrow 25a=\overline{bc}$.

Dacă $a=1$, rezultă $\overline{bc}=25$; dacă $a=2$, rezultă $\overline{bc}=50$; dacă $a=3$, rezultă $\overline{bc}=75$.

Sau: $100a+\overline{bc}=5\overline{bc}\,/-\overline{bc} \Rightarrow 100a=4\overline{bc}\,/:4 \Leftrightarrow 25a=\overline{bc}$; atunci: $\overline{abc}\in\{125, 250, 375\}$.

j) $\overline{abc}=6\overline{bc} \Leftrightarrow 100a+10b+c=60b+6c \left| \begin{array}{l} -10b \\ -c \end{array}\right. \Leftrightarrow 100a=50b+5c\,/:5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20a=10b+c \Leftrightarrow 20a=\overline{bc}$.

Dacă $a=1$, atunci $\overline{bc}=20$; dacă $a=2$, atunci $\overline{bc}=40$; dacă $a=3$, atunci $\overline{bc}=60$; dacă $a=4$, atunci $\overline{bc}=80$; dacă $a=5$, atunci $\overline{bc}=100$ (fals). Rezultă: $\overline{abc}\in\{120, 240, 260, 480\}$.

Sau: $\overline{abc}=6\cdot\overline{bc} \Rightarrow 100a+\overline{bc}=6\overline{bc}\,/-\overline{bc} \Rightarrow 100a=5\overline{bc}\,/:5 \Leftrightarrow 20a=\overline{bc}$ etc.

k) $\overline{abc}=6\overline{ac} \Rightarrow 100a+10b+c=60a+6c \left| \begin{array}{l} -c \\ -60a \end{array}\right. \Rightarrow 40a+10b=5c\,/:5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8a+2b=c$.

Se observă că c este un număr par mai mic decât 10 (căci sunt 2 termeni pari), dar mai mare sau egal cu 8 (căci $a\neq 0$, iar suma trebuie să fie cel puțin egală cu un termen). Atunci $8a+2b=8$, în care $a=1$, iar $b=0$; deci $\overline{abc}=108$.

l) Scriind sistematic numerele, obținem:
$1\,000a+100b+10c+d+100b+10c+d+10c+d+d=1\,506 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\,000a + 200b + 30c + 4d = 1\,506$.
Deoarece $1\,000a$ este un termen al sumei, el nu poate fi mai mare decât suma $1\,506$, deci $a = 1$, iar $1\,000a = 1\,000$. Atunci:
$200b + 30c + 4d = 1\,506 - 1\,000 \Leftrightarrow 200b + 30c + 4d = 506$. Se observă că $200b$ şi $30c$ se termină în zero. Rezultă că $4d$ se termină în 6, adică d poate fi 4 sau 9, căci $4 \times 4 = \overline{\cdot 6}$, iar $4 \times 9 = \overline{\cdot 6}$. Dacă $d = 4$, rezultă $200b + 30c = 506 - 4 \times 4 \Leftrightarrow 200b + 30c = 490$. Din ultima egalitate rezultă $b \in \{1, 2\}$. Dacă $b = 1$, atunci $30c = 490 - 200 = 290$, fals, căci $290 : 30 \notin \mathbf{N}$. Dacă $b = 2$, atunci $30c = 490 - 400 \Leftrightarrow 30c = 90$, iar $c = 90 : 30 \Leftrightarrow c = 3$. Rezultă $\overline{abcd} = 1234$.
Dacă $d = 9$, rezultă $200b + 30c = 506 - 36 \Leftrightarrow 200b + 30c = 470$. Rezultă $b \le 2$. Dacă $b = 1$, $30c = 470 - 200 \Leftrightarrow 30c = 270 \Leftrightarrow c = 9$, ceea ce nu convine, căci $c \ne d$; dacă $b = 2$, $30c = 470 - 400 \Leftrightarrow 30c = 70 \Leftrightarrow c \notin \mathbf{N}$.
Deci singura soluție: $\overline{abcd} = 1234$.

m) $111a + 210b + 12c = 900 \,/ : 3 \Rightarrow 37a + 70b + 4c = 300$.
Din enunț rezultă că a şi $b \ne 0$. Din ultima egalitate rezultă că $37a$ este un număr par, adică a este număr par, căci $70b$, $4c$ şi 300 sunt numere pare. Dacă $b \ne 0 \Rightarrow 70b \ge 70 \times 1$, iar $37a \le 300 - 70 \Leftrightarrow 37a \le 230 \Rightarrow a$ număr par mai mic sau egal cu 6. Dacă $a = 2$, atunci $70b + 4c = 300 - 37 \times 2 \Leftrightarrow 70b + 4c = 226$. Deoarece $70b = \overline{\cdot\cdot 0}$, iar $226 = \overline{\cdot\cdot 6}$, rezultă că $4c = \overline{\cdot\cdot 6}$, adică $c \in \{4, 9\}$. Dacă $c = 4$, rezultă $70b = 226 - 4 \times 4 \Leftrightarrow 70b = 210$, deci $b = 210 : 70 \Leftrightarrow b = 3$, iar $\overline{abc} = 234$; dacă $c = 9$, rezultă $70b = 226 - 4 \times 9 \Leftrightarrow 70b = 190 \Leftrightarrow b = 190 : 70 \Leftrightarrow b \notin \mathbf{N}$.
Dacă $a = 4$, atunci: $70b + 4c = 300 - 37 \times 4 \Leftrightarrow 70b + 4c = 152$. Deoarece $70b = \overline{\cdot\cdot 0}$, rezultă $4c = \overline{\cdot\cdot 2} \Rightarrow c$ poate fi 3 sau 8; dacă $c = 3$, atunci $70b = 152 - 4 \times 3 \Leftrightarrow 70b = 140$, iar $b = 2$, deci $\overline{abc} = 423$; dacă $c = 8$, atunci $70b = 120$, iar $b = 120 : 70$, fals. Dacă $a = 6$, atunci: $70b + 4c = 300 - 37 \times 6 \Leftrightarrow 70b + 4c = 78$; $b = 1$, iar $4c = 8$, adică $c = 2$, iar $\overline{abc} = 612$.

n) $100x + 10y + z = 11x + 11y + 11z \;\left|\begin{array}{l} -11x \\ -10y \\ -z \end{array}\right. \Rightarrow 89x = 10z + y$. Se observă că $10z + y \le 10 \cdot 9 + 9 \Rightarrow 89x \le 99 \Rightarrow x = 1$. Deoarece $10z = \overline{\cdot\cdot 0}$, iar $89x = 89$, rezultă $y = 9$, iar $10z = 80 \Rightarrow z = 8$. Deci $\overline{xyz} = 198$. Sau: $89x = \overline{zy} \Rightarrow x = 1$, iar $\overline{zy} = 89$ etc.

o) $10x + y = 21\,(x - y) \Rightarrow 10x + y = 21x - 21y \;\left|\begin{array}{l} -y \\ -10x \end{array}\right. \Rightarrow 0 = 11x - 22y \Rightarrow$

$\Rightarrow 11x = 22y \,/ : 11 \Leftrightarrow x = 2y$. Rezultă $\overline{xy} \in \{21, 42, 63, 84\}$.

108. Adunăm, membru cu membru, cele două egalități, obținând:

$$\begin{array}{l} 7x + 5y - z = \;\;8 \text{ şi} \\ \underline{\qquad\quad\; y + z \;= 11} \\ 7x + 6y \qquad = 19 \end{array}$$

Deoarece 19 este o sumă impară, iar $6y$ este un număr par, rezultă că $7x$ este un număr impar mai mic decât 19, deci x este un număr impar mai mic decât 3, căci $7 \times 3 > 19$. Unica soluție: $x = 1$. Atunci $y = (19 - 7) : 2 \Rightarrow y = 2$, iar $z = 11 - 2 \Rightarrow z = 9$. Deci $\overline{xyz} = 129$.

109. 1) $a + ab = 7 \Leftrightarrow a(1 + b) = 7$. Care numere dau la înmulțire produsul **7**? 1×7 şi 7×1. Rezultă că $a\in\{1, 7\}$. Dacă $a = 1$, atunci $1 + b = 7 \Rightarrow b = 6$; dacă $a=7$, atunci $1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$. Deci $(a, b)\in\{(1, 6), (7, 0)\}$.

2) $b + ab = 3 \Leftrightarrow b(1 + a) = 3$. Numerele care înmulțite dau produsul **3** sunt **1** şi **3** sau **3** şi **1**. Deci $b\in\{1, 3\}$. Dacă $b = 1$, atunci $1 + a = 3 \Rightarrow a = 2$; dacă $b=3$, atunci $1 + a = 1 \Rightarrow a = 0$. Deci $(a, b)\in\{(2,1), (0, 3)\}$.

110. a) Pe scurt: $\overline{abc} = 8q + 6$; $\overline{abc}$ minim = ? $\overline{abc}$ maxim = ? Cel mai mic număr de **3** cifre este **100**, iar cel mai mare, **999**. Care sunt câturile şi resturile împărțirii acestor numere la **8**? $100 : 8 = 12$ şi rest $4 \Leftrightarrow 100 = 8\times 12 + 4$; $999 : 8 = 124$ şi rest $7 \Leftrightarrow 999 = 8\times 124 + 7$. Se observă că prin împărțirea lui **100** la **8**, restul este **4**. Ca să obținem restul **6**, ar trebui să mai adăugăm la **100** diferența dintre **6** şi **4**, adică **2**; deci cel mai mic număr ce îndeplineşte condițiile date este **102**. La împărțirea lui **999** la **8**, câtul este **7**, nu **6**. Dacă din **999** scădem **1**, diferența dintre **7** şi **6**, obținem numărul **998**, care împărțit la **8** dă restul **6**.

b) Numerele căutate sunt de forma $\overline{abc} = 8q + 6$. Şirul lor este: $8\times 12 + 6$, $8\times 13 + 6, 8\times 14 + 6, 8\times 15 + 6, ..., 8\times 123 + 6, 8\times 124 + 6$.
Pentru a calcula câte astfel de numere sunt, trebuie să observăm că sunt diferite câturile, care sunt numere consecutive (de la **12** la **124** inclusiv). Sunt deci **113** astfel de numere, căci $124 - 11 = 113$.

111. Asemănătoare cu problema anterioară. Pe scurt: $\overline{abcd} = 39q + 16$; $\overline{abcd}$ minim = ?; $\overline{abcd}$ maxim = ?
a) Cel mai mic număr de **4** cifre este **1 000**, iar $1\,000 : 39 = 25$, rest $25 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1000 = 39\times 25 + 25$. Însă $25 = 16 + 9$. Pentru a determina pe $\overline{abcd}$ minim, ar trebui să scădem din **1 000** pe **9**, dar $991 \neq \overline{abcd}$. Rezultă că q minim este **26**, iar $\overline{abcd} = 39\times 26 + 16 \Leftrightarrow \overline{abcd} = 1\,030$. Cel mai mare număr de **4** cifre este **9999**, iar $9\,999 : 39 = 256$, rest $15 \Leftrightarrow 9\,999 = 256\times 39 + 15$. Însă $16 = 15 + 1$. Pentru a determina $\overline{abcd}$ maxim, ar trebui să adunăm **1** la **9 999**, dar $10\,000 \neq \overline{abcd}$. Rezultă că q maxim nu este **256**, ci **255**, iar $\overline{abcd} = 9\,961$, căci $39\times 255 + 16 = 9\,961$.
b) Deoarece primul termen este $39\times 26 + 16$, iar ultimul este $39\times 255 + 16$, rezultă suma: $39\times 26 + 16 + 39\times 27 + 16 + 39\times 28 + 16 ... + 39\times 255 + 16 =$
$$= (39\times 26 + 39\times 27 + 39\times 28 + ... + 39\times 254 + 39\times 255) + (\underbrace{16 + 16 + ... + 16}_{?\ \text{termeni}}).$$
Câți termeni are fiecare sumă? (din cele două paranteze). Vor fi atâția termeni câte numere sunt de la **26** la **255**, inclusiv, adică $255 - 25 = 230$ termeni. Scoțând în factor comun obținem:
$39\cdot(26 + 27 + 28 + ... + 254 + 255) + 16\times 230 = 39\cdot(26 + 255)\cdot 230 : 2 +$ $+ 16\cdot 230 = 1\,236\,965$.

112. Pe scurt: $\overline{aba} : 15 = q$, rest $6 \Rightarrow \overline{aba} = 15q + 6$. La înmulțire, un număr terminat în **5** poate da un produs terminat în **0** sau în **5**. Atunci: $\overline{aba} = \overline{\cdot\cdot 0} + 6 = \overline{\cdot\cdot 6}$ sau $\overline{aba} = \overline{\cdot\cdot 5} + 6 = \overline{\cdot\cdot 1}$. Rezultă: $\overline{aba}\in\{\overline{6b6}, \overline{1b1}\}$. Scriind sistematic numerele obținute, rezultă: $\overline{6b6} = 600 + 10b + 6$ şi $\overline{1b1} = 100 +$ $+ 10b + 1$, iar $(600 + 10b + 6) : 15 = q$, rest **6** şi $(100 + 10b + 1) : 15 = q$, rest **6**.

În primul caz, împărțim pe rând fiecare termen al sumei la **15**, adică: $\mathbf{600 : 15 = 40}$; $\mathbf{(10b + 6) : 15 = d}$, rest **6**. Rezultă că $\mathbf{10b}$ se împarte exact la **15**, restul **6** fiind deja obținut. Deci $\mathbf{10b \in \{30, 60, 90\}}$; $\mathbf{b \in \{3, 6, 9\}}$, iar $\mathbf{\overline{6b6} \in \{636, 666, 696\}}$. În al doilea caz, la împărțirea cu **15**, obținem: $\mathbf{100 : 15 = 6}$, rest **10**; $\mathbf{(10 + 10b + 1) : 15 = n}$, rest **6** $\Leftrightarrow \mathbf{(10b + 11) : 15 = n}$, rest **6** $\Leftrightarrow \mathbf{10b + (11 - 6) = 15n \Leftrightarrow 10b + 5 = 15n \Rightarrow b \in \{1, 4, 7\}}$, iar $\mathbf{\overline{1b1} \in \{111, 141, 171\}}$.

113. $\mathbf{142 : b = q}$, rest $\mathbf{10 \Rightarrow 142 - 10 = bq}$, în care $\mathbf{10 < b < q}$. Deoarece $\mathbf{132 = 11 \cdot 12}$, rezultă $\mathbf{b = 11}$, $\mathbf{q = 12}$, iar împărțirea este $\mathbf{142 : 11 = 12}$, rest **10**.

114. Din $\mathbf{4a \cdot 2b = 224 \Rightarrow a \cdot b = 224 : 8 \Leftrightarrow a \cdot b = 28 \,/ \times 2 \Rightarrow 2a \cdot b = 56}$. În loc de $\mathbf{2a}$ punem $\mathbf{b + 1}$ și rezultă $\mathbf{(b + 1) \cdot b = 56}$. Se observă că am obținut două numere consecutive ce au produsul **56**, adică $\mathbf{8 \times 7 = 56}$. Rezultă $\mathbf{b = 7}$, iar $\mathbf{a = 28 : 7 \Rightarrow a = 4}$.

115. $\mathbf{a + b + c = 24}$, fiecare termen este multiplu de **4**, iar $\mathbf{a = (b + c) : 2}$. Fiind o sumă mică, soluțiile se pot găsi și oral. În cazul în care suma este mai mare (spre exemplu **54**), este nevoie de un raționament mai economic, astfel: deoarece $\mathbf{a = (b + c) : 2 \Rightarrow b + c = 2a}$. Înlocuind în sumă **24**, obținem: $\mathbf{a + 2a = 24 \Leftrightarrow 3a = 24 \Rightarrow a = 8}$. Deci $\mathbf{b + c = 24 - 8 \Leftrightarrow b + c = 16}$. Deoarece $\mathbf{b \neq c \neq a}$, iar $\mathbf{b = M_4}$ și $\mathbf{c = M_4}$, soluțiile sunt $\mathbf{b = 4}$, $\mathbf{c = 12}$ sau $\mathbf{12 = b}$, $\mathbf{c = 4}$.

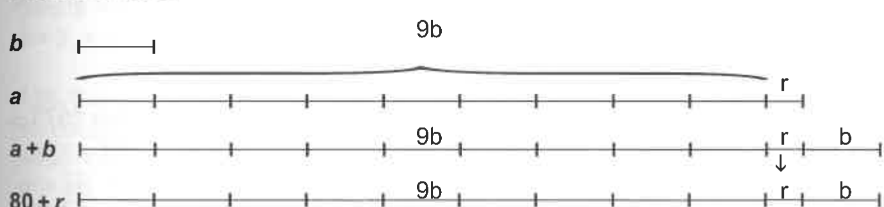
116. Fie ***a*** și ***b*** cele două numere.

Rezolvarea 1

Putem scrie: $\mathbf{a : b = 9}$, rest $\mathbf{r \Rightarrow a = 9b + r}$ și $\mathbf{r + 80 = a + b}$. Ultima egalitate devine: $\mathbf{r + 80 = 9b + r + b \Leftrightarrow r + 80 = 10b + r \,/ - r \Leftrightarrow 80 = 10b \Rightarrow b = 8}$, iar $\mathbf{6 < r < 8 \Rightarrow r = 7}$. Atunci $\mathbf{a = 9 \times 8 + 7 \Leftrightarrow a = 79}$ sau: $\mathbf{a = (7 + 80) - 8 \Rightarrow a = 79}$.

Rezolvarea 2

Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă $\mathbf{10b = 80 \Rightarrow b = 8}$. Deoarece $\mathbf{6 < r < 8 \Rightarrow r = 7}$, iar $\mathbf{a = 9 \times 8 + 7 = 79}$.

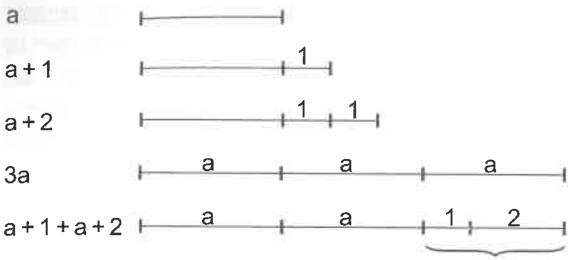
117. Fie ***a*** primul număr; celelalte două sunt $\mathbf{a + 1}$ și $\mathbf{a + 2}$.

Rezolvarea 1

Din enunț rezultă: $\mathbf{a + 1 + a + 2 = 3a \Leftrightarrow 2a + 3 = 3a \Rightarrow a = 3}$; celelalte două numere sunt **4** și **5**.

Rezolvarea 2

Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că $\boldsymbol{a = 1 + 2 \Leftrightarrow a = 3}$; $\boldsymbol{a + 1 = 3 + 1 \Leftrightarrow a + 1 = 4}$; $\boldsymbol{a + 2 = 3 + 2 \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow a + 2 = 5}$.

118. Din enunț rezultă:
– cantitatea strânsă de un băiat este mai mare decât cea strânsă de o fată;
– cantitatea de fructe culese de băieți este reprezentată de un număr terminat în zero, adică $\mathbf{10}x$, iar cea culeasă de fete este un multiplu de **11**, adică $\mathbf{11}y$. Deci: $\mathbf{10}x + \mathbf{11}y = \mathbf{272}$, în care $\mathbf{10}x = \overline{\cdot\cdot 0}$, iar $\mathbf{272} = \overline{\cdot\cdot 2}$. Rezultă $\mathbf{11}y = \overline{\cdot\cdot 2}$, deci $y \in \{\mathbf{2}, \mathbf{12}\}$. Dacă $y = \mathbf{2}$, atunci $\mathbf{10}x = \mathbf{272 - 2 \times 11 = 250}$, iar $\mathbf{250 - 22 = 228}$; dacă $y = \mathbf{12}$, atunci $\mathbf{10}x = \mathbf{272 - 12 \times 11 = 140}$, iar $\mathbf{140 - 132 = 8}$.

119. Dacă fiecare dintre cei patru prieteni s-a născut după anul **1901,** anul de naştere al fiecăruia este un număr de forma $\overline{19ab}$.
a) Vârsta lui Alin poate fi notată $\overline{ab}$. Rezultă: $\overline{19ab} + \overline{ab} = 1960 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{ab} = 60 \Rightarrow 2 \cdot \overline{ab} = 60 \Rightarrow \overline{ab} = 60 : 2 \Rightarrow \overline{ab} = 30$; $\overline{19ab} = 1930$.
b) Vârsta lui Barbu poate fi notată $2 \cdot \overline{ab}$. Rezultă: $\overline{19ab} + 2 \cdot \overline{ab} = 1960 \Rightarrow \overline{ab} + 2 \cdot \overline{ab} = 60 \Rightarrow 3 \cdot \overline{ab} = 60 \Rightarrow \overline{ab} = 60 : 3 \Leftrightarrow \overline{ab} = 20$; $\overline{19ab} = 1920$.
c) Vârsta lui Costel poate fi notată $3 \cdot \overline{ab}$. Rezultă: $\overline{19ab} + 3 \cdot \overline{ab} = 1960 \Rightarrow 4 \cdot \overline{ab} = 60 \Rightarrow \overline{ab} = 60 : 4 \Leftrightarrow \overline{ab} = 15$; $\overline{19ab} = 1915$.
d) Vârsta lui Didel poate fi notată $4 \cdot \overline{ab}$. Rezultă: $\overline{19ab} + 4 \cdot \overline{ab} = 1960 \Rightarrow 5 \cdot \overline{ab} = 60 \Rightarrow \overline{ab} = 60 : 5 \Rightarrow \overline{ab} = 12$; $\overline{19ab} = 1912$. Deci anii de naştere ai celor patru prieteni sunt: **1930, 1920, 1915** şi **1912**.

120. Notăm cu $\overline{\mathbf{19ab}}$ anul de naştere al fiecăruia. Din enunț rezultă:
$\overline{\mathbf{19ab}} + \mathbf{2(1 + 9} + a + b) = \mathbf{1971} \Leftrightarrow \mathbf{1900 + 10}a + b + \mathbf{2 + 18 + 2}a + \mathbf{2}b = \mathbf{1971} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{1920 + 12}a + \mathbf{3}b = \mathbf{1971} \,/ - \mathbf{1920} \Leftrightarrow \mathbf{12}a + \mathbf{3}b = \mathbf{51} \,/ : \mathbf{3} \Leftrightarrow \mathbf{4}a + b = \mathbf{17}$.
Rezultă: $\mathbf{(a, b)} \in \{\mathbf{(4, 1), (3, 5), (2, 9)}\}$.
Anii de naştere sunt: **1941**,**1935** şi **1929**, iar vârstele: **30** ani, **36** ani şi **42** ani.

121. Scriind sistematic deîmpărțitul, obținem:
$\mathbf{2 \times (10}a + b + \mathbf{10}b + a) : (a + b) \cdot \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{308} \Leftrightarrow \mathbf{2 \times (11}a + \mathbf{11}b) : (a + b) \cdot \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{308}$ $\Leftrightarrow \mathbf{2 \cdot 11} \cdot (a + b) : (a + b) \cdot \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{308} \Leftrightarrow \mathbf{22} \cdot \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{308} \Rightarrow \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{308 : 22} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{14}$.

122. a) Se observă că produsul a trei diferențe (neefectuate) este $\mathbf{6 \cdot 7 \cdot 5}$. Ce informații mai avem?
Rezultatul este format din **3** factori ce sunt numere consecutive: **5, 6, 7**. În fiecare diferență descăzutul este acelaşi, $\overline{ab}$, iar scăzătorul este reprezentat prin numere consecutive, aşezate în ordine descrescătoare.
Dacă descăzutul este acelaşi, diferența este mai mare atunci când

scăzătorul este mai mic.
Deci cei trei factori (care nu se împart exact între ei, sunt numere prime) constituie rezultate astfel: $\overline{ab} - 7 = 5$; $\overline{ab} - 6 = 6$; $\overline{ab} - 5 = 7$.
Rezultă $\overline{ab} = 12$.
b) Rezultatul este format din **2** factori, numere consecutive; în prima parte a egalității sunt **3** diferențe neefectuate, deci vor fi **3** factori. Deducem că $3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$, iar $\overline{ab} - 11 = 1$; $\overline{ab} - 10 = 2$; $\overline{ab} - 9 = 3$. Rezultă $\overline{ab} = 12$.
c) Se observă că sunt **3** factori (căci în primul membru al egalității sunt **3** diferențe neefectuate) care au produsul **60**. Puteți spune care este cel mai mic și cel mai mare factor? Da, deoarece descăzutul este același, numai scăzătorul este diferit. $\overline{ab} - 18 < \overline{ab} - 16$. Cu cât? Cu **2**, căci $18 - 16 = 2$. Deci sunt **3** numere consecutive care au produsul **60**. Aceste numere sunt: **3**, **4**, **5**. Rezultă $\overline{ab} - 18 = 3$, $\overline{ab} - 17 = 4$ și $\overline{ab} - 16 = 5$, iar $\overline{ab} = 18 + 3 \Leftrightarrow \overline{ab} = 21$ sau $\overline{ab} = 17 + 4 = 21$ sau $\overline{ab} = 16 + 5 \Leftrightarrow \overline{ab} = 21$.

123. Dacă produsul este **156**, rezultă că numerele sunt mai mari decât **10**, căci $10 \times 10 = 100$, sunt mai mici decât **20**, căci $20 \times 20 = 400$.
Dintre numerele consecutive, au produsul terminat în **6** cele de forma $\overline{\cdot 2}$ și $\overline{\cdot 3}$ sau $\overline{\cdot 7}$ și $\overline{\cdot 8}$.
Fiind numere cuprinse între **10** și **20**, unica soluție este $12 \times 13 = 156$, căci $17 \times 18 > 156$.
Soluție pentru elevii din clasa a V-a:
$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 = 4 \cdot 3 \cdot 13 = 12 \cdot 13$.

124. Fie $\overline{ab}$ numărul căutat. Din $(\overline{ab} + 5) : 6 = (\overline{ab} - 6) : 5$ deoarece $d = q \times î$, rezultă $\overline{ab} + 5 = (\overline{ab} - 6) : 5 \times 6 \Leftrightarrow \overline{ab} + 5 = (\overline{ab} - 6) \times 6 : 5 \Leftrightarrow \overline{ab} + 5 = (6\overline{ab} - 36) : 5 \Leftrightarrow 6\overline{ab} - 36 = 5\overline{ab} + 25 \Leftrightarrow \overline{ab} = 61$.

125. Deoarece $a : b = 4$, rest $r \Rightarrow a = 4b + r$, iar restul este **1**, căci $a + b = 11$, adică $4b + 1 + b = 11 \Leftrightarrow 5b + 1 = 11 \Rightarrow b = 2$, $a = 9$, iar $\overline{ab} = 92$.
Sau: $a = 4b + r \Rightarrow a + b = 5b + r \Rightarrow 5b + r = 11$. Rezultă $b \leq 2$; dar $r < b \Rightarrow r = 1$, $b = 2$, $a = 11 - 2 \Leftrightarrow a = 9$, iar $\overline{ab} = 92$.

126. Cum putem obține termenii din egalitățile date folosindu-ne de termenii sumei pe care trebuie să o determinăm? Din $\overline{abcd}$ obținem: $\overline{a000} + \overline{b00} + \overline{c0} + d$. Din $\overline{efgh}$ obținem: $\overline{e000} + \overline{f00} + \overline{g0} + h$. Pentru a obține $\overline{af} + \overline{eb}$, asociem $(\overline{a000} + \overline{f00}) + (\overline{e000} + \overline{b00})$ și rezultă:
$$100(10a + f) + 100(10e + b) = 100\overline{af} + 100\overline{eb} = 100(\underbrace{\overline{af} + \overline{eb}}_{99}) = 100 \times 99 = 9\,900$$
Pentru a obține $\overline{ch}$ și $\overline{gd}$, asociem $(\overline{c0} + h) + (\overline{g0} + d)$ și rezultă $\overline{ch} + \overline{gd} = 99$.
Deci $\overline{abcd} + \overline{efgh} = 9\,900 + 99 = 9\,999$.

127. Scriind sistematic numerele date, obținem:
$1\,111a + 111b + 11c + d = 2\,167$, din care rezultă $a = 1$ (căci dacă $a \geq 2$ rezultă că un termen, $1\,111a$, este mai mare decât suma, ceea ce este fals). Atunci $111b + 11c + d = 2\,167 - 1\,111 = 1\,056$. Deoarece valoarea maximă a termenului $\overline{cc}$ poate fi **99**, rezultă că b trebuie să ia valoarea maximă, adică **9**, iar $11c + d = 1\,056 - 999 = 57$. Dacă $c + d = 7$, rezultă $c = 5$, $d = 2$, iar $\overline{abcd} =$

$= 1\,952$. Atunci $1\,952 : 1\,952 = 1$.
Observație: Scrierea sistematică mai poate fi: $\overline{aaaa} + \overline{bbb} + \overline{cc} + d = 2\,167$.

128. $1\,010a + 101b - 1\,010b - 101a = 909 \Leftrightarrow 909a - 909b = 909 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 909 \cdot (a - b) = 909\ / : 909 \Rightarrow a - b = 1$.
Rezultă că $(a, b) \in \{(9, 8), (8, 7), (7, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)\}$, iar $(\overline{abab} : 101) \in \{98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21\}$.
Într-o altă variantă putem scrie:
$\overline{abab} - \overline{baba} = 101\overline{ab} - 101\,\overline{ba} = 101(\overline{ab} - \overline{ba})$; $101(\overline{ab} - \overline{ba}) = 909 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 9 \Rightarrow a - b = 1$. (În continuare aceeaşi rezolvare).

129. $1\,000a + 100b + 10c + d - 100a - 10b - c - 10a - b - d = 1\,264 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 890a + 89b + 9c = 1\,264$. Se observă că $890a \leq 1\,264 \Rightarrow a = 1$.
Deci $89b + 9c = 1\,264 - 890 \Leftrightarrow 89b + 9c = 374$. Atunci $89b \leq 374 \Rightarrow b \leq 374 : 89$
$\Rightarrow b \leq 4$. Dacă $b = 4$, atunci $9c = 374 - 89 \times 4 \Leftrightarrow 9c = 374 - 356 \Leftrightarrow 9c = 18 \Rightarrow$
$c = 2$. Pentru $b < 4$ se obțin pentru c valori mai mari decât 10, ceea ce nu convine. Deoarece $\overline{142d} - (142 + 14 + d) = 1\,264 \Leftrightarrow 1\,420 + d - 156 - d =$
$= 1264$, rezultă $d \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.
Deci $1248 : 16 = 78$ (rest 0), iar $\overline{abcd} = 1248$.

130. Scriind sistematic numerele, obținem: $7 \times 111a = 1\,000c + 111a - c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7 \cdot 111a = 111a + 999c\ / : 111 \Rightarrow 7a = a + 9c\ / -a \Rightarrow 6a = 9c\ / : 3 \Rightarrow 2a = 3c$.
Se observă că produsul din fiecare membru este multiplu de (se împarte exact la) **2** şi **3**. Deoarece a şi c sunt cifre, produsul poate fi: **6**; **12**; **18**.
Rezultă: $(a, c) \in \{(3, 2), (6, 4), (9, 6)\}$, iar rezultatele împărțirii lui $\overline{ac}$ la **32** sunt: **1**; **2**; **3**.

131. Prima împărțire din enunț poate fi scrisă: $\overline{xyzut} = 4 \cdot \overline{utzyx}$. Dacă produsul este tot un număr de **5** cifre, rezultă $4 \cdot u < 10$, deci u poate fi **1** sau **2**.
Dar $4 \cdot x \neq \overline{\cdot\cdot 1}$, rezultă $u = 2$, iar $x = 8$. Până aici avem: $4 \cdot \overline{2tzy8} = \overline{8yzt2}$. (Puteți aranja numerele unele sub altele). Deoarece $4 \cdot t = y$, rezultă $4 \cdot t < 10$, rezultă $t \in \{0, 1, 2\}$. Dar $u \neq t$, deci $t \neq 2$ (din enunț). Rezultă $t \in \{0, 1\}$. Din $4y + 3 = \overline{.t} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4y + 3 = \overline{.0}$ sau $\overline{.1}$. Rezultă: $4y = \overline{.0} - 3 = \overline{.7}$ (fals) şi $4y = \overline{.1} - 3 = \overline{.8}$; atunci $y = 7$, căci $y \neq u$, deci $y \neq 2$. Rezultă $t = 1$, $y = 7$. Deoarece $4 \cdot z + 3 = \overline{3z}$, rezultă $z = 9$, iar $21\,978 \times 4 = 87\,912$.
Atunci: $(21\,978 + 87\,912) : 10\,989 = 109\,890 : 10\,989 = 10$.

132. 1) Din enunț rezultă următoarea împărțire:
$\overline{abcd} : \overline{ab} = \overline{10}$
$\overline{ab}$
$== \overline{cd}$ (împărțirea nu este terminată)
Fiind o împărțire exactă, rezultă că $\overline{cd} : \overline{ab} = q$ (fără rest), adică $\overline{cd} = M\overline{ab}$.
Fiind cifre distincte, $\overline{cd} \neq \overline{ab}$. Pentru $\overline{abcd}$ minim, $\overline{cd} = 2 \cdot \overline{ab}$.
Pentru ca $a \neq b \neq c \neq d$, $\overline{ab} \in \{10, 11, 12\}$, căci $10 \times 2 = 20$, $(0=0)$; $11 = \overline{aa} \neq \overline{ab}$;
$\overline{ab}$ $\overline{cd}$
↓ ↓
$12 \times 2 = 24$ $(b \neq c)$. Rezultă $\overline{ab} = 13$, $\overline{cd} = 26$, iar $1\,326 : 13 = 102$, deci $\overline{abcd} =$

$=1\,326$.
2) $\overline{abcd} : \overline{cd} = q_2$, în care $\overline{ab} < \overline{cd}$. Singura soluție: $\overline{abcd} = 1\,025$, căci $1\,025 : 25 = 41$.

133. Din enunț rezultă că: $\overline{abcd}\times 4 = \overline{dcba}$. Deoarece prin înmulțire obținem tot un număr de **4** cifre, rezultă că $a \leq 2$ (dacă ar fi **3**, atunci am obține un număr de **5** cifre). Dar $d\times 4 = \overline{...a} \Rightarrow d\times 4 = \overline{...1}$ sau $d\times 4 = \overline{...2}$. Rezultă numai $a = 2$. Deci $\overline{2bcd}\times 4 = \overline{dcb2}$. Deoarece $d\times 4 = \overline{...2}$, rezultă $d\in\{3, 8\}$. Însă $a\times 4 \leq d$. Evident $a\times 4 \leq 8$, deci $d = 8$. Până aici avem: $\overline{2bc8}\times 4 = \overline{8cb2}$. Se observă că $4\cdot b < 10$ (adică nu avem cifră de transport, căci $4\cdot 2 = 8$). Deci $b\in\{1, 2\}$. Dacă $b = 1$, rezultă $\overline{21c8}\times 4 = \overline{8c12}$. Se observă că $4\cdot c + 3 = \overline{..1}$, deci $c\in\{2, 7\}$; dacă $c = 2$, rezultă $2128\times 4 = 8512$, dar $1 \neq 5$. Dacă $c = 7$, rezultă $2178\times 4 = 8172$. Dacă $b = 2$, rezultă $\overline{22c8}\times 4 = \overline{8c22}$, iar $4c + 3 = \overline{..2}$, ceea ce este fals, căci la adunarea unui număr par cu un număr impar nu obținem un număr par. Deci $\overline{dcba} : \overline{abcd} = 4 \Leftrightarrow 8\,712 : 2\,178 = 4$.

134. Scriind sistematic (interesându-ne câtul $\overline{yz}$), obținem: $(100x + \overline{yz}) : 3 = \overline{yz}$, restul fiind $x \Leftrightarrow 100x + \overline{yz} = 3\cdot\overline{yz} + x\,/-x \Leftrightarrow 99x + \overline{yz} = 3\cdot\overline{yz}\,/-\overline{yz} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 99x = 2\cdot\overline{yz} \Rightarrow x = 2$, iar $\overline{yz} = 99$, deci $\overline{xyz} = 299$.

135. $100a + 10b + c = 5(100c + 10b + a) + 36 \Leftrightarrow 95a = 499c + 40b + 36$. Deoarece $95a \leq 95\cdot 9 \Rightarrow 499c = 499 \Rightarrow c = 1$. Deci: $95a = 40b + 499 + 36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 95a = 40b + 535$. Se observă că $5 < a < 10$, iar dacă $40b + 535 = \overline{..5}$, rezultă $95a = \overline{..5} \Rightarrow a\in\{9, 7\}$. Dacă $a = 9$, $\Rightarrow 95\cdot 9 = 40b + 535 \Rightarrow b = (855 - 535) : 40$ $\Leftrightarrow b = 8$. Dacă $a = 7$, rezultă $95\times 7 = 40b + 535 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$ (fals). Deci $\overline{abc} = 981$.

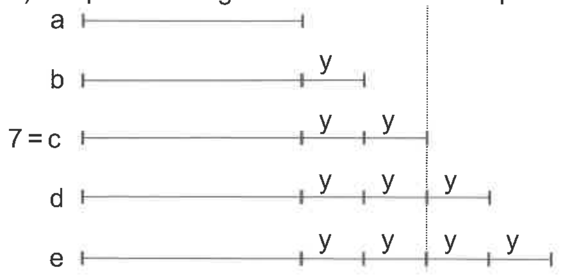
136. Ce informații avem? Fiecare factor este de forma $\overline{abc}$ sau $\overline{xyz}$. Dacă primul factor este $\overline{abc}$, elevul a transcris $\overline{abc} - 111$. În enunț avem: $\overline{abc}\cdot\overline{xyz} = 28\,782$, dar elevul a rezolvat: $(\overline{abc} - 111)\cdot\overline{xyz} = 15\,129$. Aplicând distributivitatea înmulțirii față de scădere obținem: $\overline{abc}\cdot\overline{xyz} - 111\cdot\overline{xyz} = 15\,129 \Leftrightarrow 28\,782 - 111\cdot\overline{xyz} = 15\,129 \Rightarrow 111\cdot\overline{xyz} = 28\,782 - 15\,129 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 111\cdot\overline{xyz} = 13\,653 \Rightarrow \overline{xyz} = 13\,653 : 111 \Leftrightarrow \overline{xyz} = 123$. Dacă $\overline{xyz} = 123$, iar $\overline{abc}\cdot 123 = 28\,782 \Rightarrow \overline{abc} = 28\,782 : 123 \Leftrightarrow \overline{abc} = 234$. Într-o altă variantă de lucru, primul factor, transcris de elev, s-ar putea nota astfel: $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)}$. Scriindu-l sistematic, obținem: $[100(a-1) + 10(b-1) + (c-1)]\cdot\overline{xyz} = 15129$ $\Leftrightarrow (100a - 100 + 10b - 10 + c - 1)\cdot\overline{xyz} = 15\,129 \Leftrightarrow [(100a + 10b + c) - (100 + 10 + 1)]\cdot\overline{xyz} = 15\,129 \Leftrightarrow (\overline{abc} - 111)\cdot\overline{xyz} = 15\,129$ (în continuare este aceeași rezolvare).

137. Din enunț rezultă: $\overline{ab}\cdot\overline{cd} = 1\,288 \Leftrightarrow \overline{ab}\cdot(10c + d) = 1\,288$. Elevul a transcris astfel: $\overline{ab}\cdot[(10c + 10) + (d - 1)] = 1\,495 \Leftrightarrow \overline{ab}\cdot(10c + d + 9) = 1\,495 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overline{ab}(\overline{cd} + 9) = \overline{ab}\cdot\overline{cd} + 9\cdot\overline{ab} = 1\,495 \Leftrightarrow 1\,288 + 9\cdot\overline{ab} = 1\,495 \Leftrightarrow 9\cdot\overline{ab} = 1\,495 - 1288 \Leftrightarrow 9\cdot\overline{ab} = 207 \Leftrightarrow \overline{ab} = 23$. Deoarece $\overline{ab}\cdot\overline{cd} = 1\,288 \Rightarrow 23\times\overline{cd} = 1\,288$ $\Rightarrow \overline{cd} = 1\,288 : 23 \Leftrightarrow \overline{cd} = 56$.

138. Fie cele **5** numere naturale a, b, c, d şi, respectiv, e. Notăm cu y

diferența dată.

a) O reprezentare grafică a celor **5** numere poate fi următoarea:



Dacă transferăm **2*y*** de la ***e*** la ***a*** şi ***y*** de la ***d*** la ***b***, obținem **5** părți, fiecare egală cu al treilea număr.
Deci suma celor **5** numere este $\mathbf{5 \times 7 = 35}$.

b) Dacă $\boldsymbol{a + y = b}$, iar $\boldsymbol{a + 2y = c \Rightarrow a + 2y = 7}$. Deoarece **2*y*** este un număr par, iar suma **7** este un număr impar, rezultă că ***a*** este un număr impar mai mic decât **7**, adică $\boldsymbol{a \in \{1, 3, 5\}}$. Dacă $\boldsymbol{a = 1}$, atunci: $\boldsymbol{1 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3}$; deci $\boldsymbol{b = 1 + 3 = 4}$; $\boldsymbol{c = 4 + 3 = 7}$; $\boldsymbol{d = 7 + 3 = 10}$; $\boldsymbol{e = 10 + 3 = 13}$. Dacă $\boldsymbol{a = 3}$, atunci: $\boldsymbol{3 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2}$; deci $\boldsymbol{b = 3 + 2 = 5}$; $\boldsymbol{c = 5 + 2 = 7}$; $\boldsymbol{d = 7 + 2 = 9}$; $\boldsymbol{e = 9 + 2 = 11}$. Dacă $\boldsymbol{a = 5}$, atunci: $\boldsymbol{5 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1}$; deci $\boldsymbol{b = 5 + 1 = 6}$; $\boldsymbol{c = 6 + 1 = 7}$; $\boldsymbol{d = 7 + 1 = 8}$; $\boldsymbol{e = 8 + 1 = 9}$. Sau: Pe baza desenului, suma **35** se poate exprima astfel: $\boldsymbol{5a + 10y = 35}$. $\boldsymbol{10y = M_{10}}$ mai mic decât **35**, căci $\boldsymbol{5a \neq 0}$. Deci $\boldsymbol{10y \in \{10, 20, 30\}}$. Dacă $\boldsymbol{10y = 10 \Rightarrow y = 1}$, iar $\boldsymbol{5a = 35 - 10 \Leftrightarrow 5a = 25 \Rightarrow a = 5}$, $\boldsymbol{b = 6}$, $\boldsymbol{c = 7}$, $\boldsymbol{d = 8}$, $\boldsymbol{e = 9}$. Dacă $\boldsymbol{10y = 20 \Rightarrow y = 2}$, iar $\boldsymbol{5a = 15 \Rightarrow a = 3}$. Atunci $\boldsymbol{b = 3 + 2 \Leftrightarrow b = 5}$; $\boldsymbol{c = 5 + 2 \Leftrightarrow c = 7}$; $\boldsymbol{d = 7 + 2 \Leftrightarrow d = 9}$; $\boldsymbol{e = 9 + 2 \Leftrightarrow e = 11}$. Dacă $\boldsymbol{10y = 30 \Rightarrow y = 3}$, iar $\boldsymbol{5a = 5 \Leftrightarrow a = 1}$. Atunci $\boldsymbol{b = 1 + 3 \Leftrightarrow b = 4}$; $\boldsymbol{c = 4 + 3 \Leftrightarrow c = 7}$; $\boldsymbol{d = 7 + 3 \Leftrightarrow d = 10}$; $\boldsymbol{e = 10 + 3 \Leftrightarrow e = 13}$.

139. Dacă numărul este de **2** cifre, el are forma $\overline{ab}$. Atunci $\boldsymbol{10a + b + 10a + b = 182 \Rightarrow 20a + 2b = 182 \,/ : 2 \Rightarrow 10a + b = 91 \Rightarrow \overline{ab} = 91}$.
Dacă numărul este de **3** cifre, el are forma $\overline{abc}$. Atunci: $\boldsymbol{100a + 20b + 2c = 182 \Rightarrow a = 1}$, iar $\boldsymbol{20b + 2c = 82 \,/ : 2 \Leftrightarrow 10b + c = 41}$, $\boldsymbol{\overline{bc} = 41}$, iar $\boldsymbol{\overline{abc} = 141}$.
Sunt două soluții: **91** şi **141**.

140. a) $\boldsymbol{6 + b = \overline{.3} \Rightarrow b = 7}$; $\boldsymbol{a + 6 + 1 = \overline{.5} \Rightarrow a = 8}$; $\boldsymbol{2 + 1 = c \Rightarrow c = 3}$; deci $\boldsymbol{286 + 67 = 353}$.

b) $\boldsymbol{b + 7 = \overline{.0} \Rightarrow b = 3}$; $\boldsymbol{1 + 9 + c = \overline{.4} \Rightarrow c = 4}$; $\boldsymbol{a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5}$; deci $\boldsymbol{593 + 47 = 640}$.

c) $\boldsymbol{\overline{1b} - 7 = 5 \Rightarrow b = 2}$; $\boldsymbol{a - 1 - 3 = 6 \Rightarrow a = 0}$; $\boldsymbol{4 - 1 - c = d \Rightarrow 3 - c = d}$; dacă $\boldsymbol{c = 1 \Rightarrow d = 2}$; dacă $\boldsymbol{c = 2 \Rightarrow d = 1}$. Deci $\boldsymbol{402 - 137 = 265}$ sau $\boldsymbol{402 - 237 = 165}$.

d) $\boldsymbol{\overline{1b} - 6 = 5 \Rightarrow b = 1}$; $\boldsymbol{(18 - 1) - c = 8 \Rightarrow 17 - c = 8}$; $\boldsymbol{c = 9}$; $\boldsymbol{a - 1 - 5 = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6}$. Deci $\boldsymbol{681 - 596 = 85}$.

e) $\boldsymbol{15 - c = 9 \Rightarrow c = 6}$; $\boldsymbol{\overline{1a} - 1 - 2 = 8 \Rightarrow a = 1}$; $\boldsymbol{b - 1 - f = 0 \Rightarrow b - (1 + f) = 0 \Rightarrow b > f}$ cu **1**. Atunci: $\boldsymbol{(b, f) \in \{(9, 8), (8, 7), (7, 6), ..., (1, 0)\}}$. $\boldsymbol{11 - 2 = d \Rightarrow d = 9}$; $\boldsymbol{7 - 1 = e \Rightarrow e = 6}$. O soluție: **71 615 – 2 526 = 69 089**.

f) $\boldsymbol{11 - e = 9 \Rightarrow e = 2}$; $\boldsymbol{\overline{1a} - 1 - 9 = 0 \Rightarrow a = 0}$; $\boldsymbol{12 - 1 - d = 8 \Rightarrow d = 3}$; $\boldsymbol{10 - 1 - c = 0}$

$\Rightarrow c = 9; 6 - 1 - b = 0 \Rightarrow 5 = b \Rightarrow b = 5$. Deci $60\,201 - 59\,392 = 809$.

g) Dacă suma începe cu **8**, rezultă că U poate fi **8** sau **7** (dacă avem cifră de transport). Verifică numai $U = 7$. Deci $\overline{7N7} + \overline{7N} + 7 = 872$. Din $7 + \overline{.N} + 7 = \overline{.2}$ $\Rightarrow N = 8$, căci $14 + 8 = 22$. Deci adunarea este: $787 + 78 + 7 = 872$. Sau: Dacă scriem sistematic termenii adunării, obținem: $102U + 11N = 802$, în care $U < 8$, iar $N > 7$; deoarece $11N$ este număr par, rezultă $N = 8$, iar $102U = 802 - 11 \cdot 8 \Rightarrow U = 714 : 102 \Rightarrow U = 7$.

h) Din $2U + N = \overline{.N}$ rezultă că $2U = \overline{.0} \Rightarrow U = 5$. Din $10 + N = \overline{1N}$ şi din $N + 5 + 1 = 15 \Rightarrow N + 9$, iar adunarea este: $595 + 59 + 5 = 659$. Sau: $112U + 11N = 600 + 10\,U + N \Leftrightarrow 102U + 10N = 600$. Deoarece $600 = \overline{..0}$, iar $10N = \overline{.0} \Rightarrow$ $\Rightarrow 102U = \overline{..0} \Rightarrow U = 5$, iar $10N = 600 - 510 \Rightarrow N = 9$.

i) Din $A + A + N = A \Rightarrow A = 1$, iar $N = 9$. Din $D + 9 + 1 + 1 = 19 \Rightarrow D = 8$. Din $1 + 8 + 1 = \overline{.I} \Rightarrow I = 0$. Din $S + 1 = 8 \Rightarrow S = 7$. Adunarea este: $71\,981 + 8\,191 + 19 = 80191$.

j) Deci $4 \cdot \overline{PLUS} = \overline{3P{*}04}$. Avem $4 \cdot P = \overline{3P}$ numai dacă P este **8** sau **9** şi dacă $4 \cdot L > 30$, adică $4 \cdot 8 + 6 = 38$ sau $4 \cdot 9 + 3 = 39$. Deoarece $4 \cdot L < 60$, rezultă că $P \neq 8$, deci $P = 9$. Dacă $4S = \overline{.4}$, rezultă $4 \times 1 = 4$ sau $4 \times 6 = 24$. Dacă $S = 1$ şi $4U = \overline{.0}$, rezultă $U = 5$. Dacă $S = 6$, rezultă $4 \cdot U + 2 = \overline{.0}$, adică $U \in \{2, 7\}$. Atunci $4 \cdot L + 1 = \overline{3*}$ (căci $4 \cdot P = \overline{3P}$ şi $P = 9$; deci $39 = 36 + 3$). Rezultă $L \in \{7, 8, 9\}$. Numerele sunt: **9 851**; **9 826**; **9 876**; **9 926**; **9 976**; **9 776**.

k) Din $5 \cdot E = \overline{.5}$, rezultă $E \neq 0$, iar $R + R \neq 6$ şi $R + R > 10$, adică $R + R = \overline{.6}$; din $E + 1 = \overline{.0}$, rezultă $E = 9$, iar $P = 8$. Din $4 \cdot L + 4 = \overline{.8}$, rezultă $4 \cdot L = \overline{.4}$, deci L poate fi **1** sau **6**. Deoarece $3 \cdot 9 = \overline{.9}$, rezultă $L \neq 1$ şi $L = 6$; atunci $2 \cdot R + 2 = \overline{.6}$, rezultă $2 \cdot R = 14$, deci $R = 7$. Adunarea este: $897\,969 + 7\,969 + 969 + 69 + 9 = 906\,985$.

l) $11a + 20 + b = \overline{ccc}$. Deoarece $a < 10$, $b < 10$, suma nu poate fi decât **111**. Rezultă deci $11a + b = 111 - 20 \Leftrightarrow 11a + b = 91$. Deoarece $b < 10$, rezultă $9 > a > 7$, deci $a = 8$, adică $88 + b = 91$, iar $b = 3$. Adunarea este $88 + 23 = 111$.

m) $11a + 2 \cdot b = \overline{ccc}$, adică $b < 10$, iar $\overline{ccc} = 111$. Deoarece $11a$ este număr impar cel puțin egal cu **81**, rezultă $a = 9$, iar $b = 6$. Adunarea este $99 + 2 \times 6 = 111$.

n) $111a : b = 11b + c \Leftrightarrow 111a = b(10b + c) \Leftrightarrow 3 \cdot 37 = b(10b + c)$. Deoarece $b < 10$, pentru a exista egalitatea, rezultă $b = 3$, iar $37a = 10 \cdot 3 + c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 37a = 30 + c$. Deci $a = 1$, $b = 3$, iar $c = 7$. Împărțirea este $111 : 3 = 37$.

141. $n = \overline{2a7b} + \overline{51c6} = \overline{8d94}$. Se observă că $b = 8$, $c = 1$, iar $a = 9$, căci $2 + 5 + 1 = 8$. Deci $2\,978 + 5\,116 = 8\,094$.

142. **1)** Ultima cifră a primului produs parțial este **4**, deci $b \in \{4, 9\}$, căci $6 \times 4 = \overline{.4}$, iar $6 \times 9 = \overline{.4}$. Dacă $b = 4$, atunci avem $36 \times 4 = 144$. Dacă prima cifră a produsului este **1**, rezultă $\overline{a4} \leq 1\,944 : 36 \Leftrightarrow \overline{a4} \leq 55$, iar $\overline{a4} \geq 1004 : 36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overline{a4} > 27$. Deci $\overline{a4} \in \{34, 44, 54\}$, iar $36 \times 34 = 1\,224$; $36 \times 44 = 1\,584$; $36 \times 54 = 1\,994$. Dacă $b = 9$, atunci avem $36 \times 9 = 324$. Deci $\overline{a9} \leq 1\,994 : 36 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{a9} \leq 55$, iar $\overline{a9} \geq 1004 : 36 \Rightarrow \overline{a9} > 27$. Deci $\overline{a9} \in \{29, 39, 49\}$, iar $36 \times 29 = 1\,044$; $36 \times 39 = 1\,404$; $36 \times 49 = 1\,764$.

2) Din $2 \cdot \overline{ab} = \overline{7*} \Rightarrow 2 \cdot b \geq 10$, iar $a = 3$. Din $\overline{3b} \cdot c = \overline{{*}0{*}} \Rightarrow c \cdot b > 10$, iar $c = 3$. Din $10 < 3 \cdot b < 20$ (căci $7 + * = \overline{1*}$) şi din $2 \cdot b \geq 10$, rezultă $b \in \{5, 6\}$. Înmulțirile sunt: $35\times32=1\,120$; $36\times32=1\,152$.

3) Deoarece ultima cifră a celui de-al doilea produs parțial este scrisă pe locul sutelor, rezultă că litera O notează cifra zero. Din $V\cdot\overline{NOI}=\overline{***}$, rezultă $V\cdot N<10$. Deoarece literele diferite notează cifre diferite, rezultă:

a) $T\neq0$, căci $O=0$;

b) $I\cdot I>10$ (pentru că $T\neq0$);

c) $I\cdot N>10$ (la înmulțirea lor obținem un număr de două cifre la primul produs parțial);

d) $(V,N)\in\{(3,2),(2,3),(4,2),(2,4)\}$.

Pentru cifre distincte, verifică numai $309\times209=64\,581$.

4) Deoarece $3b=\overline{.1}\Rightarrow b=7$. Din $d\times7=\overline{.3}\Rightarrow d=9$. Din $9\times a+6=\overline{.0}\Rightarrow$ $\Rightarrow 9\times a=\overline{.4}\Rightarrow a=6$. Până aici avem $567\times\overline{c39}$. Din $567\times c=\overline{***}$, un număr de 3 cifre, rezultă $c=1$. Înmulțirea dată este $567\times139=78\,813$.

5) Termenii constituie produse parțiale la înmulțirea dată. Pe baza algoritmului înmulțirii a două numere naturale, din enunț deducem: dacă la înmulțirea lui $\overline{abcde}$ cu u se obține **95 173**, tot un număr de cinci cifre, rezultă $u\cdot a\leq9$, care împreună cu $u\times e=\overline{.3}$, duce la concluzia că $(u,e)\in\{(1,3),(3,1)\}$. Din $t\times e=\overline{.1}$ şi din $1+?=10$, rezultă $e=3$, $u=1$, iar $\overline{abcde}=95\,713$. Atunci $95\,713\times1\,531=95\,713+2\,871\,390+47\,856\,500+95\,713\,000=146\,536\,603$.

6) Putem aşeza în scris înmulțirea. Dacă $3\cdot a=\overline{.5}$, rezultă $a=5$. Tot **5** va fi şi ultima cifră a fiecărui produs parțial. Dacă cifra zecilor de la produsul final este **8**, atunci $5+?=8$, iar $3b+1=\overline{.3}$. Deci $b=4$, iar a doua cifră a fiecărui produs parțial este **3**. Dacă $5+3+?=\overline{.0}$, rezultă $3c+1=\overline{.2}$, iar $c=7$. Deci $54\,745\times33\,333=1\,824\,815\,085$.

143. a) Se observă că $b=4$. Deoarece restul este **0**, rezultă $\overline{2*6*}=2\,968$. Din $\overline{3*64}-\overline{*9*8}=296$, rezultă $\overline{*9*8}=2\,968$, iar $\overline{3*64}=3\,264$. Din $\overline{6a7}-\overline{*7*}=$ $=326$, rezultă $\overline{6a7}=697$, iar $\overline{*7*}=371$. Din $1\times\overline{c7d}=371$, rezultă $\overline{c7d}=371$. Din $2\,968:371=f=g$, rezultă $f=8$ şi $g=8$. Împărțirea este: $69\,748:371=$ $=188$.

b) Să privim "drumul" în efectuarea împărțirii în sens invers, de la sfârşit spre început. Din $\overline{1*e}-\overline{*8e}=0$ şi din $e=e$, rezultă $\overline{1*e}=\overline{18e}$. Din $\overline{9d}-\overline{*2}=18$, rezultă $d=0$, iar $\overline{*2}=90-18=72$. Din $z\times\overline{g6}=72$, rezultă $z=2$, iar $\overline{g6}=36$. Din $36\times t=\overline{18e}$, rezultă $t=5$, iar $e=0$. Din $\overline{abc}=36\times4+9$, rezultă $\overline{abc}=153$. Împărțirea este: $15\,300:36=425$.

c) Din enunț rezultă că: $\overline{abcd}\times4=\overline{dcba}$. Deoarece prin înmulțire obținem tot un număr de **4** cifre, rezultă că $a\leq2$ (dacă ar fi mai mare, am obține un număr mai mare de cifre). Dacă $d\times4=\overline{.a}$, rezultă $d\times4=\overline{.1}$ sau $d\times4=\overline{.2}$. Rezultă numai $a=2$. Deci $\overline{2bcd}\times4=\overline{dcb2}$, iar $d\in\{3,8\}$. Dar $a\times4\leq d$. Evident că $a\times4\leq8$, deci $d=8$. Până aici avem: $\overline{2bc8}\times4=\overline{8cb2}$. Din $b\times4<10$ (nu avem cifră de transport), rezultă $b\in\{1,2\}$. Dacă $b=1$, rezultă $\overline{21c8}\times4=\overline{8c12}$. Se observă că $4\times c+3=\overline{.1}$, deci $c\in\{2,7\}$. Dacă $c=2$, rezultă $2\,128\times4=8512$, dar $1\neq5$; dacă $c=7$, rezultă $2\,178\times4=8\,712$. (Dacă $b=2$, rezultă $\overline{22c8}\times4=\overline{8c22}$, iar $4c+3=\overline{.2}$, ceea ce este fals, căci la adunarea unui număr par cu un număr impar obținem un număr impar, nu par.)

d) Din enunț rezultă că: $\overline{abc}=2\cdot\overline{cba}+100\Rightarrow100a+10b+c=200c+20b+$

$+ 2a + 100 \Leftrightarrow 98a = 199c + 10b + 100$. Dacă $a - c = 4 \Rightarrow a = c + 4$, iar $98(c+4) = 199c + 10b + 100 \Leftrightarrow 98c + 392 = 199c + 10b + 100 \Leftrightarrow 292 = 101c +$ $+ 10b$. Deoarece $c \neq 0$, $c < 10$, $b < 10$, rezultă $c = 2$, iar $292 - 202 = 10b$. Atunci $b = 9$, iar $a = 6$. Deci $\overline{abc} = 692$. Sau: $\overline{(c+4)bc} = 2 \cdot \overline{cb(c+4)} + 100$ şi se ajunge la $292 = 101c + 10b$. Sau: $\overline{abc} = 2 \cdot \overline{cba} + 100 \Rightarrow \overline{cba} + \overline{cba} + 100 =$ $= \overline{abc} \Rightarrow a + a + 0 = \overline{1c}$ (căci $c + c + 1 \leq a$). Deci $2c + 8 = 10 + c \Rightarrow c = 2$, iar $a = 6$. Dacă $\overline{6b2} = 2 \cdot \overline{2b6} + 100 \Rightarrow 2 \cdot 6 = 12$, iar $2b + 1 = \overline{1b}$. Unica soluţie este $b = 9$ şi $\overline{abc} : \overline{cba} = 692 : 296$.

144. Din enunţ rezultă $(\overline{ab} - \overline{ba}) : ab = a - b \Rightarrow 9(a - b) = ab(a - b) \Rightarrow 9 = ab$. Deoarece $a \geq b$, rezultă $(a, b) \in \{(9, 1), (3, 3)\}$, iar $\overline{ab} \in \{91, 33\}$.

145. Rezolvarea 1
Din scrierea $\overline{abc}$ rezultă $a \neq 0$, iar din enunţ $c \neq 0$. Dacă $c = 1$, atunci $b = 4$, iar $a = 4 : 2 = 2$ şi $\overline{abc} = 241$. Dacă $c = 2$, atunci $b = 8$, iar $a = 8 : 2 = 4$ şi $\overline{abc} = 482$. Dacă $c = 3$, atunci $b = 12$, ceea ce nu convine.
Rezolvarea 2:
Date fiind relaţiile din enunţ, cea mai mare sumă a cifrelor luate ca simple unităţi este $9 + 8 + 7 = 24$. Dacă $b = 4c$, iar $b = 2a$, rezultă $2a = 4c \Leftrightarrow a = 2c$, iar $2c + 4c + c \leq 24 \Leftrightarrow c \leq 3$. Dacă $c = 3$, $b = 12$, ceea ce nu convine. Dacă $c = 2$, $b = 8$, $a = 4$, iar $\overline{abc} = 482$. Dacă $c = 1$, $b = 4$, $a = 2$, iar $\overline{abc} = 241$.

146. Din enunţ rezultă $\overline{5a} : 7 = q$ (rest 6) $\Leftrightarrow \overline{5a} = 7q + 6 \Rightarrow 7q \leq \overline{5a} - 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow 7q \leq 53 \Rightarrow q \leq 7$. Dacă $q = 7$, atunci $\overline{5a} = 7 \times 7 + 6 = 55$, iar $\overline{5a} = 55$. (Dacă $q = 6$, atunci $\overline{5a} \neq 7 \times 6 + 6$).

147. Deoarece împărţitorul este **9**, restul maxim poate fi **8**. Atunci $\overline{7a} : 9 = q$ (rest 8) $\Rightarrow \overline{7a} = 9q + 8 \Rightarrow 9q \leq 71 \Rightarrow q \leq 7$, iar $\overline{7a} = 9 \times 7 + 8 \Rightarrow \overline{7a} = 71$.

148. Trebuie să descompunem pe **30** în **3** factori, dintre care unul să fie suma celorlalţi doi, adică: $30 = 2 \cdot 3 \cdot (2 + 3)$; $30 = 1 \cdot 5 \cdot (1 + 5)$.

149. $a \times a \times a = 9a \Rightarrow a \times a = 9 \Rightarrow a = 3$, iar $\overline{aa} = 33$.

150. Fie numărul natural a. Din enunţ rezultă: $a \cdot a : (a + a) = 14 \Leftrightarrow a \cdot a = 14 \cdot 2a$ $\Rightarrow a = 14 \cdot 2 \Rightarrow a = 28$.

151. Deoarece produsul este egal cu suma lor, rezultă că sunt numere mai mici decât **10**, cu diferenţă minimă între ele. Diferenţa minimă este **1**. Deci sunt numere naturale consecutive, adică **1**, **2** şi **3**, căci $1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$. (Dacă am avea $2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 + 3 + 4$, ar fi un enunţ fals. Alte numere consecutive nu convin, căci produsul devine mult mai mare faţă de sumă).

152. Din enunţ rezultă că numerele sunt diferite de zero şi sunt numere mici, iar produsul este mai mare decât **10**. Deci $2 \times 9 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2 +$ $+ 9 + 7 \cdot 1 \Leftrightarrow 18 = 18$.

153. Deoarece $10^2 = 10 \times 10$, iar $a \times a = a^2$ şi $a + a = 2a$, rezultă $2a = a \times a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 2$. Verificare: $2 + 2 = 2 \times 2 = 2^2$.

154. De exemplu: $2 \cdot 4 + 1 = 9 = 3^2$; $1 \cdot 3 + 1 = 4 = 2^2$; $4 \cdot 6 + 1 = 25 = 5^2$; $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 4^2$ etc.
În general: $a(a + 2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$.

155. $y \cdot z = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$; $z \cdot x = 7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$, rezultă $z = 5$, $y = 3$. Dacă $3x = 21 \Rightarrow x = 7$.

156. Din enunț rezultă:
$\overline{ab} = \overline{cd} + 2 = 2q + 2$ deci $\overline{ab}$ se împarte exact la **2**;
$\overline{ab} = \overline{ef} + 5 = 5x + 5$, deci $\overline{ab}$ se împarte exact la **5**;
$\overline{ab} = \overline{gh} + 7 = 7y + 7$, deci $\overline{ab}$ se împarte exact la **7**.
Rezultă $\overline{ab}$ se împarte exact la **2**, la **5** şi la **7**. Deci $\overline{ab} = 70$.

157. $1\,000x + 111y - 1\,110y - x = 111x \Leftrightarrow 999(x - y) = 111x \Leftrightarrow 9x - 9y = x \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x - 9y = 0 \Rightarrow 8x = 9y \Rightarrow x = 9, y = 8$.

158. Deoarece $\overline{aa} = 11a$, rezultă că fiecare termen are cel mult două cifre.
1) Primul număr este de forma $\overline{b2}$, al doilea este $\overline{b2} + 2$, iar $\overline{b2} + \overline{b2} + 2 = 11a$
$\Rightarrow 2 \cdot \overline{b0} = 11a - 6$. Deoarece $2 \cdot \overline{b0} = \overline{.0}$, rezultă $11a - 6 = \overline{.0}$, iar $a = 6$. Atunci $\overline{b0} = 30$, iar $\overline{b2} = 32$ şi $\overline{b2} + 2 = 34$.
2) Primul număr este de forma $\overline{b7}$, al doilea este $\overline{b7} + 5$, adică $2 \cdot \overline{b0} = 11a - 19$. Rezultă $11a - 19 = \overline{.0}$, iar $a = 9$, $\overline{b7} = 47$; $\overline{b7} + 5 = 52$.

159. Din enunț rezultă: $a - 20 = b \Rightarrow a = 20 + b$; $a - 19 = c \Rightarrow a = 19 + c$; $a - 2 = d \Rightarrow a = 21 + d$; $a - 24 = e \Rightarrow a = 24 + e$, iar $a = b + c + d = e$; $3a = 84 \Rightarrow a = 28$.

160. Pe scurt enunțul este: $3a \geq 213$, în care $a < 213$. Rezultă $a \geq 213 : 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \geq 71 \Rightarrow a \in \{71, 72, 73, ..., 212\}$. Câte numere sunt? $212 - 70 = 152$ sau $213 - 71 = 152$.

161. Media trimestrială este media aritmetică a notelor primite. Cum se calculează media aritmetică ? Sunt două moduri:
a) împărțim suma notelor la numărul de note, adică:
1) $(7 + 8 + 9 + 8) : 4 = 32 : 4 = 8$;
2) $(9 + 9 + 10 + 8) : 4 = 36 : 4 = 9$;
3) $(8 + 10 + 10 + 8) : 4 = 36 : 4 = 9$;
4) $(10 + 8 + 10 + 10 + 10) : 5 = 48 : 5 = 45 : 5 + 3 : 5 = 9 + 0{,}60 = 9{,}60$;
deoarece sunt mai mult de **49** de sutimi de punct peste **9**, după normele actuale, media trimestrială va fi **10**.
b) pentru cazul **1**), vedem care este nota cea mai mică (**7**) şi câte unități au celelalte note în plus față de **7**, adică $(8 - 7) + (9 - 7) + (8 - 7) = 1 + 2 + 1 = 4$.
Avem deci **4** note de **7** plus **4** puncte. Împărțind cele **4** puncte la **4**, obținem $7 + 4 : 4 = 7 + 1 = 8$. Răspuns: Dan va avea media cea mai mare.
Observație: Putem lua ca termen de comparație alt număr, cel care ni se pare mai apropiat de medie (**8**).
Unitățile în plus le repartizăm notelor la care unitățile sunt în minus, adică $9 - 1 = 7 + 1$.

162. $(70 + 80 + 48 + 42) : 4 = 240 : 4 = 60$ (kg).

163. Al doilea turist parcurge într-o zi media distanțelor parcurse de primul turist în cele **3** zile, adică $(100 + 111 + 95) : 3 = 306 : 3 = 102$ (km/zi).

164. Fie a celălalt număr. Rezultă: $(a + 12) : 2 = 9 \Rightarrow a + 12 = 2 \times 9 \Rightarrow a + 12 = 18 \Rightarrow a = 18 - 12 \Rightarrow a = 6$.

165. Notăm numerele cu a, b şi, respectiv, c. Rezultă $(a + b + c) : 3 = 18 \Rightarrow a + b + c = 54$; $b = a + 4$; $c = b + 13 \Leftrightarrow c = a + 4 + 13 \Rightarrow c = a + 17$. Înlocuind în sumă pe b şi c prin a, obținem: $a + a + 4 + a + 17 = 54 \Leftrightarrow 3a = 54 - 21 \Rightarrow a = 11$; $b = 11 + 4 = 15$; $c = 28$. Se poate utiliza şi metoda grafică.

166. Din enunț rezultă că media aritmetică a primelor două numere este **21**, cea dintre primul şi al treilea număr este **22**, iar cea a ultimelor două este **25**. Fie a, b şi c cele trei numere naturale. Atunci: $(a + b) : 2 = 21 \Rightarrow (a + b) = 42$; $(a + c) : 2 = 22 \Rightarrow a + c = 44$; $(b + c) : 2 = 25 \Rightarrow b + c = 50$. Dacă adunăm, membru cu membru, cele trei relații obținute, rezultă: $2a + 2b + 2c = 136 \Rightarrow 2(a + b + c) = 136 \Rightarrow a + b + c = 68$. Dacă $a + b = 42$, atunci $c = 68 - 42 = 26$; dacă $a + 26 = 44$, rezultă $a = 44 - 26 = 18$; dacă $18 + b = 42$, rezultă $b = 42 - 18 = 26$. (Pentru reprezentarea grafică este necesar să stabilim relațiile de diferență dintre numere: $c = b + (44 - 42)$; $b = a + (50 - 44)$; $a + b + c = 68$ etc.).

167. Ca să arătăm că media aritmetică a numerelor date este un număr natural, trebuie să demonstrăm că suma lor se împarte exact la **3**.

a) Fie a primul număr. Atunci $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3(a + 1)$. Se observă că acest produs are unul dintre factori **3**, deci produsul se împarte exact (este divizibil cu) la **3**. (Într-o eventuală reprezentare grafică, se poate observa că obținem **3** părți, fiecare egală cu numărul mai mic, dacă transferăm diferența **1** de la al treilea la primul număr).

b) Fie a, b şi, respectiv, c cele **3** numere naturale, iar d diferența dată. Atunci: $b = a + d$; $c = b + d = a + d + d = a + 2d$. Suma celor trei numere este: $a + (a + d) + (a + 2d) = 3a + 3d = 3(a + d)$. Evident că suma se împarte exact la **3**.

168. Dacă Elena obține media **7** din cele trei note, rezultă că suma lor este $3 \times 7 = 21$. Deoarece notele sunt diferite şi cel mult egale cu **10**, rezultă că nota cea mai mică poate fi **2**, iar suma cea mai mare a două note este $9 + 10 = 19$. Rezultă soluțiile $2 + 9 + 10$; $3 + 8 + 10$; $4 + 9 + 8$; $4 + 10 + 7$; $5 + 9 + 7$; $5 + 10 + 6$; $6 + 7 + 8$.

169. a) $1 + 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 1$;
b) $1 + 23 - 45 - 67 + 89 = 1$.

170. Asemenea exerciții sunt cunoscute sub numele de *Jocul numerelor*.

a) $1+1-1-1=0$;
$1+1-1\times1=1$;
$1:1+1:1=2$;
$1+1+1:1=3$;
$1+1+1+1=4$.

b) $2+2-(2+2)=0$ sau $2-2+2-2=0$;
$(2:2)\times(2:2)=1$ sau $2\times2:2:2=1$;
$2:2+2:2=2$;
$2\times2-2:2=3$;
$2\times2\times2:2=4$ sau $2:2\times2\times2=4$;
$(2+2)+2:2=5$;
$2\times2\times2-2=6$ sau $2\times(2:2+2)=6$;
$2\times2\times2+2=10$;
$(2+2+2)\times2=12$.

c) $(3+3)-(3+3)=0$;
$3-(3+3):3=1$;
$(3\times3-3):3=2$;
$(3+3+3):3=3$;
$(3\times3+3):3=4$;
$3+3-3:3=5$ sau $(3+3):3+3=5$;
$3-3+3+3=6$;
$(3+3)+3:3=7$;
$3\times3-3:3=8$;
$3\times3+3-3=9$ sau $3\times3:(3:3)=9$;
$3\times3+3:3=10$.

d) $(4\times4-4):4=3$;
$(4+4):4+4=6$;
$4+4-4:4=7$;
$4\times4-(4+4)=8$ sau $4\times4-4-4=8$;
$4\times4+4+4=24$;
$4\times4+4\times4=32$

e) $5:5+5:5=2$;
$(5+5+5):5=3$;
$(5-5)\times5+5=5$;
$(5\times5+5):5=6$;
$(5+5):5+5=7$;
$5+5-5:5=9$;
$5\times5+5:5=26$;
$(5:5+5)\times5=30$.

f) $(8+8):(8+8)=1$ sau $(8\times8):(8\times8)=1$;
$8:8+8:8=2$;
$8\times8:(8+8)=4$;
$(8+8):8+8=10$;
$8+8-8:8=15$.

g) $(9+9):(9+9)=1$ sau $9\times9:(9\times9)=1$;
$9:9+9:9=2$;
$9-(9+9):9=7$;
$(9\times9-9):9=8$;
$9-(9-9):9=9$;

$(9\times9+9):9=10;$
$9:9+9+9=19.$

h) $(6+6):(6+6)=1$ sau $(6+6:6)-6=1;$
$(6\times6-6):6=5;$
$(6-6)\times6+6=6;$
$(6+6):6+6=8;$
$(6+6):(6:6)=12;$
$6+6+6+6=24$ sau $6\times6-6-6=24$ sau $6\times6-(6+6)=24;$
$(6-6:6)\times6=30;$

i) $(7+7):(7+7)=1$ sau $7:7:(7:7)=1$ sau $7\times7:(7\times7)=1;$
$(7+7+7):7=3;$
$(7\times7+7):7=8;$
$7+7-7:7=13;$
$7:7+7+7=15.$

171. a_1) $5+5+5+1+1=17;$
a_2) $5+15+15=35;$
b_1) $5+5+5+11=26;$
b_2) $5+15+5+1=26;$
b_3) $51+5+5+1=62;$
b_4) $55+5+1+1=62;$
c_1) $55+5+11=71;$
c_2) $51+15+5=71;$
c_3) $55+15+1=71.$

172. Din condiția 1) rezultă $4e=32 \Leftrightarrow e=8$. Atunci $d=8+8 \Leftrightarrow d=16$; $16-12=c \Leftrightarrow c=4$; $b=10$; $a=10+10=20$.

173. Din $(a+b):b=b$ rezultă $a+b=b\times b \Leftrightarrow a=b\times b-b \Leftrightarrow a=b(b-1)$ sau $(a+b):b=b \Rightarrow a:b+b:b=b \Leftrightarrow a:b+1=b \Leftrightarrow a:b=b-1 \Leftrightarrow a=b(b-1)$. Deoarece b şi $b-1$ sunt numere consecutive rezultă: dacă $b=2$, atunci $a=2\cdot1=2$, iar $\overline{ab}=22$; dacă $b=3$, atunci $a=3\cdot2=6$, iar $\overline{ab}=63$; dacă $b=4$, atunci $a=4\cdot3=12$, ceea ce este fals, a fiind cifră.

174. Din enunț rezultă: $\overline{db5}+(\overline{db5}+5)=\overline{aaa} \Rightarrow \overline{..5}+\overline{..5}+5=\overline{..5}$, deci $\overline{aaa}=555$. Atunci: $\overline{db0}+\overline{db0}+15=555 \Leftrightarrow \overline{db0}=540:2 \Rightarrow \overline{db0}=270$. Primul număr este **275**, al doilea **280**, iar $\overline{aaa}=555$.

175. Din enunț rezultă: $\overline{ab}:4=a\cdot b:2+\frac{b}{4}$ (semiprodus = jumătate din produs).

Atunci: $\overline{ab}=(a\cdot b:2+\frac{b}{4})\times4$, căci deîmpărțitul este egal cu împărțitorul înmulțit cu câtul. Rezultă: $\overline{ab}=a\cdot b:2\times4+\frac{b}{4}\times4 \Leftrightarrow \overline{ab}=a\cdot b\cdot2+b \Leftrightarrow 10a+b=$
$=2ab+b \Leftrightarrow 10a=2ab/:2a \Rightarrow 5=b$. Deoarece $a<10$, rezultă $a\in\{1, 2, 3, ..., 9\}$, iar $\overline{ab}\in\{15, 25, 35, 45, ..., 95\}$. Verificare:

1) $15 : 4 = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} = \frac{15}{4}$;

2) $25 : 4 = 10 : 2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5 + \frac{5}{5} = 5 + \frac{5}{4}$;

3) $35 : 4 = 15 : 2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{35}{4} = \frac{15}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{35}{4} = \frac{35}{4}$;

4) $45 : 4 = 20 : 2 + 5 : 4 \Leftrightarrow 10 + 5 : 4 = 10 + 5 : 4$;

5) $55 : 4 = 25 : 2 + 5 : 4 \Leftrightarrow \frac{55}{4} = \frac{25}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{55}{4} = \frac{55}{4}$;

iar $95 : 4 = 45 : 2 + 5 : 4 \Leftrightarrow \frac{95}{4} = \frac{45}{2} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{95}{4} = \frac{95}{4}$.

176. Enunțul devine: $\overline{aa} \cdot b = ab(a + b) \Leftrightarrow 11a \cdot b = ab(a + b)$. Deoarece $a \cdot b = b \cdot a$, rezultă $11 = a + b$. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$, atunci:

– pentru clasa a IV-a: a constituie **6** părți, iar b constituie **5** asemenea părți care împreună reprezintă **11**; rezultă $a = 6$, iar $b = 5$, căci $11 : 11 = 1$, iar $6 \times 1 = 6$ și $5 \times 1 = 5$; rezultă $66 \cdot 5 : (6 + 5) = 6 \times 5 \Leftrightarrow 30 = 30$;

– pentru clasa a V-a: dacă $\frac{a}{b} = \frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{6}{5} b$, iar $\frac{6}{5} b + b = 11 \Leftrightarrow \frac{11}{5} b = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 11 : 11 \times 5 \Rightarrow b = 5$, iar $a = \frac{6}{5} \cdot 5 \Leftrightarrow a = 6$ (Egalitatea este adevărată).

177. 1) $\frac{2a}{8} = 1 \Rightarrow a = 4$; 2) $\frac{8a}{8} = 1 \Rightarrow a = 1$.

178. 1) $a = 3$; $a = 11$; 2) $a = 1$; $a = 5$; 3) $a = 1$; $a = 3$; 4) $a = 3$; $a = 24$.

CAPITOLUL AL II–LEA

Probleme de sumă şi diferenţă. Rezolvări

1. Notând cu **I** şi cu **II** cantitatea vândută de primul şi, respectiv, de al doilea copil, se pot scrie (redarea pe scurt a problemei):

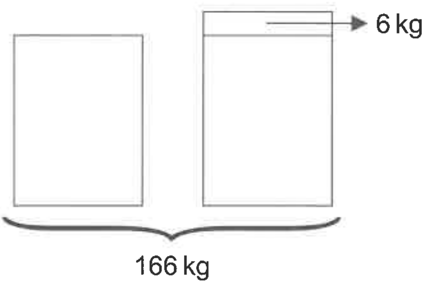
I + II = 166 *kg* sau: Fie ***a*** şi ***b*** cele două cantităţi, iar ***S*** şi ***d***, suma şi,
I = II + 6 *kg* respectiv, diferenţa; rezultă:
I = ?; II = ?

$$\begin{array}{l} a+b=166 \\ \underline{a-b=6} \\ a=?;\ b=? \end{array} \quad \text{ori} \quad \begin{array}{l} S=166 \\ \underline{d=\ \ 6} \\ a=?;\ b=? \end{array}$$

Primul mod: Metoda grafică

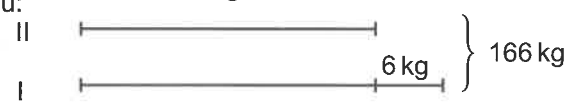
Cantităţile vândute de fiecare dintre cei doi copii se pot reprezenta astfel:

a)

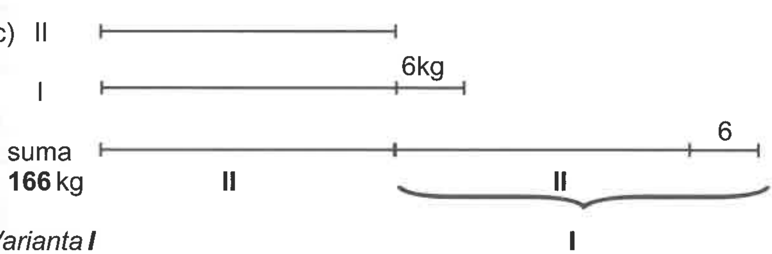


sau:

b)

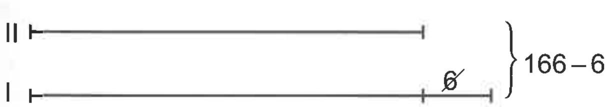


c)



Varianta I

Considerăm că Dan a vândut tot atatea kg de vişine ca şi George. *De ce*? Pentru că, dacă suma ar fi formată din două părţi la fel de mari, am împărţi-o în două şi am putea determina cantitatea fiecăruia. Ca urmare, trebuie să dăm deoparte cele **6** kg, cu cât a vândut mai mult primul copil. Atunci, în cantitatea totală, care se va micşora tot cu **6** kg, vor fi două părţi, fiecare egală cu cantitatea vândută de George, adică:



Deci: Care este suma a două părţi, fiecare egală cu cantitatea vândută de George? (Care este dublul cantităţii vândute de al doilea copil?)

166 – 6 = 160. Câte kg de vişine a vândut al doilea copil? **160 : 2 = 80**. Câte kg a vândut primul copil? **80 + 6 = 86**.

Varianta a II-a

Dacă am mai adăuga la cantitatea vândută de al doilea copil încă **6** kg, am obține o cantitate la fel de mare ca a primului, iar în sumă ar fi două asemenea cantități, adică:

Care este suma a două părți, fiecare egală cu cantitatea vândută de Dan? (Care este dublul cantității vândute de primul copil?) **166 + 6 = 172**. Care este cantitatea vândută de primul copil? **172 : 2 = 86**. Care este cantitatea vândută de al doilea copil? **86 – 6 = 80**.

Observație: În general, în asemenea probleme, metoda grafică are tot atâtea variante câte mărimi sunt.

Modul al doilea: Prin aproximații succesive (încercare şi eroare).

Varianta I:

Presupunem că cei doi copii au vândut cantități la fel de mari. Atunci descompunem pe **166** în două numere egale: **166 = 83 + 83**. Dar diferența dintre ele este **0**; în problemă, diferența dintre mărimi este **6**.

Descompunem şi pe **6** în două numere egale: **6 = 3 + 3**; pentru primul copil, mărim pe **83** cu **3**, adică **83 + 3 = 86**, iar pentru al doilea copil, micşorăm pe **83** cu **3**, adică **83 – 3 = 80**.

Varianta a II-a:

Considerăm că cei doi au vândut cantități la fel de mari. Concepem tabelul următor şi încercăm să obținem diferența dată în enunț:

I	**II**	Suma	Diferența
83	**83**	**166**	**0**

Măresc pe **I** şi, respectiv, micşorez pe **II** cu acelaşi număr.

83 + 1	**83 – 1**	**166**	**2**
83 + 2	**83 – 2**	**166**	**4**
83 + 3	**83 – 3**	**166**	**6**,

tocmai soluția problemei.

Modul al treilea:

Formulare obişnuită	algebrică
Primul a vândut o cantitate de vişine:	x
Al doilea, o altă cantitate:	y
Împreună au vândut **166** kg :	$x + y = 166$
Primul mai mult decât al doilea cu **6** kg:	$x - y = 6$.

Atunci:

a) $x + y = 166$ | Adunăm membru cu membru şi obţinem:
$\underline{x - y = \quad 6}$ |
$2x = 172 \Leftrightarrow x = 86$, $y = 86 - 6 = 80$ sau:

b) $x + y = 166$
$x - y = 6 \Leftrightarrow x = 6 + y$; prin înlocuire în prima relaţie se obţine:
$6 + y + y = 166 \Leftrightarrow y = 80$; $x = 86$.

Modul al patrulea

Generalizare

Notând cu S cantitatea totală, cu d diferenţa dintre cele două numere ce reprezintă cantităţile vândute de fiecare copil, acestea din urmă fiind notate cu x şi, respectiv, cu y, se pot scrie:

$x + y = S$
$\underline{x - y = d}$ Adunând egalităţile, membru cu membru, rezultă:
$2x \quad = S + d$, adică $x = (S + d) : 2$.

Concluzie:

Numărul mai mare este egal cu jumătate din rezultatul adunării sumei cu diferenţa.

Particularizare:

$x = (S + d) : 2 \Leftrightarrow x = (166 + 6) : 2 = 86$.

Sau: $x + y = S \Leftrightarrow x = S - y$; înlocuind pe x în a doua relaţie, se obţine:

$S - y - y = d \Leftrightarrow 2y = S - d \Leftrightarrow y = (S - d) : 2$.

Concluzie:

Numărul mai mic este egal cu jumătate din rezultatul scăderii dintre sumă şi diferenţă.

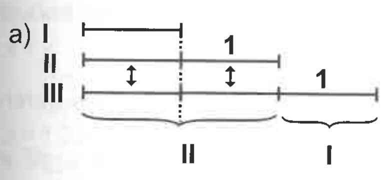
Particularizare:

$y = (166 - 6) : 2 = 80$.

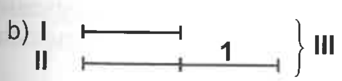
2. Problema solicită noţiunea de *numere consecutive*; în şirul numerelor naturale, un număr este mai mare decât *precedentul* cu **1**.

Modul I

Grafic, cele trei numere se pot reprezenta astfel:

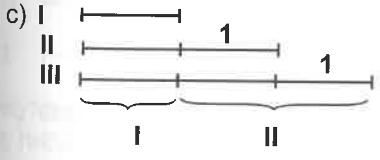


Din desen, rezultă că primul număr este **1**, al doilea **2**, iar al treilea este **3**.



sau:

Al treilea este cât al doilea şi încă **1**, deoarece este consecutivul lui. Rezultă că primul este **1**, căci la al doilea adăugăm pe primul pentru a-l obţine pe al treilea. **I = 1; II = 2; III = 3.**



Dacă suprapunem **I** peste al treilea, ceea ce rămâne este al doilea (care este **2**).
I = 2 – 1 = 1; III = 3.

Modul al doilea:

a) Fie x primul număr, atunci al doilea este $x + 1$, iar al treilea $(x + 1) + 1$. Atunci: $x + x + 1 = x + 1 + 1 \Leftrightarrow x = 1$ etc.

b) $x + (x + 1) = (x + 1) + 1 \Leftrightarrow x = 1$ etc.

3. Problema solicită noțiunea de împărțire, definită ca operație inversă înmulțirii: deîmpărțitul = câtul înmulțit cu împărțitorul plus restul, în care restul este mai mic decât împărțitorul.

Dacă la împărțirea sumei prin diferență se obține câtul **18** şi restul **17**, rezultă că suma cuprinde **18** ori diferența, plus **17**.

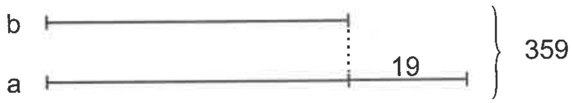
Diferența fiind **19**, înseamnă că suma este egală cu produsul dintre **18** şi **19**, mărit cu **17**.

Deci: fie numerele a şi b, atunci $a + b = 18 \times 19 + 17 = 359$, iar $a - b = 19$.

De aici, *se poate reformula problema*:

"Determinați cele două numere, ştiind că suma lor este **359**, iar diferența **19**." Am obținut o problemă tipică de sumă şi diferență.

<u>Rezolvarea 1</u>



Din desen rezultă:

1) $2b = 359 - 19 = 340$; $b = 170$; $a = 189$. Sau:

2) $2a = 359 + 19 = 378$; $a = 189$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Prin particularizarea formulei:

$a = (S + d) : 2 \Leftrightarrow a = (18 \times 19 + 17 + 19) : 2 = 189$;

$b = (S - d) : 2 \Leftrightarrow b = (18 \times 19 + 17 - 19) : 2 = 170$.

<u>Rezolvarea 3</u>

Dacă $a - b = 19$ şi $a + b = 18 \times 19 + 17 = 359$, atunci adunând cele două relații, se obține: $2a = 378 \Leftrightarrow a = 189$; $b = 170$.

Observație:

Aceasta a fost o problemă de sumă şi diferență în care *suma trebuie determinată*.

4. Este o problemă de sumă şi diferență în care *diferența trebuie determinată*.

S. : dif. = **3** şi rest **2**, adică **S.** = **3**×dif. + **2** $\Leftrightarrow$ **14** = **13**×dif. + **2** $\Leftrightarrow$ dif. = = (**14** – **2**) : **3** = **4**. De aici, se poate *reformula problema*: "Determinați cele două numere care au suma **14**, iar diferența **4**." Rezolvarea prin metoda grafică este similară cu cea de la problema anterioară.

Prin particularizarea formulei: fie numerele a şi b; rezultă:

$a = (S + d) : 2 \Leftrightarrow a = [14 + (14 - 2) : 3] : 2 = 9$;

$b = (S - d) : 2 \Leftrightarrow b = [14 - (14 - 2) : 3] : 2 = 5$.

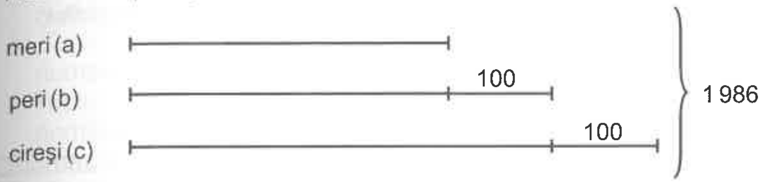
5. <u>Rezolvarea 1</u>

Dacă erau **1 224** de meri şi peri, atunci restul până la **1 986** era format din cireşi; cireşi erau **762**, căci **1 986 – 1 224 = 762**. Dacă **1 324** erau meri şi cireşi, restul până la **1 986** era format din peri, adică **1 986 – 1 324 = 662**. Merii erau **562**, pentru că **1 986 – 1 424 = 562**.

Rezolvarea 2

Dacă numărul de meri şi peri este de **1 224**, iar numărul de meri şi cireşi este de **1 324**, rezultă că numărul de cireşi este mai mare decât numărul de peri cu **100**, pentru că **1 324 – 1 224 = 100**. Dacă merii şi perii sunt la un loc **1324**, iar perii şi cireşi sunt **1 424**, rezultă că perii sunt mai mulţi decât merii cu **100**, căci **1 424 – 1 324 = 100**. Din aceste două relaţii rezultă că cireşii sunt mai mulţi decât merii cu **200**.

Aceste relaţii se pot reprezenta grafic astfel:



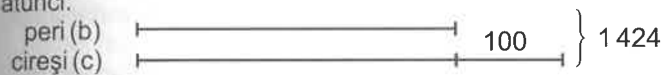
Mai multe variante de rezolvare:

I. $a = [1\,986 - (100 + 200)] : 3 = 562$;
$b = 562 + 100 = 662$
$c = 562 + 200 = 762$.

II. Transferând **100** de la c la a, în sumă, care rămâne neschimbată, se obţin $3b$. Deci $3b = 1\,986$, $b = 1\,986 : 3 = 662$ etc.

III. Dacă nr. meri + nr. peri = **1 224** şi
nr. meri + nr. cireşi = **1 324**, rezultă că numărul perilor este mai mic decât al cireşilor cu **100**;

atunci:



Dublul nr. de peri = **1 324**, deci nr. de peri = **662**, cireşi = **762**, meri = **562** etc.

Rezolvarea 3

Notând cu x nr de meri, cu y cel de peri, cu z cel de cireşi, se pot scrie:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,986 \\ x + y \quad\;\; = 1\,424 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1\,986 - 1\,424 = 562 \text{ etc.}$$

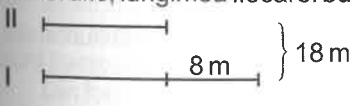
Sau:

Înlocuim în sumă două necunoscute prin relaţia lor cu a treia, exemplu: $x = 1\,224 - y$ şi $z = 1\,424 - y$, iar $(1\,224 - y) + y + (1\,424 - y) = 1\,986 \Leftrightarrow 1\,224 + 1\,424 - y = 1\,986 \Leftrightarrow y = 662$ etc.

Observaţie:

Şi aici *diferenţa*, în unele variante, *trebuie determinată*.

6. *Grafic*, lungimea fiecărei bucăţi se poate reprezenta:



1) Dublul lungimii mici = **18 – 8 = 10**; bucata mică are **5** m; cea mare **13** m.
Câţi lei costă bucata a II-a? **208 : 8 = 130**; prima → **338** lei.

2) Dublul lungimii bucății mari este **26** m, căci $\mathbf{18+8=26}$. Bucata mai mare are **13** m, pentru că $\mathbf{26:2=13}$, iar cea mică **5** m, deoarece $\mathbf{13-8=5}$.

Rezolvarea 2

Prin particularizarea formulei (a se vedea rezolvarea **4** de la **1.**):

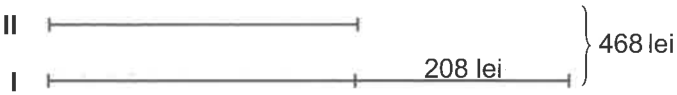
I = $\mathbf{(18+8):2\times(208:8)=338}$ (lei);

II = $\mathbf{(18-8):2\times(208:8)=130}$ (lei).

Rezolvarea 3

Cunoscând că una dintre bucăți este mai mare cu **8** m, iar diferența de preț este de **208** lei, putem afla prețul unitar al tifonului: $\mathbf{208:8=26}$ (lei). Cele două bucăți costă la un loc **468** lei, căci $\mathbf{18\times26=468}$.

Grafic, *prețurile* celor două bucăți de tifon se pot reprezenta astfel:



Dublul prețului bucății mai mici este **260** lei, căci $\mathbf{468-208=260}$ lei. Câți lei costă bucata mai mică? $\mathbf{260:2=130}$ (lei).

Într-o altă variantă, se poate determina întâi dublul prețului bucății mai mari etc.

Rezolvarea 4

Notând cu $\boldsymbol{x}$ prețul bucății mai mari și cu $\boldsymbol{y}$ prețul bucății mai mici, rezultă egalitățile: $\boldsymbol{x+y=208:8\times18}$ și $\boldsymbol{x-y=208}$.

Înlocuind pe $\boldsymbol{x}$ prin $\boldsymbol{468-y}$, a doua relație devine: $\boldsymbol{468-y-y=208}$; deci $\boldsymbol{2y=260}$, iar $\boldsymbol{y=130}$; $\boldsymbol{x=208+130=338}$.

7. Este tot o problemă de sumă și diferență, dar în unele moduri de rezolvare, mai ales în cele accesibile elevilor mici, trebuie determinate atât suma, cât și diferența.

Scriind pe scurt cele trei relații din problemă, observăm că fiecare mărime se repetă de **2** ori:

nr. fagi	+	nr. stejari	= **495**;
nr. tei	+	nr. stejari	= **480**;
nr. tei	+	nr. fagi	= **435**.

Rezolvarea 1

Dacă am aduna cele **3** numere date, ce reprezintă sume parțiale, am obține *dublul* numărului total de puieți, adică $\mathbf{480+495+435=1\,410}$.

Atunci, numărul total de puieți este **705**, căci $\mathbf{1\,410:2=705}$.

Cunoscând suma (numărul total de puieți) și folosind relațiile din problemă ce exprimă sume parțiale, se poate determina numărul de puieți de fiecare fel.

Dacă **495** au fost fagi și stejari, atunci restul până la **705** a fost format numai din tei, adică $\mathbf{705-495=210}$.

Dacă **480** au fost stejari și tei, atunci restul până la **705** era format din fagi, adică $\mathbf{705-495=225}$.

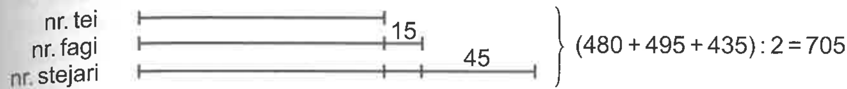
Dacă **435** au fost fagi și tei, atunci restul până la **705** era format numai din stejari, adică $\mathbf{705-435=270}$.

Rezolvarea 2

Din primele relații rezultă că numărul fagilor era mai mare decât numărul teilor cu **15**, pentru că $\mathbf{495-480=15}$.

Din prima şi ultima relaţie rezultă că numărul stejarilor era mai mare decât numărul fagilor cu **45**, căci **480 – 435 = 45**.

Rezultă reprezentarea grafică:



De aici, sunt *trei variante*:

a) Triplul numărului de tei era **630**, căci **705 – (15 + 15 + 45) = 630**, iar numărul teilor era **210**, pentru că **630 : 3 = 210** etc.

b) Triplul numărului de fagi era de **675**, căci **705 + 15 – 45 = 675**, iar numărul fagilor era **225**, pentru că **675 : 3 = 225** etc.

c) Triplul numărului de stejari era **810**, căci **705 + 45 + 45 + 15 = 810**, iar numărul de stejari era de **270**, deoarece **810 : 3 = 270** etc.

Rezolvarea 3

Grafic sau prin aplicarea formulei, folosind *suma şi diferenţa* (ce trebuie determinată) *numai pentru două mărimi.*

Dacă teii şi fagii la un loc erau **435**, iar diferenţa dintre aceste două numere era **15**, rezultă:

a) reprezentarea grafică:

dublul numărului de tei era de **420** sau dublul numărului de fagi era **450** etc; prin particularizarea formulei, ca în rezolvarea **4** de la **1.**:
număr fagi = **(435 + 15) : 2 = 225**; numărul teilor = **(435 – 15) : 2 = 210** etc.

b) în alte două variante, se pot folosi suma şi diferenţa dintre numărul stejarilor şi al fagilor sau dintre cel al stejarilor şi numărul teilor, parcurgându-se apoi calea grafică sau aplicându-se formula.

Rezolvarea 4

Notând nr. de fagi cu x, nr. de stejari cu y, iar nr. de tei cu z, se pot scrie:

$$\begin{aligned} x + y &= 495 \\ x + z &= 435 \\ z + y &= 480 \\ \hline 2x + 2y + 2z &= 1\,410. \end{aligned}$$

Adunăm egalităţile, membru cu membru, şi rezultă: $2x + 2y + 2z = 1\,410$.

Împărţind prin **2**, rezultă: $x + y + z = 705$. Folosind şi sumele parţiale, obţinem: $x = 705 - 480 = 225$; $y = 705 - 435 = 270$; $z = 705 - 495 = 210$.

8. Din formularea “**10** nu sunt tractoare”, deducem că acele **10** maşini sunt semănători şi combine.

Din formularea “**13** nu sunt semănători”, deducem că acele **13** maşini sunt tractoare şi combine.

Din formularea “**15** nu sunt combine”, deducem că acele **15** maşini sunt tractoare şi semănători.

Acum se poate *reformula problema*, obţinându-se o problemă a cărei rezolvare este similară cu aceea de la **7.**.

Prima parte a enunțului e neschimbată, iar a doua va fi:

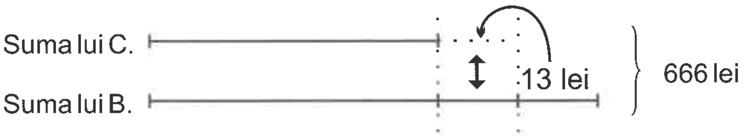
"Ştiind că **10** din acestea sunt semănători şi combine, că **13** sunt tractoare şi combine, iar **15** sunt tractoare şi semănători, aflați câte maşini agricole de fiecare fel au intrat în reparații la această societate, în luna decembrie".

Răspuns: **4** combine, **6** semănători, **9** tractoare.

9. Rezolvarea 1 *Metoda grafică*

Varianta I

Dacă prin realizarea împrumutului de **13** lei s-ar obține sume la fel de mari, rezultă că Bogdan are mai mult decât Cristian cu de **2** ori **13** lei. Grafic, sumele se pot reprezenta astfel:



Care este suma a două părți, fiecare egală cu suma inițială a lui Cristian? **666 – (13 + 13) = 640**.

Câți lei are Cristian? **640 : 2 = 320**.

Câți lei are Bogdan? **320 + 13 + 13 = 346**.

Varianta a II -a

Care este suma a două părți, fiecare egală cu suma inițială a lui Bogdan? **666 + 13 + 13 = 692**.

Câți lei are Bogdan? **692 : 2 = 346**.

Câți lei are Cristian? **346 – 26 = 320**.

Varianta a III-a

Dacă transferăm **13** lei de la Bogdan la Cristian, suma totală nu se modifică, dar se obțin două părți la fel de mari, fiecare fiind de **333** de lei. Deci: Câți lei *va avea* Cristian după împrumut? **666 : 2 = 333**. Câți lei are Cristian? **333 – 13 = 320**. Câți lei are Bogdan? **333 + 13 = 346**.

Rezolvarea 2

Notând suma lui Cristian cu $\boldsymbol{x}$, iar suma lui Bogdan cu $\boldsymbol{y}$, se pot scrie: $\boldsymbol{x + y = 666}$ şi $\boldsymbol{x + 13 = y - 13}$. Din ultima relație rezultă $\boldsymbol{x = y - 26}$; prin înlocuire în prima relație obținem: $\boldsymbol{y + y - 26 = 666}$, adică $\boldsymbol{y = 346}$; $\boldsymbol{x = 320}$.

Rezolvarea 3.

Generalizare

Notând cu $\boldsymbol{S}$ suma totală, cu $\boldsymbol{x}$ suma lui Cristian, cu $\boldsymbol{y}$ suma lui Bogdan, iar cu $\boldsymbol{d}$ suma care trebuie să se transfere pentru a realiza egalitatea, se pot scrie: $\boldsymbol{x + y = S}$ şi $\boldsymbol{x + d = y - d}$.

Din ultima relație rezultă că $\boldsymbol{x = y - 2d}$; prin înlocuire în sumă, obținem: $\boldsymbol{y - 2d + y = S}$.

Atunci $\boldsymbol{2y = S + 2d}$, iar $\boldsymbol{y = (S + 2d) : 2}$.

Sau: $\boldsymbol{x + d = S - x - d}$ şi $\boldsymbol{2x = S - 2d}$, de unde $\boldsymbol{x = (S - 2d) : 2}$.

Concluzii:

Numărul mai mare este egal cu jumătate din rezultatul adunării sumei cu dublul numărului de transfer.

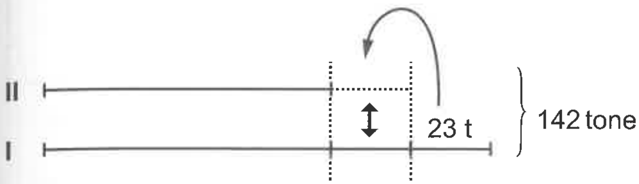
Numărul mai mic este egal cu jumătate din rezultatul scăderii dintre sumă şi dublul numărului de transfer.

În particular:
$x = (666 - 13 \times 2) : 2 = 320$;
$y = (666 + 13 \times 2) : 2 = 346$.

Ceea ce este specific problemei de mai sus este faptul că *se modifică mărimile prin transfer* (sau se pot modifica), *obținându-se egalitate, dar totalul nu se schimbă*.

10. (Transfer cu egalitate)

Din afirmația privitoare la transferul celor **23** de tone, rezultă că prima magazie avea mai mult porumb cu dublul lui **23**, adică:



Care este suma a două părți, fiecare egală cu cea existentă inițial în a doua magazie? $\mathbf{142 - 2 \times 23 = 96}$.

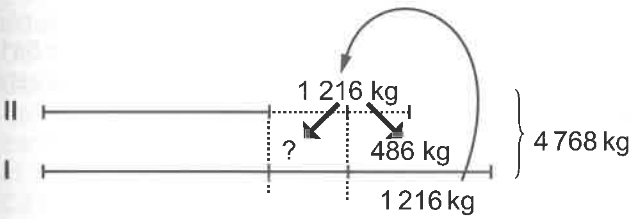
Câte tone erau inițial în a doua magazie? $\mathbf{96 : 2 = 48}$.

Câte tone erau inițial în prima magazie? $\mathbf{4 \times 23 = 94}$.

Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea problema anterioară.

11. (Transfer, dar mărimea la care se adaugă devine mai mare)

Grafic, cantitățile obținute după transfer se pot reprezenta astfel:



Dacă prin transfer s-ar fi realizat egalitatea între cantități, ar fi rezultat că primul siloz conținea inițial mai mult grâu cu de **2** ori **1 216** kg. Dar nu se obține egalitate.

Din desen rezultă că primul siloz avea mai mult cu *suma dintre* **1 216** și *diferența* numerelor **1 216** și **486**.

(În reprezentarea grafică a cantității din **I** siloz, se observă că, până la punctul de unde începe figurarea celor **1 216** kg, mai este un segment, care reprezintă diferența dintre **1 216** și **486**, adică **730** kg.)

Cu câte kg erau mai multe în primul siloz? $\mathbf{1\,216 + (1\,216 - 486) = 1\,946}$.

Care este suma a două cantități, fiecare egală cu cea inițială din al doilea siloz? $\mathbf{4\,786 - 1\,946 = 2\,822}$.

Câte kg erau inițial în al doilea siloz? $\mathbf{2\,822 : 2 = 1\,411}$.

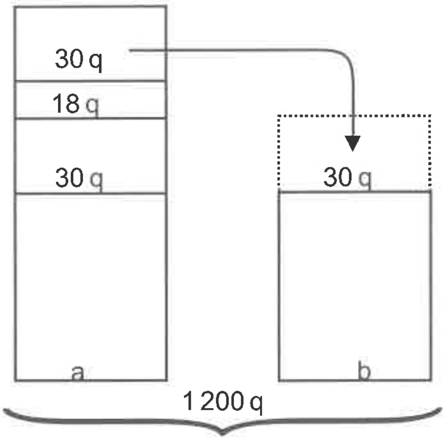
Dar în primul siloz? $\mathbf{1\,411 + 1\,946 = 3\,357}$.

Verificare: $\mathbf{(1\,411 + 1\,216) - (3\,357 - 1\,216) = 486}$; $\mathbf{3\,357 + 1\,411 = 4\,768}$.

12. (Transfer, dar mărimea la care se adaugă rămâne mai mică)

Rezolvarea 1

Grafic, cantitățile inițiale și modificările date în enunț se pot reprezenta astfel:



Dacă și după transfer al doilea depozit conține o cantitate mai mică, rezultă că inițial el avea mai puțin cu **78** q, căci **2×30 + 18 = 78.**

Deci, suma a două numere este **1 200**, diferența lor este **78**.

Variante: Dublul cantității inițiale din primul depozit era de **1 278** q, căci **1 200 + 78 = 1 278**, deci inițial erau **639** q, iar în al doilea **561** q.
Determinăm întâi cantitățile de după transfer: diferența este **18**, suma **1 200**, se pot aplica și formulele:
I = (1 200 + 18) : 2 = 609 sau **II = (1 200 – 18) : 2 = 591**.
Inițial: **I = 609 + 30 = 639**; **II = 591 – 30 = 561**.

Verificare: **(639 – 30) – (561 + 30) = 18** și **639 + 561 = 1 200**.

Generalizare:

Notând cu ***a***, și, respectiv, cu ***b*** cantitățile inițiale, cu ***S*** cantitatea totală, cu ***c*** cantitatea transferată, cu ***d*** diferența care se obține după transfer, se pot scrie: ***a* + *b* = *S*** și **(*a* – *c*) – (*b* + *c*) = *d***, adică ***a* – *c* = *b* + *c* + *d***.

Rezultă: ***S* = 2*b* + 2*c* + *d***, iar ***b* = (*S* – 2*c* – *d*) : 2**.

Concluzii:

Numărul mai mic este jumătate din suma care *a fost micșorată cu* dublul numărului de transfer și cu diferența ce se obține.

În particular: ***b* = (1 200 – 2×30 – 18) : 2 = 561**;

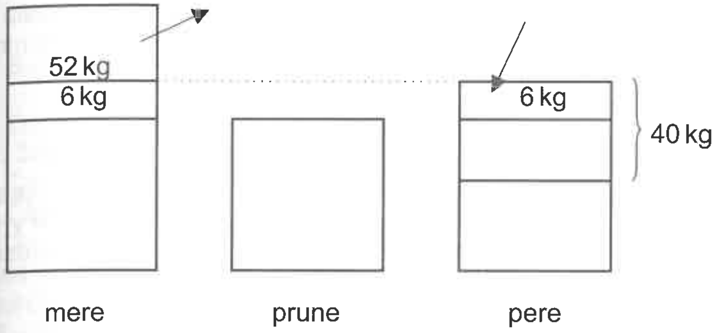
Numărul mai mare este jumătate din rezultatul adunării *dintre* suma totală, dublul numărului de transfer și numărul care reprezintă diferența ce se obține.

În particular: ***a* = (1 200 + 2×30 + 18) : 2 = 639**.

13. (Modificări ale mărimilor care implică și modificări ale sumei inițiale)

Rezolvarea 1

Grafic, cantitățile de fructe se pot reprezenta astfel:



I. *Variante de rezolvare cu datele obținute după modificările cantităților*:

Dacă se vând **52** kg de mere şi se mai aduc **40** kg de pere, înseamnă că se produce şi o modificare a numărului care reprezintă cantitatea totală; ea scade, adică **324 – 52 + 40 = 312**.

a) Dacă am considera că fiecare dintre cantități este la fel de mare ca şi cantitatea de prune, atunci, micşorând cantitățile de mere şi de pere *cu câte **6** kg*, obținem în sumă **3** cantități la fel de mari ca şi cantitatea de prune.
Care este triplul cantității de prune? **312 – (6 + 6) = 300** (kg).
Câte kg de prune erau? **300 : 3 = 100**(kg).
Câte kg de mere au fost aduse inițial? **100 + 6 + 52 = 158** (kg).
Câte kg de pere au fost aduse prima dată? **100 – (40 – 6) = 66**.

b) Dacă am considera că fiecare dintre cantități este la fel de mare ca şi cantitatea de mere rămasă după vânzarea celor **52** kg, atunci, la cantitatea de prune se mai adaugă **6** kg, iar suma se poate organiza ca triplul cantității rămase de mere, adică **312 + 6 = 318** (kg).
Câte kg de mere au fost inițial? **318 : 3 + 52 = 158** (kg).

c) Dacă am considera că fiecare dintre cantități este la fel de mare ca şi cantitatea de pere obținută după ce s-au mai adus **40** kg, atunci cantitatea de fructe ar fi **318** kg, căci **324 – 52 + 6 = 318** (am scăzut cele **52** kg de mere şi am adăugat la cantitatea de prune **6** kg).
Câte kg de mere erau inițial? **318 : 3 + 52 = 158.**
Câte kg de prune erau? **318 : 3 – 6 = 100** (kg).

II. *Variante de rezolvare cu datele existente*:
(înainte de a fi aduse **40** kg de pere şi vândute **52** kg de mere)

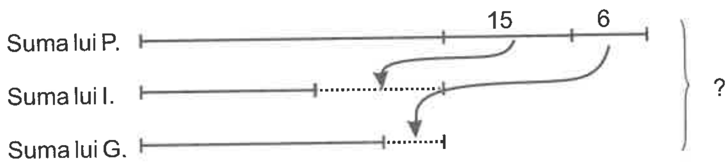
a) Dacă am considera că fiecare dintre cantități este la fel de mare ca şi cantitatea de pere existentă înainte de a fi aduse cele **40** kg, atunci, micşorând cantitatea inițială de mere cu **92** kg (**52 + 40 = 92**), pe cea de prune cu **34** kg (**40 – 6**) şi micşorând corespunzător cantitatea totală, obținem în sumă triplul cantității inițiale de pere, adică **324 – 92 – 34 = 198** (kg).
Câte kg de pere erau la început? **198 : 3 = 66** (kg).

Câte kg de mere erau? **66 + 92 = 158** (kg).
Câte kg de prune erau? **66 + 34 = 100** (kg).

b) Dacă am considera că fiecare dintre cantități este la fel de mare ca și cantitatea de mere existentă înainte de a fi vândute cele **52** kg, atunci, mărind cantitatea inițială de prune cu **58** kg (**52 + 6**), cantitatea inițială de pere cu **92** kg (**52 + 40**), obținem în sumă triplul cantității inițiale de mere, adică **324 + 58 + 92 = 474** (kg).
Câte kg de mere erau inițial? **474 : 3 = 158** (kg).
Câte kg de prune erau? **158 – 58 = 100** (kg).
Câte kg de pere erau? **158 – 92 = 66** (kg).

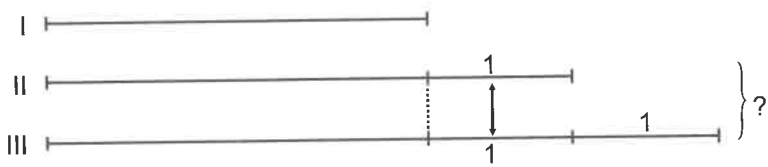
III. Notând cu x cantitatea inițială de mere, cu y, cea de prune, cu z, cea de pere, se pot scrie relațiile: $x + y + z = 324$; $x - 52 = y + 6$; $z + 40 = y + 6$. Din ultimele două relații, rezultă: $z = x - 92$. Din a doua relație rezultă $y = x - 58$. Atunci, $3x = 324 + 150 \Leftrightarrow x = 158$ etc.

14. (Transfer, egalitate)
Grafic, sumele se pot reprezenta astfel:



Suma totală trebuie să fie cuprinsă între **192** şi **198** şi să se împartă exact la **3**, deoarece, în cazul realizării transferului, ea va cuprinde **3** părți egale. Dintre numerele **193**, **194**, **195**, **196**, **197**, numai **195** este divizibil cu **3**. Deci, **195** reprezintă suma a **3** părți, fiecare egală cu suma de bani pe care *ar avea-o* unul dintre cei **3** copii, dacă se realizează transferul. Câți lei ar avea fiecare? **195 : 3 = 65**. Câți lei avea inițial Petre? **65 + 15 + 8 = 88**. Câți lei avea Ion? **65 – 15 = 50**. Dar Gheorghe? **65 – 8 = 57**.
Verificare: **88 + 50 + 57 = 195**; **88 – 15 – 8 = 50 + 15 = 57 + 8**.
Căutați şi alte moduri de rezolvare!

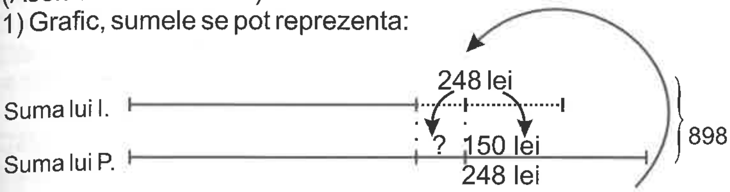
15. Rezolvarea 1
Grafic, numerele consecutive se pot reprezenta:



Se observă că suma poate fi organizată ca **3** părți egale, fără a modifica numărul care o reprezintă: transferăm pe **1** de la **III** la **I**.
Dintre numerele **62**, **63** şi **64**, numai **63** este divizibil cu **3**.
De aici, reformularea: “Suma a trei numere consecutive este **63**. Aflați numerele.” Rezolvarea e tipică. (A se vedea ex. **5.**).
3I = 63 – 3 = 60; **I = 60 : 3 = 20**; **II = 20 + 1 = 21**; **III = 21 + 1 = 22**.

16. (Asemănătoare cu **11.**)

1) Grafic, sumele se pot reprezenta:



Din desen rezultă că Florin are inițial mai mulți bani decât Ionel cu 346, căci **248 + (248 – 150) = 346**.

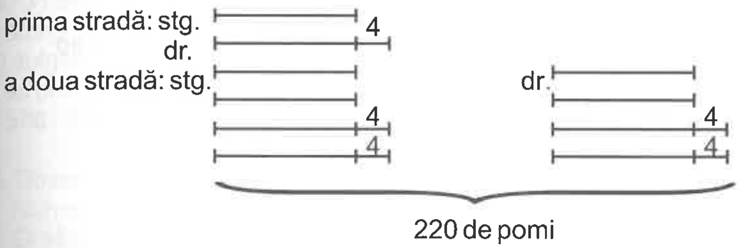
Care este dublul sumei lui Ionel? **898 – 346 = 552**.

Câți lei avea Ionel? **552 : 2 = 226**. Dar Florin? **276 + 346 = 622**.

2) Dacă din suma lui Ionel obținută după transfer scădem **150** de lei, suma totală se modifică cu **150**, realizându-se două părți, fiecare egală cu suma rămasă lui Florin. Deci, de **2** ori suma rămasă lui Florin formează **748**, adică **898 – 150 = 748**. Câți lei i-au rămas lui Florin? **748 : 2 = 374**. Inițial avea **622** lei, căci **374 + 248 = 622**.

Ionel avea la început **276** lei, pentru că **898 – 622 = 276**.

17. Grafic, numărul de pomi:



Se observă că **10** părți, fiecare egală cu numărul de pomi existenți pe partea stângă a primei străzi, formează **200** pomi, pentru că:

$220 - 4 \times 5 = 200$.

Pe prima stradă: Câți pomi există pe partea stângă? **200 : 10 = 20**. Câți pomi sunt pe partea dreaptă? **20 + 4 = 24**.

Pe a doua stradă: Câți pomi sunt pe fiecare parte? **$4 \times 20 + 2 \times 4 = 88$**.

Răspuns: **20**, **24**, **88**, **88**.

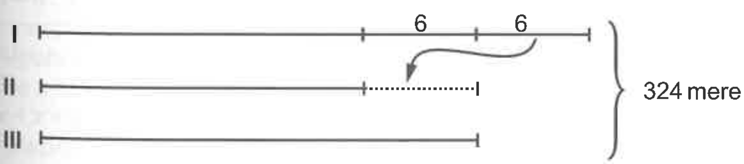
Încercați și alte moduri de rezolvare!

18. (Transfer, **3** mărimi, egalitate)

Dacă atunci când se transferă din **I** în **II** **6** mere se realizează egalitatea, rezultă că în primul erau inițial cu **12** mere mai mult, căci **$2 \times 6 = 12$**.

În al treilea erau cu **6** mere mai multe decât în al doilea coș.

Rezultă desenul:



Mai multe variante de rezolvare:

După transfer, putem privi suma ca **3** părți, fiecare egală cu **III**.

Deci, $\mathbf{3 \times III = 324, III = 324 : 3 = 108; II = 108 - 6 = 102; I = 114}$.

Înainte de transfer: $\mathbf{3I = 324 + 12 + 6 = 342; I = 342 : 3 = 114}$ etc.

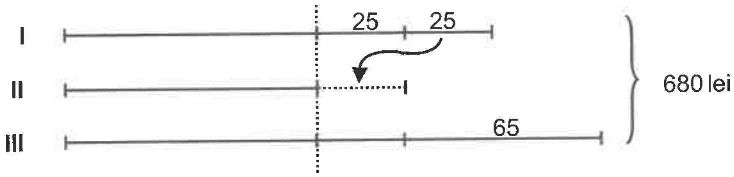
Sau: $\mathbf{3 \times II = 324 - 12 - 6 = 306;}$ $\mathbf{II = 102}$ etc.

Sau: $\mathbf{3 \times III = 324 - 6 + 6 = 324;}$ $\mathbf{III = 108}$ etc.

19. (Transfer, trei mărimi, egalitate parțială)

Din transferul preconizat, rezultă că primul are mai mult decât al doilea cu **50** lei, adică cu dublul numărului care s-ar transfera pentru a se obține egalitatea. Rezultă desenul:

(Notăm suma fiecăruia dintre cei trei copii cu **I**, cu **II** şi, respectiv, cu **III**).



Sunt mai multe variante de rezolvare:

a) $\mathbf{3II = 680 - 50 - 65 - 25 = 540; II = 540 : 3 = 180; I = 180 + 50 = 230;}$
$\mathbf{III = 180 + 65 + 25 = 270;}$

b) $\mathbf{3I = 680 + 50 - (65 - 25) = 690; I = 690 : 3 = 230; II = 230 - 50 = 180;}$
$\mathbf{III = 230 + (65 - 25) = 270;}$

c) $\mathbf{3III = 680 + (65 - 25) + 25 + 65 = 810; III = 810 : 3 = 270;}$
$\mathbf{II = 270 - 50 - (65 - 25) = 180; I = 180 + 50 = 230.}$

Răspuns: **230** lei ; **180** lei; **270** lei.

Verificare: $\mathbf{230 - 25 = 180 + 25; 270 - (230 - 25) = 65}$ sau
$\mathbf{270 - (180 + 25) = 65; 230 + 180 + 270 = 680.}$

20. (Transferul dublu, egalitate)

Transferul din enunț poate fi *transformat* într-unul echivalent: "Al doilea nu primeşte nimic, dar îi dă primului copil o bilă." Practic, primul număr se măreşte cu **1**, iar al doilea se micşorează cu **1**. Dacă se obține egalitate, rezultă că al doilea copil avea cu **2** bile mai mult decât primul (cu dublul numărului de transfer). Care este suma a două părți, fiecare egală cu numărul de bile pe care le are primul copil? $\mathbf{32 - 2 = 30}$.

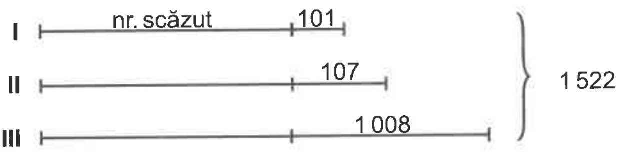
Câte bile are primul copil? $\mathbf{30 : 2 = 15}$.

Dar al doilea? $\mathbf{15 + 2 = 17}$ sau $\mathbf{32 - 15 = 17}$.

Verificare: $\mathbf{15 - 1 + 2 = 17 + 1 - 2}$, adică $\mathbf{16 = 16}$. Încercați un desen!

21. Notăm numerele inițiale cu **I**, cu **II** şi, respectiv, cu **III**.

Grafic, numerele se pot reprezenta astfel:

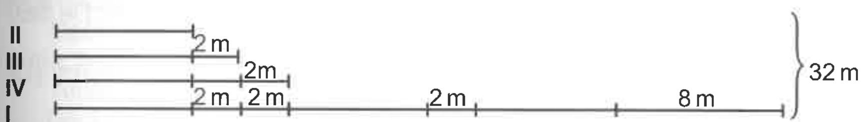


Care este suma resturilor (a diferențelor)? **101 + 107 + 1 008 = 1 216**.
Care este triplul numărului care se scade? **1 522 – 1 216 = 306**.
Care sunt numerele?
I = 101 + 306 : 3 = 203; **II = 107 + 306 : 3 = 209**; **III = 1 008 + 306 : 3 = 1 110**.

22. Câți lei vor avea cei trei copii împreună?
(Adunăm la **250** lei totalul sumelor pe care le mai au copiii.)
250 + 15 + (15 + 5) + (15 + 12) = 312. Câți lei va avea fiecare copil?
312 : 3 = 104.
Câți lei trebuie să mai primească fiecare?
I = 104 – 15 = 89; **II = 104 – 20 = 84**; **III = 104 – 27 = 77**.

23. *Observație*:
Judecata pe cale analitică poate fi începută astfel: Pentru a afla numărul de lucrători de fiecare fel, având relația că fiecare primeşte o anumită sumă, trebuie să determinăm câți lei primeşte fiecare grupă de muncitori. Cum putem afla acest lucru? Folosind suma totală (**31 900** lei) şi diferența (**3 100** lei).
Dacă am considera că zidarii ar fi încasat în total tot atâția bani cât dulgherii, suma de **31 900** lei s-ar fi micşorat cu **3 100** lei, adică ar fi **28 800** lei, căci **31 900 – 3 100 = 28 800**. În această sumă sunt două părți, fiecare egală cu suma ce se cuvine dulgherilor. **28 800 : 2 = 14 400**. Deci, câți lei au primit toți dulgherii? **28 800 : 2 = 14 400**. Câți dulgheri erau? **14 400 : 600 = 24**. Câți lei au primit toți zidarii? **14 400 + 3 100 = 17 500**. Câți zidari erau? **17 500 : 500 = 35**.

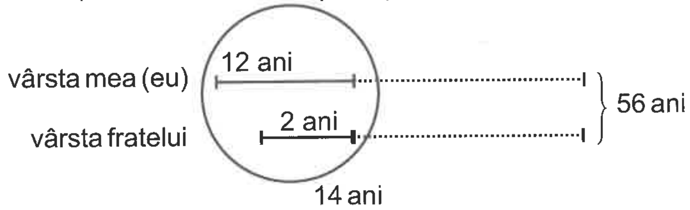
24. *Observație*:
Numerele consecutive pare (impare) au diferența **2**.
Grafic, lungimile bucăților sunt:



Variante

a) Considerăm că lungimea fiecărei bucăți *dintre ultimele* **3** este egală cu lungimea celei de-a doua. Atunci, din a treia trebuie să luăm **2** m, din a **IV**-a **4** m; din prima dacă luăm **14** m, adică **2 + 2 + 2 + 8**, obținem **3** părți, fiecare egală cu a **II**-a. Câte părți, fiecare egală cu a **II**-a, ar fi în total? **1 + 1 + 1 + 3 = 6**. Care e lungimea a **6** asemenea părți? **32 – 2 – 4 – 14 =** **= 12** (m). Câți m are a **II**-a bucată? **12 : 6 = 2**; **III = 4**; **IV = 6**; **I = 20**.
b) Dacă am adăuga **8** m la lungimea totală, am obține **2** bucăți, fiecare egală cu prima; **(32 + 8) : 2 = 20**. Deci, **I = 20**; suma celorlalte **3** bucăți: **32 – 20 = 12**. Trei bucăți, fiecare egală cu a doua: **12 – (2 + 2 + 2) = 6**; **II = 6 : 3 = 2**; **III = 2 + 2 = 4**; **IV = 4 + 2 = 6**.
Încercați şi alte variante!
Algebric:
Fie x lungimea bucății a **II**-a, atunci: **III** $= x + 2$; **IV** $= x + 4$; **I** $= 3x + 6 + 8$, iar $x + x + 2 + x + 4 + 3x + 14 = 32$, adică $6x = 12$; $x = 2$.
Răspuns: **I = 20** m; **II = 2** m; **III = 4** m; **IV = 6** m.

25. Grafic,vârstele celor doi se pot reprezenta:



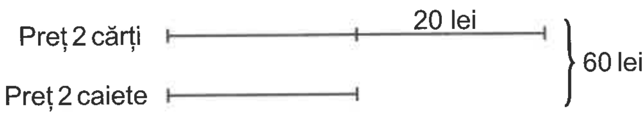
Important este ca în desen să reprezentăm perioada de ani care a trecut pentru fiecare printr-un segment de aceeaşi mărime.

1) Pentru a afla câți ani are fiecare, trebuie să aflăm câți ani s-au adunat *la fiecare* pentru ca suma vârstelor lor să fie acum **56**, adică **12 + 2 + ? = 56**. Deci: Care e dublul nr. de ani ce au trecut pentru ca suma să fie **56**? **56 – (12 + 2) = 42**.
Câți ani au trecut pentru fiecare? **42 : 2 = 21**.
Câți ani are fiecare? **12 + 21 = 33**; **2 + 21 = 23**.
2) Diferența de ani dintre cei doi este permanent aceeaşi. Care *a fost* şi *este diferența* de vârste dintre cei doi? **12 – 2 = 10**. Dacă am considera că primul are aceeaşi vârstă ca şi al doilea, care ar fi suma vârstelor? **56 – 10 = 46**.
Câți ani are fratele mai mic? **46 : 2 = 23**. Dar cel mare? **23 + 10 = 33**.
În altă variantă, se poate considera că **II = I**.
Rezolvare algebrică:
Fie ***x*** numărul de ani care trece pentru fiecare, pentru ca suma vârstelor celor doi să fie **56**, atunci: $\mathbf{12 + x + 2 + x = 56}$; $\mathbf{2x = 42}$, iar $\mathbf{x = 42 : 2 = 21}$. Deci: **I = 12 + 21 = 33**; **II = 2 + 21 = 23**.

26. 1) Din relația ***2 cărți costă mai mult decât 2 caiete cu 20*** de lei, rezultă că o carte costă mai mult decât un caiet cu **10** lei, adică **20 : 2 = 10**. De aici, rezolvarea tipică.

2) Dacă o carte şi un caiet costă **30** lei, putem afla cât costă **2** cărți şi **2** caiete, adică $\mathbf{2 \times 30 = 60}$ (lei).

Reprezentarea grafică:



Din desen, rezultă că **4** caiete costă **40** lei, căci **60 – 20 = 40**. Un caiet costă **10** lei. O carte costă **20** de lei.

Sau: **4** cărți costă **80** lei, adică **60 + 20 = 80**. O carte costă **20** lei.

3) *Algebric*:

Fie ***x*** prețul cărții, ***y*** prețul caietului, se pot scrie: $\mathbf{x + y = 30 \Leftrightarrow x = 30 - y}$; $\mathbf{2x - 2y = 20}$. Prin înlocuirea lui ***x***, avem: $\mathbf{2(30 - y) - 2y = 20 \Leftrightarrow 60 - 4y = 20 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{\Leftrightarrow 4y = 40 \Leftrightarrow y = 10; x = 20}$.

27. Dreptunghiul are **2** lungimi şi **2** lățimi, care se pot reprezenta astfel:

Variante de rezolvare:

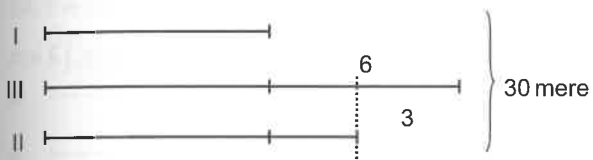
a) **4** lățimi = **2 036 – 278 – 278** = **1 480** (m);
1 lățime = **1 480 : 4** = **370** (m);
1 lungime = **370 + 278** = **648** (m)

b) **4** lungimi = **2 036 + 278 + 278** = **2 592** (m);
1 lungime = **2 592 : 4** = **648** (m);
1 lățime = **648 – 278** = **370** (m).

c) Semiperimetrul = **2 036 : 2 = 1 018**, adică semiperimetrul = o lungime şi o lățime = **1 018**, iar diferența **278**. Rezolvare tipică.

Răspuns: L = **648** m, l = **370** m.

28. Grafic, numărul de mere primite de fiecare copil:



Din enunț şi din desen, rezultă că al doilea copil primeşte cu **3** mere mai mult decât primul, adică cu **6 – 3 = 3**.

Dacă al treilea ar primi cu **6** mere mai puțin, iar al doilea cu **3** mere mai puțin, fiecare ar primi cât primul.

Atunci, toți trei ar primi **21** de mere.

Deci, câte mere ar fi, dacă fiecare ar primi cât primul? **30 – 6 – 3 = 21**.

Câte mere primeşte primul copil? **21 : 3 = 7**.

Dar al treilea? **7 + 6 = 13**.

Dar al doilea? **13 – 3 = 10** sau **7 + 3 = 10**.

Încercați şi alte două variante!

29. $\frac{5}{9}$ **I** + $\frac{3}{7}$ **II = 1 605** (este suma a **2** numere);

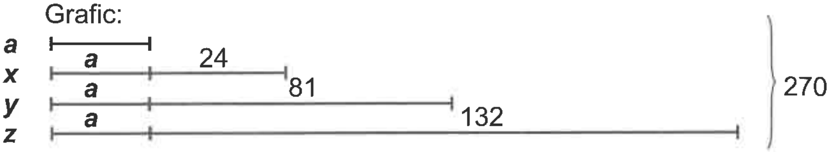
$\frac{5}{9}$ **I** – $\frac{3}{7}$ **II = 855** (diferența aceloraşi numere).

Dacă din **1 605** scădem **855**, se obține dublul lui $\frac{3}{7}$ din **II**. Deci de **2** ori câte $\frac{3}{7}$ din **II = 750**, adică **1 605 – 855 = 750**. Atunci $\frac{3}{7}$ **II** reprezintă **375**, căci **750 : 2 = 375**. Nr. **II = 375 : 3 × 7 = 875**. Nr. **I** = ?

Întâi $\frac{5}{9}$ din **I** = ? **1 605 – 375 = 1 230. I = 1 230 : 5 × 9 = 2 214**.

30. Pentru compunere, a se vedea problema **21**.

Grafic:



Care e suma numerelor rămase? **24 + 81 + 132 = 237**.

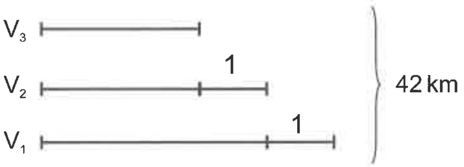
Dar **3*a*** = ? **270 – 237 = 33**, ***a*** **= 33 : 3 = 11**; ***x*** **= 11 + 24 = 35**; ***y*** **= 11 + 81 = 92**; ***z*** **= 11 + 132 = 143**.

Rezolvarea algebrică:

x **= 24 +** ***a***, ***y*** **= 81 +** ***a***, ***z*** **= 132 +** ***a***, iar **270 = 3*a* + 237**; **3*a* = 33**; ***a*** **= 11** etc.

Răspuns: ***x*** **= 35**; ***y*** **= 92**; ***z*** **= 143**.

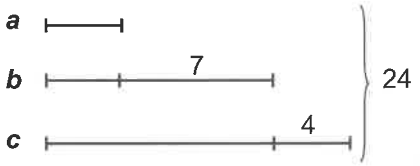
31. Sunt mai multe variante de rezolvare. Grafic, începând cu viteza cea mai mică (numere consecutive):



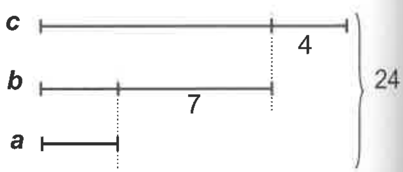
De **3** ori viteza cea mică = **42 – 1 – 2 = 39**. În ultima oră a parcurs **13** km, căci **39 : 3 = 13**. În ora a doua a parcurs **14** km, iar în prima **15** km.

32. Rezolvarea 1

Notăm primul număr cu ***a***, al doilea cu ***b***, al treilea cu ***c***. Din enunț rezultă (scrierea pe scurt): **(*a* + *b* + *c*) : 3 = 8**; ***a*** **+ 7 =** ***b***; ***b*** **+ 4 =** ***c***. Prima egalitate devine: ***a*** **+** ***b*** **+** ***c*** **= 24**. Grafic, cele trei relații se pot reprezenta astfel:



sau:



Se deduce uşor că:

1) **3** părți, fiecare egală cu ***a***, adică **3*a* = 24 – 7 – 7 – 4** ⇔ **3*a* = 6**; rezultă: ***a*** **= 2**; ***b*** **= 9**; ***c*** **= 13**; sau:

2) **3** părți, fiecare egală cu ***b***, adică **3*b* = 24 + 7 – 4** ⇔ ***b*** **= 9** etc.; sau:

3) **3** părți, fiecare egală cu ***c***, adică **3*c* = 24 + 7 + 4 + 4** ⇔ ***c*** **= 13** etc.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile anterioare. Din enunț rezultă:

(*a* + *b* + *c*) : 3 = 8; ***b*** **=** ***a*** **+ 7**; ***c*** **=** ***b*** **+ 4 =** ***a*** **+ 7 + 4 =*a*** **+ 11**.

Înlocuind în sumă pe ***b*** şi pe ***c*** prin ***a***, obținem:

a **+** ***a*** **+ 7 +** ***a*** **+ 11 = 3×8** ⇔ **3*a* + 18 = 24** ⇔ ***a*** **= (24 – 18) : 3** ⇔ ***a*** **= 3**; ***b*** **= 2 + 7 = 9**; ***c*** **= 9 + 4 = 13** sau ***c*** **= 2 + 11 = 13**.

33. Ce înseamnă că cele trei numere au, două câte două, media aritmetică respectiv egală cu **6**, **9**, **7**? Înseamnă că media aritmetică a primelor două numere este **6**, cea dintre primul şi cel de-al treilea număr este **9**, iar cea a ultimelor două este **7**.

Fie a, b şi c cele trei numere naturale.

Din enunţ rezultă:

$(a+b):2=6 \Leftrightarrow a+b=12$;

$(a+c):2=9 \Leftrightarrow a+c=18$;

$(b+c):2=7 \Leftrightarrow b+c=14$.

Dacă adunăm cele trei relaţii obţinute, membru cu membru, rezultă:

$2a+2b+2c=12+18+14 \Leftrightarrow 2(a+b+c)=44 \Leftrightarrow a+b+c=44:2=22$.

Dacă $a+b=12$, rezultă $c=22-12=10$. Dacă $a+c=18$, rezultă $b=22-18=4$. Dacă $b+c=14$, rezultă $a=22-14=8$.

Pentru *reprezentarea grafică*, este necesar să stabilim relaţiile dintre numere, astfel: dacă $a+b=12$, iar $a+c=18$, rezultă că b este mai mic decât c cu $18-12=6$. (Până aici avem o problemă tipică de sumă şi diferenţă cu două mărimi, deoarece $b+c=14$, iar $b-c=6$.)

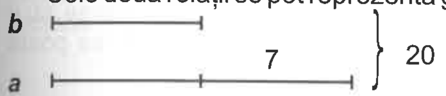
Din $a+c=18$ şi $b+c=14$, rezultă că a este mai mare decât b cu $18-14=4$. Avem o problemă de sumă şi diferenţă cu **3** mărimi.

Pentru aceste rezolvări, a se vedea problemele **5** şi **7**.

34. Fie cele două numere naturale a şi b, care ar îndeplini condiţiile date.

Din enunţ, rezultă: $(a+b):2=10 \Leftrightarrow a+b=20$, iar $a-b=7$.

Cele două relaţii se pot reprezenta grafic astfel:



Din desen, rezultă: $2b=20-7 \Leftrightarrow b=13:2$, care nu este număr natural;

sau: $2a=20+7 \Leftrightarrow a=27:2$, care nu este număr natural.

Deci nu există două astfel de numere naturale.

Observaţie: Dacă suma este un număr par, este necesar ca şi diferenţa să fie număr par.

35. Cel mai mic număr care îndeplineşte condiţia a) este **10**, cu suma cifrelor **1**, iar cel mai mare număr, care îndeplineşte aceeaşi condiţie, este **98**, cu suma cifrelor **17**. Numerele cuprinse între **1** şi **17**, care sunt divizibile cu **3**, sunt: **3, 6, 9, 12, 15**.

Dacă suma cifrelor este **3**, iar diferenţa lor este **1**, numărul este **21**, căci $(3-1):2=1$, iar $1+1=2$.

Dacă suma cifrelor este **6**, iar diferenţa este **1**, rezultă că cifra de pe locul unităţilor este $(6-1):2=5:2$, care nu este număr natural.

Dacă suma cifrelor este **9**, iar diferenţa este **1**, rezultă că cifra de pe locul unităţilor este $(9-1):2=4$, iar numărul este **54**.

Dacă suma este **12**, iar diferenţa este **1**, rezultă că cifra unităţilor este $(12-1):2=11:2$, care nu este număr natural.

Dacă suma cifrelor este **15**, iar diferenta este **1**, rezultă că cifra unităţilor este $(15-1):2=7$, iar numărul este **87**.

Observaţie: Dacă diferenţa este un număr impar, este necesar ca şi suma să fie număr impar.

CAPITOLUL AL III–LEA

Probleme de sumă şi raport. Rezolvări

1. Rezolvarea 1. *Metoda grafică* (prin desen)

Grafic, se poate reprezenta numărul de pagini citite de fiecare copil astfel:

În cele **84** de pagini sunt **4** părți, fiecare egală cu numărul de pagini pe care le-a citit George.

Câte pagini a citit George? **84 : 4 = 21**. Câte pagini a citit Mitruț? **3×21 = 63**.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*:

Presupunem că George a citit o singură pagină. Atunci Mitruț a citit de **3** ori mai mult, adică: **3×1 = 3**. Împreună ar fi citit **4** pagini, adică **1 + 3 = 4**. De fapt, ei au împreună **84** de pagini, deci de **21** de ori mai mult decât am presupus noi, pentru că **84 : 4 = 21**.

Rezultă că George a citit de **21** de ori mai mult decât în ipoteza noastră, adică **21×1 = 21**, iar Mitruț de **21** de ori mai mult decât **3** (câte am presupus noi), adică **21×3 = 63**.

Rezolvarea 3. *Prin proporții derivate*

Notând cu $\boldsymbol{a}$ numărul de pagini citite de Mitruț, cu $\boldsymbol{b}$ cealaltă mărime, cu $\boldsymbol{n}$ şi $\boldsymbol{m}$, numărul de părți corespunzătoare lui $\boldsymbol{a}$ şi, respectiv, lui $\boldsymbol{b}$, se poate scrie următoarea propoziție: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Prin derivare, se poate obține: $\frac{(a+b)}{b} = \frac{(m+n)}{n}$. Atunci, $\mathbf{84 : b = 4 : 1}$, adică $\mathbf{b = 84 : 4 = 21;\ a = 84 - 21 = 63}$ sau $\mathbf{a = b \times m : n}$, adică **21×3 : 1 = 63**.

Se poate deduce întâi $\boldsymbol{a}$ din proporția derivată.

Rezolvarea 4. *Algebric*

Notând cu $\boldsymbol{x}$ numărul de pagini citite de Mitruț, cu $\boldsymbol{y}$ cealaltă mărime, se pot scrie: $\mathbf{x + y = 84}$ şi $\mathbf{x = 3y}$. Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{x}$ în sumă, rezultă $\mathbf{3y + y = 84}$, adică $\mathbf{y = 21;\ x = 63}$.

Rezolvarea 5. *Generalizare*

Păstrând notațiile anterioare, notând cu $\boldsymbol{S}$ suma celor două numere, cu $\boldsymbol{m}$ şi, respectiv, cu $\boldsymbol{n}$, numărul de părți corespunzătoare fiecărei mărimi, se pot scrie: $x + y = S$ şi $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, de unde $x = \frac{my}{n}$. Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{x}$ în sumă, avem: $S = \frac{my}{n} + {}^{n)}y = \frac{my + ny}{n} \Leftrightarrow y(m+n) = S \times n$; rezultă $y = \frac{S \times n}{(m+n)}$.

Asemănător şi pentru $\boldsymbol{x}$.

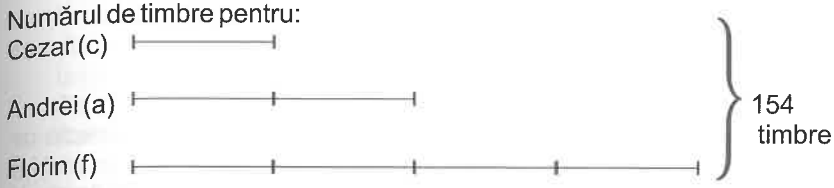
Concluzie: Fiecare număr se obține împărțind suma la numărul total de părți, iar rezultatul se înmulțeşte cu numărul corespunzător de părți.

În particular: $\boldsymbol{y}$ (câte pagini a citit George) **= 84 : 4×1 = 21**;
$\boldsymbol{x}$ (cât a citit Mitruț) **= 84 : 4×3 = 63**.

2. (**3** mărimi)

<u>Rezolvarea 1</u>. *Grafic*

Cele trei mărimi se pot reprezenta astfel:



Indicație:

În general, în realizarea desenului, am cerut elevilor noştri (pentru că este mai uşor) să pornească de la mărimea mai mică. În acest caz, expresia "***c*** este cât jumătate din ***a***" se înlocuieşte cu "***c*** este mai mic decât ***a*** de **2** ori" sau cu "***a*** este mai mare de **2** ori decât ***c***". Din desen, rezultă că în cele **154** de timbre sunt cuprinse **7** părți, fiecare egală cu numărul de timbre ale lui Cezar. Câte timbre are Cezar? **154 : 4 = 22.** Câte timbre are Andrei? $\mathbf{2 \times 22 = 44}$. Câte timbre are Florin? $\mathbf{4 \times 22 = 88}$ sau $\mathbf{2 \times 44 = 88}$.

<u>Rezolvarea 2</u>. *Prin falsă ipoteză*:

Presupunem că Cezar are un timbru, atunci Andrei ar avea **2**, iar Florin, pentru a se păstra raportul dat, ar avea **4**. În total ar fi **7** timbre, adică **1 + 2 + 4 = 7**. Dar în realitate ei au **154** timbre. De câte ori mai mult față decât am presupus noi? De câte ori **7** se cuprinde în **154**, adică **154 : 7 = 22.** Rezultă că fiecare are un număr de timbre de **22** de ori mai mare decât în ipoteza noastră, adică: Cezar are **22** de timbre, căci $\mathbf{22 \times 1 = 22}$;
Andrei are **44** de timbre, adică $\mathbf{22 \times 2 = 44}$;
Florin are **88** de timbre, pentru că $\mathbf{22 \times 4 = 88}$.

<u>Rezolvarea 3</u>. *Prin proporții derivate*:

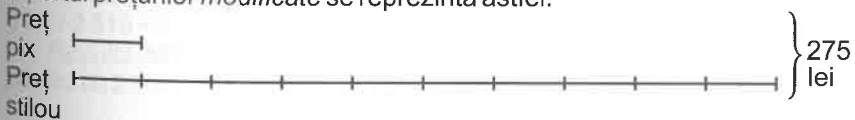
Notând numărul de timbre cu inițialele fiecărui nume, se pot scrie: $\frac{a}{f} = \frac{1}{2}$; $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$; $\frac{c}{f} = \frac{1}{4}$; $a + f + c = 154$. Prin derivare, se obține: $\frac{(a+f)}{f} = \frac{(1+2)}{2}$. Considerând şi raportul $\frac{c}{f}$, care include mărimea ***c*** şi care are numitorul ***f***, se poate scrie: $\frac{(a+f)}{f} + \frac{c}{f} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Rezultă: $\frac{(a+f+c)}{f} = \frac{7}{4}$, adică $\frac{154}{f} = \frac{7}{4}$, iar $f = 154 \times 4 : 7 = 88$; $c = 88 \times 1 : 4 = 22$; $a = 44$.

<u>Rezolvarea 4</u>. *Algebric*:

Păstrând notațiile de mai sus, se poate scrie: $c + a + f = 154$; $2c = a$; $f = 2a$. Deci $c + 2c + 2a = 154$; dar $a = 2c$, iar $2a = 4c$, atunci $c + 2c + 4c = 154$, echivalent cu $7c = 154$. Rezultă $c = 154 : 7 = 22$; $a = 44$; $f = 88$.

3. <u>Rezolvarea 1</u>

Dacă se micşorează prețul pixului cu **2** lei şi se măreşte prețul stiloului cu **10** lei, atunci prețul total devine **275** lei, adică **267 – 2 + 10 = 275**. Suma de **275** cuprinde **11** părți fiecare egală cu prețul modificat al pixului. Grafic, raportul prețurilor *modificate* se reprezintă astfel:



Prețul micșorat al pixului ar fi de **25** lei, adică **275 : 11 = 25**.
De fapt un pix costă **27** de lei, pentru că **25 + 2 = 27**.
Prețul mărit al stiloului ar fi **250** de lei, pentru că **25×10 = 250**.
De fapt, stiloul costă **240** lei, căci **250 – 10 = 240**.
Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*:
Lucrăm cu raportul prețurilor după modificări, care este $\frac{10}{1}$.

Presupunem că prețul pixului este **1** leu, atunci, pentru a respecta raportul dat, prețul stiloului ar fi de **10** lei. Împreună ar costa **11** lei.

De fapt, stiloul și pixul ar costa, dacă am modifica prețurile, **275** de lei, de **25** ori mai mult decât am presupus noi, căci **275 : 11 = 25**.

Rezultă că fiecare dintre cele două prețuri presupuse de noi trebuie mărit de **25** de ori.

Deci pixul ar costa **25** de lei, căci **25×1 = 25**, iar stiloul ar costa **250** de lei, pentru că **25×10 = 250**. Înainte de modificarea prețului, pixul costa **27** de lei, adică **25 + 2 = 27**, iar stiloul costa **240** lei, căci **250 – 10 = 240**.

Rezolvarea 3

Notând cu $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ prețul stiloului și, respectiv, al pixului atunci când le-am modifica, cu $\boldsymbol{m}$ și cu $\boldsymbol{n}$ numărul de părți corespunzătoare fiecărui preț, putem scrie proporția: $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$. Prin derivare, se poate obține: $\frac{a+b}{b}=\frac{m+n}{n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{275}{b}=\frac{11}{1} \Leftrightarrow b=275:11=25;\ a=25\times 10:1=250.$$

Prețul nemodificat al pixului este **27** de lei, căci **25 + 2 = 27**, iar al stiloului este de **240** lei, pentru că **250 – 10 = 240**.

Rezolvarea 4

Fie $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{y}$ prețul stiloului și, respectiv, al pixului, fără a fi modificate, se pot scrie: $\boldsymbol{x+y=267}$ și $\boldsymbol{x+10=10(y-2)}$.

Scăzând **10**, ultima relație devine $\boldsymbol{x=10y-30}$.

Înlocuind în sumă prin $\boldsymbol{x}$, se obține: $\boldsymbol{10y-30+y=267 \Leftrightarrow 11y=297 \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{y=27;\ x=267-27=240}$.

4. (Modificări ale mărimilor)

După ce s-au vândut **40** kg de fructe, adică **26 + 14**, raportul dintre cantități devine $\frac{4}{1}$.

Cantitățile rămase se pot reprezenta grafic astfel:

Cantitate pere:

Cantitate mere:

Cantitatea de **170** kg de fructe cuprinde **5** părți, fiecare la fel de mare ca și cantitatea *rămasă* de pere.

Câte kg de pere au rămas? **170 : 5 = 34**.
Câte kg erau inițial? **34 + 14 = 48**.
Câte kg de mere au rămas? **170 – 34 = 136** sau **4×34 = 136**.

Câte kg de mere erau inițial? **136 + 26 = 162** sau **210 – 48 = 162**.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

După modificări, cantitatea totală de fructe era de **170** kg.

Presupunem că a rămas **1** kg de pere, atunci cantitatea rămasă de mere ar fi fost de **4** ori câte **1** kg, adică **4** kg.

În total ar fi rămas **5** kg, căci **1 + 4 = 5**. De fapt au rămas **170** de kg.

De câte ori mai mult decât am presupus noi? **170 : 5 = 34**.

Rezultă că fiecare dintre cele două cantități rămase era mai mare de **34** ori față de ipoteza noastră.

Deci, au rămas **34** kg de pere, căci **34 × 1 = 34**, iar mere au rămas **136** kg, pentru că **34 × 4 = 136** sau **170 – 34 = 136**.

Inițial, au fost **48** kg de pere, adică **34 + 14 = 48** și **162** kg de mere, adică **136 + 26 = 162** sau **210 – 48 = 162**.

Rezolvarea 3

Notând cu ***a*** și cu ***b*** cantitățile rămase de pere și, respectiv, de mere, cu ***m*** și cu ***n*** numărul de părți corespunzătoare fiecărei cantități (după modificările ce au loc), se poate scrie proporția: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Prin derivare, se obține: $\frac{(a+b)}{b} = \frac{(m+n)}{n}$.

În particular: $\frac{170}{b} = \frac{5}{1}$, adică $b = 170 : 5 = 34$.

Inițial: cantitatea de pere era de **48** kg, iar cea de mere de **162** kg.

Rezolvarea 4

Notând cu ***x*** și cu ***y*** cantitățile *inițiale* de mere și, respectiv, de pere, se pot scrie: $x + y = 210$ și $x - 26 = 4(y - 14)$.

Adunând **26** la fiecare termen al ultimei egalități, rezultă: $x = 4y - 30$.

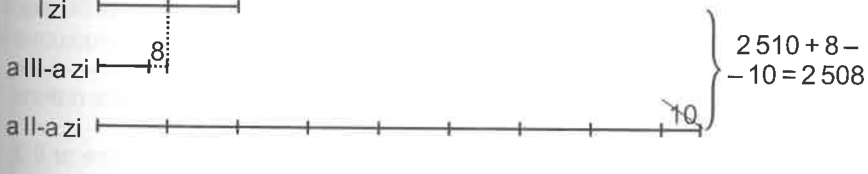
Înlocuind pe ***x*** în sumă, se obține:

$4y - 30 + y = 210 \Leftrightarrow y = (210 + 30) : 5 = 48$; $x = 210 - 46 = 162$.

5. (**3** mărimi. Raportul trebuie delimitat)

Rezolvarea 1

Cantitățile de struguri din cele trei zile se pot reprezenta grafic astfel:



Dacă din cantitatea de **2 510** kg de struguri dăm deoparte **10** kg și apoi la rezultat adăugăm **8** kg, în suma totală obținem **11** părți, egală fiecare cu jumătate din cantitatea de struguri recoltată în prima zi, adică **2 + 8 + 1 = 11** (părți).

Care este cantitatea de struguri ce poate fi organizată în **11** asemenea părți? **2 510 + 8 – 10 = 2 508** (kg).

Rezultă că jumătate din cantitatea recoltată în prima zi este de **228** kg, pentru că **2 508 : 11 = 228** etc.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

Pentru a fi implicată numai relația de raport (lucrând numai cu numere naturale), considerăm că în a treia zi s-au cules cu **8** kg mai mult, ceea ce reprezintă jumătate din cantitatea recoltată în prima zi; de asemenea, considerăm că în a doua zi s-au cules cu **10** kg mai puțin, ceea ce reprezintă o cantitate de **4** ori mai mare decât cea culeasă în prima zi şi de **8** ori mai mare decât cea din a treia zi.

Presupunem că în a treia zi s-a cules **1** kg de struguri: atunci, a doua zi s-ar fi cules **8** kg, iar în prima zi **2** kg. În total s-ar fi recoltat **11** kg, deoarece $\mathbf{1 + 8 + 2 = 11}$.

Dar cantitatea recoltată în cele trei zile (care presupune numai relația de raport între mărimi) este de **2 508** kg, căci $\mathbf{2\,510 + 8 - 10 = 2\,508}$.

De câte ori este mai mare **2 508** față de **11**? $\mathbf{2\,508 : 11 = 228}$. Rezultă că în fiecare zi s-au cules cantități mai mari de **228** ori decât am presupus noi.

Deci, în a treia zi s-au cules **220** kg, căci $\mathbf{228 \times 1 - 8 = 220}$ (dăm deoparte cele **8** kg pe care le-am adăugat pentru a se lucra numai cu raportul); în prima zi s-au recoltat **456** kg de struguri, pentru că $\mathbf{228 \times 2 = 456}$; în ziua a doua s-au strâns **1 834** kg de struguri, deoarece $\mathbf{228 \times 8 + 10 = 1\,834}$.

Rezolvarea 3

Pentru elevii mici este bine să notăm cu x cantitatea mai mică, cea culeasă în a treia zi, fiind implicată relația de multiplicitate, nu de divizibilitate.

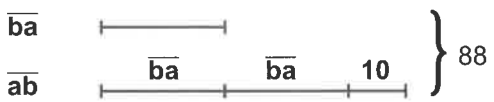
Exprimăm cele trei cantități în funcție de x: cea din prima zi: $\mathbf{(x + 8) \times 2 = 2x + 16}$; cea din a doua zi: $\mathbf{(x + 8) \times 2 + 10 = 8x + 74}$. Atunci suma va fi $\mathbf{11x + 90}$. Deci $\mathbf{11x + 90 = 2\,510 \Leftrightarrow x = (2\,510 - 90) : 11 \Leftrightarrow x = 220}$ etc.

6. (Raportul trebuie determinat)

Rezolvarea 1

Fie numărul $\overline{ab}$. Din enunț rezultă: $\overline{ab} + \overline{ba} = 88$ şi $\overline{ab} = 2\overline{ba} + 10$.

Se poate reprezenta grafic astfel:



Din desen, rezultă că **3** părți, fiecare egală cu $\overline{ba}$, reprezintă **78**, căci $\mathbf{88 - 10 = 78}$; atunci $\overline{ba} = 78 : 3 = 26$, iar $\overline{ab} = 2 \times 26 + 10 = 62$.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

Pentru a fi implicată numai relația de raport (lucrând cu numere naturale), considerăm că $\overline{ab} = 2\overline{ba}$. Atunci $\overline{ab} + \overline{ba} = 88 - 10 = 78$.

Presupunem că $\overline{ba}$ ar fi **1**, atunci $\overline{ab}$ (modificat) ar fi **2**, iar suma ar fi **3**, căci $\mathbf{1 + 2 = 3}$. De fapt suma (modificată) este **78**, de **26** de ori mai mare, pentru că $\mathbf{78 : 3 = 26}$.

Rezultă că fiecare număr este de **26** de ori mai mare decât am presupus noi, adică: $\overline{ba} = 26 \times 1 = 26$; $\overline{ab}$ (*inițial*) $= 26 \times 2 + 10 = 62$.

Rezolvarea 3

Înlocuind pe $\overline{ab}$ în prima egalitate, rezultă: $2\overline{ba} + 10 + \overline{ba} = 88 \Leftrightarrow 3\overline{ba} = 78 \Leftrightarrow \overline{ba} = 26 \Leftrightarrow \overline{ab} = 62$.

7. (Raportul trebuie determinat)

Observație:

Dacă înlăturăm pe zero de la unitățile primului număr, îl micşorăm de **10** ori. Dacă prin această operație obținem al doilea număr, rezultă că primul număr este mai mare decât al doilea de **10** ori.

Rezolvarea 1

Câte părți, fiecare egală cu numărul mai mic, sunt în suma **462**?

10 + 1 = 11. Care este numărul al doilea? **462 : 11 = 42**. Dar primul număr? $\mathbf{42 \times 10 = 420}$.

Rezolvarea 2

Presupunem că al doilea număr este **1**. Atunci, primul număr ar fi **10**, iar suma ar fi **11**. De fapt suma lor este **462**, deci de **42** de ori mai mare decât am presupus noi, căci **462 : 11 = 42**. Rezultă că al doilea număr este **42**, pentru că $\mathbf{42 \times 1 = 42}$, iar primul număr este **420**, căci $\mathbf{42 \times 10 = 420}$.

Rezolvarea 3

Primul număr poate fi de forma $\overline{\mathbf{ab0}}$; al doilea, obținându-se prin înlăturarea lui zero de la primul număr, este $\overline{\mathbf{ab}}$, suma lor fiind **462**.

Efectuăm adunarea unităților de fiecare ordin: $b + 0 = 2$, rezultă $b = 2$; dacă $2 + a = 6$, rezultă $a = 4$. Deci primul număr este **420**.

Rezolvarea 4

Cele două numere de forma $\overline{\mathbf{ab0}}$ şi $\overline{\mathbf{ab}}$ se pot scrie sistematic, în baza zece, astfel: $\overline{ab0} = 100a + 10b$; $\overline{ab} = 10a + b$.

Avem egalitatea: $110a + 11b = 462 \Leftrightarrow 11(10a + b) = 462$; rezultă:

$10a + b = 462 : 11 = 42$.

Dar $10a + b = \overline{ab}$, tocmai numărul al doilea. Deci $\overline{ab0} = 420$.

Rezolvarea 5

Prin particularizarea formulei

(a generalizarii, a se vedea rezolvarea **5** de la problema **1.**):

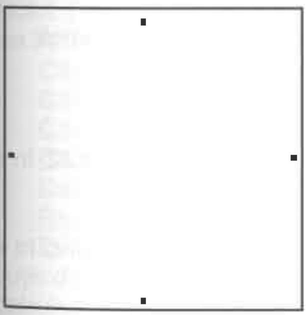
$\overline{ab0} = 462 : (10 + 1) \times 10 = 420$; $\overline{ab} = 462 : (10 + 1) \times 1 = 42$.

8. (**3** mărimi. Raportul trebuie delimitat)

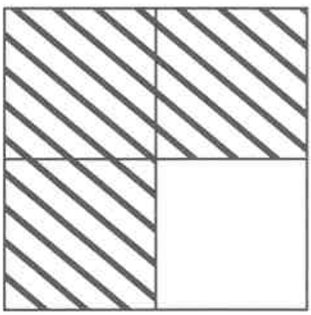
Rezolvarea 1

Din enunțul problemei se observă că în prima săptămână s-a consumat cel mai puțin, iar în a treia, cel mai mult.

Grafic, cele **3** mărimi se pot reprezenta prin pătrate sau prin segmente. Pentru elevii mici este mai bine să se folosească relația de divizibilitate, nu de multiplicitate, astfel:

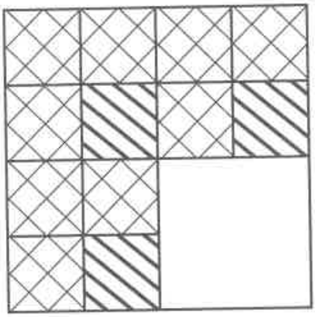


a III-a



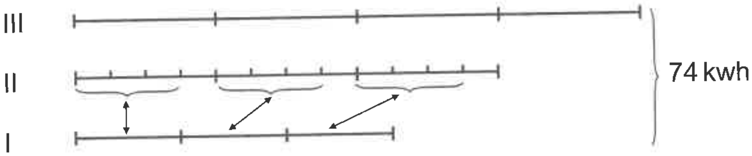
a II-a (haşurată)

Ca să exprimăm prima mărime (cantitatea de energie consumată în prima săptămână) în funcție de a II-a, adică **3** sferturi din **3** sferturi, împărțim fiecare pătrat din figura a II-a în câte **4** pătrate, luând în considerare câte **3** pătrate mici din fiecare pătrat haşurat:



I

sau, prin segmente:



Rezultă că în a doua mărime sunt **12** părți, iar în a treia **16** părți, fiecare fiind la fel de mare cu o noime (a noua parte) din prima mărime.

Câte părți, fiecare egală cu o noime din prima mărime, sunt în total? $\mathbf{9 + 12 + 16 = 37}$. Câți kwh reprezintă o asemenea parte? $\mathbf{74 : 37 = 2}$.

Câți kwh s-au consumat în prima săptămână? $\mathbf{2 \times 9 = 18}$.

Dar în a doua săptămână? $\mathbf{12 \times 2 = 24}$.

Dar în a treia săptămână? $\mathbf{16 \times 2 = 32}$.

Verificare:

$\mathbf{32 + 24 + 18 = 74}$; $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ din $\mathbf{32 = 32 : 4 \times 3 = 24}$; $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ din $\mathbf{24 = 24 : 4 \times 3 = 18}$.

Rezolvarea 2. *Operând cu fracții*

Fie un întreg cantitatea de energie consumată în a treia săptămână (notată C_3), în a II-a săptămână $\frac{3}{4}C_3$, iar în prima săptămână $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\,C_3$, adică $\frac{9}{16}C_3$. În total s-au consumat $\frac{37}{16}C_3$, ceea ce reprezintă **72** kwh.

În a treia săptămână s-au consumat **32** kwh, căci $\mathbf{74 : 37 \times 16 = 32}$; în a doua **24** kwh, căci $\mathbf{74 : 37 \times 12 = 24}$, iar în prima **18** kwh.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Presupunem că în a treia săptămână s-a consumat **1** kwh, atunci în a doua s-ar fi consumat $\frac{3}{4}$ kwh, iar în prima $\frac{3}{4}$ din $\frac{3}{4}$, adică $\frac{9}{16}$ kwh.

În total s-ar fi consumat $\frac{37}{16}$ kwh, adică $\mathbf{1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{37}{16}}$.

În fapt s-au consumat **74** kwh, deci de **32** de ori mai mult decât am presupus noi, căci $\mathbf{74:\frac{37}{16}=74\times\frac{16}{37}=32}$.

Rezultă că în a treia săptămână s-au consumat de **32** de ori mai mult decât **1**, adică $\mathbf{32\times1=32}$, în a doua de **32** de ori mai mult decât $\mathbf{\frac{3}{4}}$, adică $\mathbf{32\times\frac{3}{4}=24}$, iar în prima săptămână **18** kwh.

Rezolvarea 4. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{x}$ cantitatea consumată în a treia săptămână, se poate scrie:

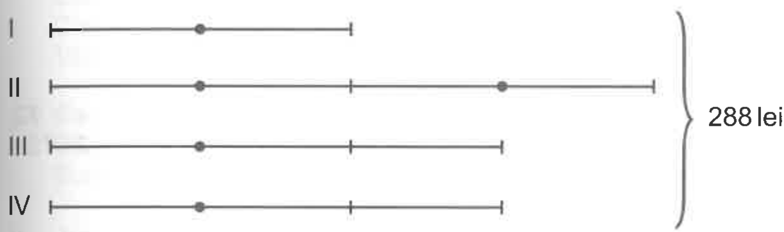
$\mathbf{x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}x=74}$, de unde $\mathbf{16x+12x+9x=74\times16=1\,184}$, iar $\mathbf{x=32}$.

Atunci: $\mathbf{II=32:4\times3=24}$; $\mathbf{I=24:4\times3=18}$.

9. (**4** mărimi)

Rezolvarea 1. *Grafic*

Sumele celor **4** elevi se pot reprezenta:



Pentru reprezentarea sumei a treia calculăm astfel: **3** părţi: **2 = 1** parte şi jumătate. Marcăm jumătatea lui **I**. Pentru reprezentarea sumei a patra, împărţim cele **9** jumătăţi din suma **I + II + III** în **3** părţi, obţinem **3** jumătăţi din **I**. Al treilea elev are cât jumătate din suma primilor doi, adică **3** părţi, fiecare parte fiind egală cu jumătate din suma primului.

Exprimăm şi celelalte sume folosind ca unitate jumătate din suma primului. Deci, primul are **2** părţi, al doilea are **4** părţi, al treilea **3** părţi, al patrulea **3** părţi egale. În totalul de **288** lei sunt **12** părţi.

Câţi lei formează o parte (o jumătate din suma primului)? **288 : 12 = 24.**

Câţi lei are primul elev? $\mathbf{2\times24=48}$.

Câţi lei are al doilea elev? $\mathbf{4\times24=96}$.

Câţi lei are al treilea elev? $\mathbf{3\times24=72}$.

Dar al patrulea? (Tot cât al treilea), $\mathbf{3\times24=72}$.

Rezolvarea 2

Din reprezentarea grafică de mai sus se observă că primul elev are mai puţin decât al treilea cu o jumătate din suma lui (a primului), iar al treilea şi al patrulea au sume egale.

Dacă s-ar transfera primului partea (o jumătate) prin care suma celui de-al doilea o depăşeşte pe a celui de-al treilea, s-ar obţine **4** sume (părţi), fiecare egală cu suma celui de-al treilea sau cu suma celui de-al patrulea.

Deci: **4III = 288**, iar **III** (sau **IV**) **= 288 : 4 = 72**. **72** cuprinde **3** jumătăţi din **I**. Rezultă: **II = 72 : 3×4 = 96**. **I = 72 : 3×2 = 48** sau **96 : 2 = 48**.

Rezolvarea 3

Din cele două jumătăţi de la a **III**-a şi de la a **IV**-a se poate obţine încă o parte egală cu suma primului elev. Dacă putem privi suma de **288** lei ca fiind organizată în **6** părţi, fiecare egală cu suma primului.

Câţi lei are primul elev? **288 : 6 = 48**.

Câţi lei are al doilea elev? **2×48 = 96**.

Câţi lei are al treilea? **(48 + 96): 2 = 72**.

Câţi lei are al patrulea? **(48 + 96 + 72): 3 = 72**.

Rezolvarea 4. *Folosind relaţiile de sumă şi diferenţă*

Dacă primii trei elevi au de trei ori mai mult decât al patrulea, rezultă că ei au trei părţi din sumă, iar al patrulea o parte. Adică:

$\underbrace{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}} + \mathrm{IV} = 288$

3IV + IV = 288, de unde **IV = 288 : 4 = 72**.

Reformulăm problema, reţinând relaţiile date între sumele primilor trei elevi, excluzând din total suma celui de-al patrulea:

I + II + III = 288 – 72 = 216; dar **I + 2II = 2III**, deci **2III + III = 216**, al treilea are **72** de lei, căci **216 : 3 = 72**. O nouă reformulare: **I + II = 216 – 72 = 144**, dar **II = 2I**, deci **3I = 144**, atunci **I = 144 : 3 = 48**; **II = 2×48 = 96**.

Rezolvarea 5. *Algebric*

Notând cu ***x***, ***y***, ***z*** şi ***u*** suma fiecărui elev, se pot scrie:

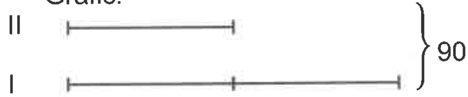
$x + y + z + u = 288$, $y = 2x$, $x + y = 2z$, $x + y + z = 3u$.

Folosind prima şi ultima relaţie, obţinem: $3u + u = 288$, iar $u = 72$; $x + y + z = 288 - u = 216$, iar $2z + z = 216$; $z = 216 : 3 = 72$; $x + 2x = 2\times72 = 144$; $x = 48$; $y = 2\times48 = 96$.

10. Rezolvarea 1

Din afirmaţia că diferenţa este cât numărul mai mic, rezultă că primul număr este mai mare decât al doilea de **2** ori.

Grafic:



Deci în sumă sunt **3** părţi, fiecare egală cu numărul mai mic. Cât este numărul mai mic? **90 : 3 = 30**. Cât este numărul mai mare? **2×30 = 60**.

Rezolvarea 2. *Falsă ipoteză*

Dacă presupun că numărul mai mic ar fi **1**, atunci numărul mai mare ar fi **2**, pentru că diferenţa trebuie să fie tot **1**. Dar suma ar fi **3**, deci de **30** de ori mai puţin decât **90**, suma dată în problemă, căci **90 : 3 = 30**. Rezultă că fiecare număr presupus de mine trebuie mărit de **30** de ori. Deci al doilea număr este **30**, pentru că **30×1 = 30**, iar primul număr va fi **60**, căci **30×2 = 60**.

Rezolvarea 3. *Algebric*

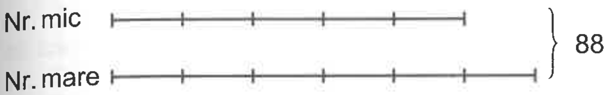
$a + b = 90$ şi $a - b = b$. Din ultima relaţie rezultă $a = 2b$.

Prin înlocuire în sumă se obţine $2b + b = 90$, de unde $b = 90 : 3 = 30$, iar $a = 2\times30 = 60$.

11. *Grafic*:

Pentru a determina diferența dintre cele două numere împărțim numărul mai mic în **5** părți la fel de mari.

Numărul mai mare va avea în plus încă o parte de aceasta:

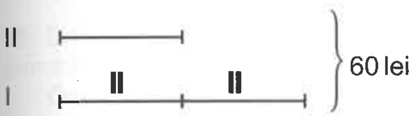


Câte părți, fiecare egală cu diferența, sunt în total? $5 + 6 = 11$.
Care este primul număr? $88 : 11 \times 5 = 40$. Care e al doilea număr?
$88 : 11 \times 6 = 48$ sau $88 - 40 = 48$ sau $40 + 40 : 5 = 48$.
Verificare: $40 + 48 = 88$; $40 : 5 = 8$ şi $48 - 40 = 8$.

12. *Observație*: Sfertul se obține prin împărțirea primului număr la **4**. Grafic:

Câte părți, fiecare egală cu sfertul numărului, sunt în sumă?
4 (sferturi) + **1** (sfert) = **5** (sferturi).
Care e sfertul numărului (o parte)? $95 : 5 = 19$.
Care este numărul? (Orice întreg are **4** sferturi). $4 \times 19 = 76$.
Verificare: $76 + 76 : 4 = 76 + 19 = 95$.

13. Ce rest au primit în total cei doi copii? $30 + 30 = 60$.
Câți lei au cheltuit împreună? $120 - 60 = 60$.
Sumele cheltuite se pot reprezenta astfel:

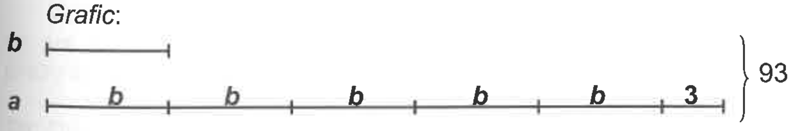


Câți lei a cheltuit primul copil? (Aplicăm formula din **1.**)
$60 : (2 + 1) \times 2 = 40$.
Dar al doilea? $60 : 3 \times 1 = 20$.
Câți lei a avut primul copil? $40 + 30 = 70$. Dar al doilea? $20 + 30 = 50$.

14. Scrierea pe scurt a problemei:

$a + b = 93$
$\underline{a = 5b + 3}$
$a = ?;\ b = ?$

Grafic:



Dacă scădem din sumă **3**, ceea ce rămâne se poate organiza în **6** părți, fiecare egală cu b. Deci $6b = 93 - 3 = 90$.

Care e numărul ***b***? **90 : 6 = 15**. Care e numărul ***a*?** **15×5 + 3 = 78**.
Verificare: **78 + 15 = 93; 78 = 5×15 + 3**.

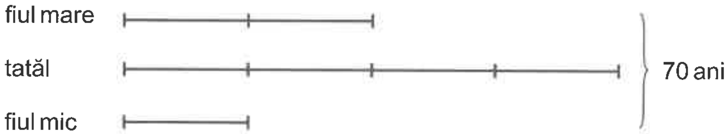
15. Se observă că numărul cel mai mic este al **II**-lea, iar cel mai mare este al **III**-lea.

Grafic:

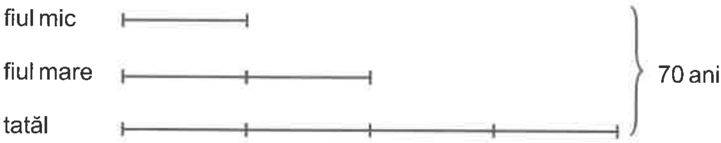
Reformularea parțială:

Primul are **2** părți, fiecare egală cu **II**; al treilea este de **3** ori mai mare decât primul, adică are **6 II**. În suma de **540** sunt **9** părți, fiecare egală cu numărul al doilea, adică **6 + 2 + 1 = 9**. Care e numărul al doilea? **540 : 9 = 60**. Dar primul? **2×60 = 120**. Dar al treilea? **3×120 = 360** sau **6×60 = 360**.

16. Grafic, raportul vârstelor ar fi (păstrând relațiile aşa cum sunt date):

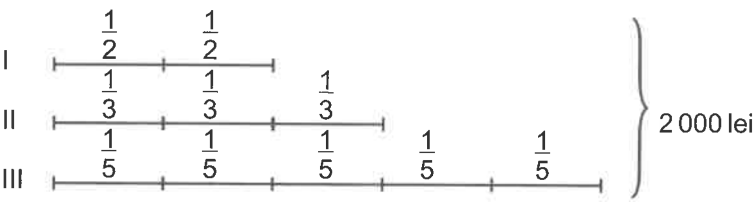


sau, prin reformulare, înlocuind relațiile date cu altele echivalente: copilul mare are de **2** ori vârsta fratelui său, iar tatăl de **2** ori vârsta copilului mare, adică de **4** ori vârsta copilului mic:



Câte părți, fiecare egală cu vârsta fiului mic, sunt în sumă? **2 + 4 + 1 = 7**.
Deci de **7** ori vârsta fiului mic = **70** de ani. Vârsta fiului mic = **70 : 7 = 10**.
Fiul mare = **2×10 = 20**.
Tatăl = **2×20 = 40** sau **4×10 = 40** ani.

17. Din enunț rezultă următorul desen:



Se observă că putem privi suma ca fiind organizată în **10** părți, fiecare egală cu o doime din suma primului elev sau cu o treime din suma celui de-al doilea sau cu o cincime din suma celui de-al treilea.

Dacă luăm ca parte de referință o jumătate din suma primului elev, câți lei reprezintă o asemenea parte? **2 000 : 10 = 200**.

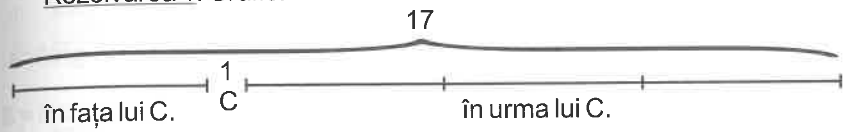
Dacă o doime din suma **I** reprezintă **200** lei, atunci toată suma este **400** lei, căci $\mathbf{2 \times 200 = 400}$.

Câți lei avea al doilea elev? $\mathbf{3 \times 200 = 600}$.

Câți lei avea al treilea elev? $\mathbf{5 \times 200 = 1\,000}$.

18. Reformulare parțială: "în urma lui Cristi era un număr de copii de **3** ori mai mare decât numărul celor din fața lui "

Rezolvarea 1. *Grafic*:



Din desen, rezultă că **4** părți, fiecare egală cu numărul celor ce se aflau în fața lui Cristi, reprezintă **16** crosiști, căci **17 – 1 = 16**.

Câți crosiști erau în fața lui Cristi? **16 : 4 = 4**.

Al câtelea era Cristi? **4 + 1 = 5**.

Răspuns: Al cincilea.

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie ***y*** numărul participanților aflați în urma lui Cristi.

Din enunț, rezultă: $\frac{1}{3}y + 1 + y = 17 \Leftrightarrow \frac{4}{3}y = 16;\ y = 16 : 4 \times 3 = 12$.

Al câtelea era Cristi? **17 – 12 = 5**.

19. Dacă s-a luat câte o optime din fiecare parcelă, formându-se o altă parcelă, din cele **8** optimi ale fiecărei parcele au mai rămas câte **7** optimi.

Dacă parcela nou-formată este egală cu fiecare dintre celelalte, rezultă că şi ea va avea **7** optimi. De la câte parcele trebuie să luăm câte o optime pentru a forma **7** optimi? Adică $\mathbf{1 \times ? = 7}$. De la **7** parcele, căci **7 : 1 = 7**. Deci au fost **7** parcele (a câte **8** optimi), acum sunt **8** parcele (a câte **7** optimi). De aici, sunt mai multe *variante de rezolvare*:

Varianta 1: Dacă **7** parcele *aveau* **112** ha, una *avea* de **7** ori mai puțin, adică **112 : 7 = 16**. Dacă **8** parcele egale *au* **112** ha, o parcelă *are* de **8** ori mai puțin, adică **112 : 8 = 14**.

Varianta 2: Câte optimi au fost în **7** parcele? $\mathbf{7 \times 8 = 56}$. Câte ha avea fiecare parcelă anul trecut? $\mathbf{112 : 56 \times 8 = 16}$. (O optime reprezenta **2** ha).

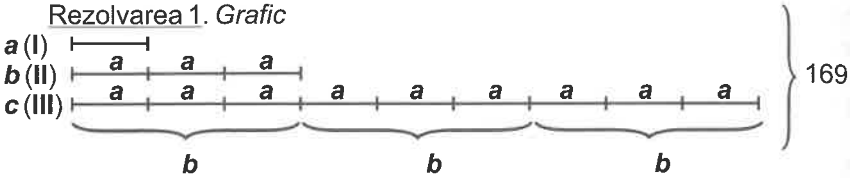
Câte ha are o parcelă anul acesta? **16 – 2 = 14**.

Varianta 3: Câte optimi sunt în **8** parcele a câte **7** optimi? $\mathbf{8 \times 7 = 56}$. Câte ha are anul acesta fiecare parcelă? $\mathbf{112 : 56 \times 7 = 14}$, adică o optime reprezintă **2** ha. Câte ha avea fiecare parcelă anul trecut? **14 + 2 = 16**.

20. *Observație*: Precedent înseamnă "cel din față". Exemplu: Fie numerele ***a***, ***b***, ***c***. Precedentul lui ***b*** este ***a***, iar al lui ***c*** este ***b***.

Reformulare: $a+b+c=169$; $b=3a$; $c=3b=9a$.

<u>Rezolvarea 1</u>. *Grafic*



Din desen, rezultă că **13** părți, fiecare egală cu primul număr, reprezintă **169**. Care este primul număr? $169 : 13 = 13$. Care este al doilea număr? $3 \times 13 = 39$. Care este al treilea număr? $9 \times 13 = 117$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Înlocuim în sumă celelalte necunoscute prin a (primul număr), adică $a+3a+9a=169$, de unde $a=13$ etc.

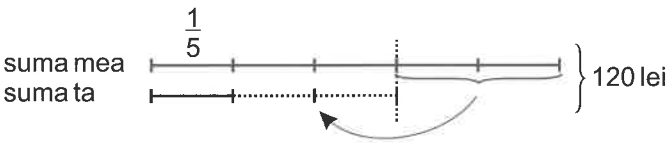
21. *Observație:* Orice întreg are **5** cincimi. Pentru reprezentarea grafică, gândim astfel:

1) Câte cincimi îți rămân ție, dacă îmi dai **2** cincimi? **5** cincimi – **2** cincimi = **3** cincimi.

2) La câte cincimi adaug eu **2** cincimi pentru a avea **3** cincimi?

Sau: ? cincimi + **2** cincimi = **3** cincimi; la o cincime, căci $3-2=1$. (Cincimile se pot scrie şi cu ajutorul liniei de fracție).

Reprezentarea grafică poate fi:



Câte cincimi sunt în total? **5** cincimi + **1** cincime = **6** cincimi.

Câți lei am eu? $120 : 6 = 20$. Dar tu? $5 \times 20 = 100$.

Verificare: $100 - 100 : 5 \times 2 = 20 + 100 : 5 \times 2 \Leftrightarrow 60 = 60$; $100 + 20 = 120$.

22. Raportul dintre mărimi, după modificările din enunț, poate fi reprezentat grafic astfel:

Putem privi suma de **49** ca fiind organizată în **7** părți, fiecare egală cu numărul bilelor roşii. Câte bile roşii au rămas? $49 : 7 = 7$. Câte erau inițial? $7 + 7 = 14$. Câte bile galbene au rămas? $2 \times 7 = 14$. Câte erau inițial? $14 + 6 = 20$. Câte bile albastre au rămas? $2 \times 14 = 28$ sau $4 \times 7 = 28$. Câte erau inițial? $28 + 8 = 36$.

23. Pe scurt, relațiile din enunț sunt:

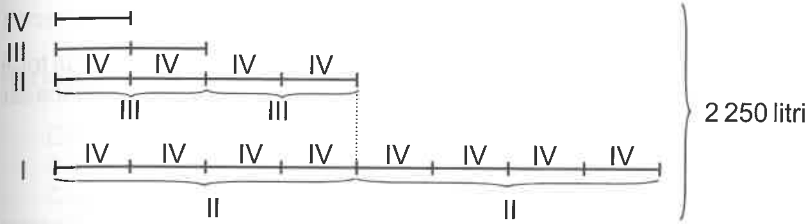
O bluză costă de **15** ori mai puțin decât prețul celorlalte articole.

Rezultă că prețul bluzei constituie a **16**-a parte din suma totală, adică $4720 : 16 = 295$. Dacă pantofii costă cât a patra parte din prețul costumului, rezultă că în suma rămasă vor fi **5** părți, fiecare egală cu prețul pantofilor.

Câţi lei costă pantofii? (Se observă că partea a doua este o problemă simplă de sumă şi raport). **4 425 : 5 = 885**. Câţi lei costă costumul? **4×885 = 3 540** (lei) sau **4 425 – 885 = 3 540** (lei).

24. *Reformulare*: Butoiul nr. **2** are cât jumătate din cantitatea conţinută de butoiul nr. **1**, căci **1** este mai mic decât **2** cu **1**; butoiul nr. **3** are cât jumătate din cantitatea conţinută de butoiul nr. **2**, pentru că **2** este mai mic decât **3** cu **1**; butoiul nr. **4** are cât jumătate din cantitatea pe care o are butoiul nr. **3**, deoarece **3** este mai mic decât **4** cu **1**.

Dacă în loc de jumătate, pornindu-se de la cantitatea cea mai mică, a **IV**-a, se foloseşte expresia "de **2** ori mai mult", reprezentarea grafică este:



Dacă relaţiile din enunţ nu se transformă, se începe reprezentarea gra-fică cu **I** şi, apoi, pe baza divizării acestui segment în **2**, **4** şi, respectiv, **8** părţi egale, se figurează şi celelalte cantităţi. Din desen, rezultă că putem organiza cantitatea de **2 250** litri în **15** părţi, fiecare egală cu cantitatea aflată în al patrulea butoi, căci **1 + 2 + 4 + 8 = 15**.

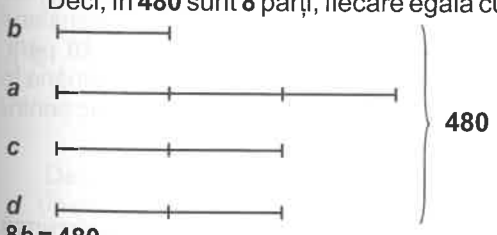
Câţi litri sunt în al patrulea butoi? **2 250 : 15 = 150**. Câţi litri sunt în al treilea butoi? **2×150 = 300**. Dar în al doilea? **2×300 = 600**. Câţi litri sunt în primul butoi? **2×600 = 1 200**.

25. Fie numerele ***a***, ***b***, ***c***, ***d***. Din enunţ, rezultă: ***a* + *b* + *c* + *d* = 480** şi ***a* = 3*b***.

Pentru reprezentarea lui ***c***, pe baza relaţiei ***c* = (*a* + *b*) : 2** şi ştiind că ***a* = 3*b***, trebuie să determinăm numărul de părţi la fel de mari din ***a* + *b***; dacă ***b*** constituie o parte, ***a*** constituie **3** asemenea părţi, iar suma lor, **4** asemenea părţi; media aritmetică a lui ***a*** şi ***b*** va constitui **2** părţi, deoarece **4** părţi: **2** = **2** părţi. Deci, ***c*** are **2** părţi, fiecare egală cu ***b***.

Dacă ***d* = (*a* + *b* + *c*) : 3**, rezultă că ***d*** are tot **2** asemenea părţi, deoarece **6** părţi: **3** = **2** părţi, adică ***d* = 2*b***.

Deci, în **480** sunt **8** părţi, fiecare egală cu ***b***, ca în desenul:



8*b* = 480.

Rezultă ***b* = 480 : 8 = 60**; ***a* = 3×60 = 180**; ***c* = 2×60 = 120**; ***d* = 2×60 = 120.**

Verificare: **60 + 180 + 120 + 120 = 480**; ***c* = (60 + 180) : 2 = 120**; ***d* = (60 + 180 + 120) : 3 = 120**; ***a* : *b* = 180 : 60 = 3**.

26. Este o *problemă de mişcare*, care solicită un raționament specific pentru problemele de sumă şi raport. Deci viteza la dus este de **6** m/secundă, iar la întoarcere este de **3** m/secundă. Distanța de la alun la vizuină se poate determina potrivit formulei: $d = v_1 \times t_1$ sau $d = v_2 \times t_2$. Dacă $v_1 = 6$ m/s, iar $v_2 = 3$ m/s, cum se pot determina t_1 sau t_2? Observăm că v_1 este mai mare decât v_2 de **2** ori, pentru că **6 : 3 = 2**. Rezultă că timpul la dus este mai mic decât timpul necesar întoarcerii de **2** ori, deoarece distanța este aceeaşi.

Rezolvarea 1

De obicei, în asemenea probleme se apelează la metoda algebrică:

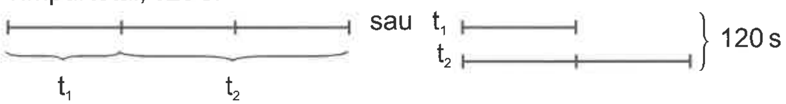
Dacă $t_2 = 2t_1$, iar $t_1 + t_2 = 120$ s, prin înlocuirea lui t_2 cu $2t_1$ în sumă, obținem: $t_1 + 2t_1 = 120$ s $\Leftrightarrow 3t_1 = 120$ s $\Leftrightarrow t_1 = 120 : 3 = 40$ (secunde).

Rezolvarea 2

Pentru elevii mici, se poate apela şi la metoda grafică.

Pentru reprezentarea grafică este necesar să se observe că timpul total (suma) de **120** de s trebuie împărțit în **3** părți, fiecare egală cu timpul necesar la dus:

Timpul total, **120** s:



Timpul necesar parcurgerii distanței la dus constituie o parte din cele **3** părți. În câte secunde parcurge veverița distanța de la vizuină la alun? **120 : 3 = 40** (s). Sau: În câte secunde parcurge veverița distanța la întoarcere? **120 : 3** × **2 = 80** (s). Care este distanța de la alun la vizuină? **6** × **40 = 240** (m) sau **3** × **80 = 240** (m).

Rezolvarea 3

La dus, în timp de o secundă, veverița parcurge **6** m. La întoarcere, aceeaşi distanță este parcursă în **2** secunde, căci **2** × **3 = 6** (m). Cei **12**, adică **6** m la dus şi **6** m la întoarcere, sunt parcurşi în **3** secunde, deoarece **1 + 2 = 3** (s). Câți m parcurge veverița într-o secundă? **12 : 3 = 4** (m), din care **2** m la dus şi **2** m la întoarcere. Câți m parcurge veverița în **120** s? **120** × **4 = 480** (m). Care este distanța de la vizuină la alun? **480 : 2 = 240** (m).

27. Rezolvarea 1

a) Dacă transferul are loc din al doilea în primul, atunci în acesta din urmă va fi o cantitate de **9** ori mai mare decât ceea ce rămâne în al doilea. În cei doi saci vor fi la un loc o sută de kg, deoarece **46 + 54 = 100**. După transferul preconizat, putem privi suma de **100** kg ca fiind organizată în **10** părți, fiecare egală cu cantitatea ce rămâne în al doilea sac. Câte kg ar rămâne în al doilea sac? **100 : 10 = 10**. Câte kg trebuie să luăm din al doilea sac pentru a rămâne **10** kg? adică **54 – ? = 10**.

Răspuns: **54 – 10 = 44** (kg).

(În primul sac ar fi **90** kg, căci **46 + (54 – 10) = 90**, iar **90 : 10 = 9**).

b) Dacă transferul ar avea loc din primul sac în al doilea, în acesta din urmă ar fi **90** de kg, iar în primul ar rămâne **10** kg.

Dar câte kg s-ar transfera? Adică **46 – ? = 10** sau **54 + ? = 90**.

Trebuie să se transfere din primul în al doilea sac **36** de kg, deoarece **46 – 10 = 36** sau **90 – 54 = 36**.

Rezolvarea 2

a) Fie x cantitatea care se transferă din al doilea în primul sac.

Rezultă: $(46+x):(54-x)=9 \Leftrightarrow 46+x=9(54-x) \Leftrightarrow 46+x=486-9x$.

Scădem din fiecare membru al egalităţii cel mai mic grup de necunoscute, adică x, obţinând: $46=486-10x$, de unde $10x=440$, iar $x=440:10=44$.

b) Pentru transferul în sens invers (din primul în al doilea):

$(54+x):(46-x)=9 \Leftrightarrow 10x=360$, de unde $x=360:10=36$.

28. Rezolvarea 1

Dacă ar avea loc transferul, suma totală nu se modifică, dar ar putea fi organizată în **3** părţi, fiecare egală cu suma pe care ar avea-o al doilea copil, după ce ar primi o sumă ce ar reprezenta o şesime din suma primului, deoarece primul ar avea de **2** ori mai mult decât ar avea al doilea (reformularea relaţiei: $\mathrm{II}=\frac{1}{2}\,\mathrm{I}$). Deci, suma de **120** lei ar cuprinde **3** asemenea părţi.

Câţi lei ar avea al doilea elev (după ce ar mai primi o sumă)? $210:3=70$.

Câţi lei avea primul (după ce ar mai da o sumă)? $2\times 70=140$.

Dar, pentru a putea da o şesime din suma sa, primul elev şi-a organizat-o în şesimi. Câte şesimi i-au mai rămas? **6** şesimi – **1** şesime = **5** şesimi. Atunci, **5** şesimi (adică suma care ar rămâne primului elev) reprezintă **140** lei.

Iniţial, el a avut **168** lei, deoarece $140:5\times 6=168$.

Al doilea a avut **42** de lei, pentru că $210-168=42$.

Rezolvarea 2

$a+b=210$ şi $a-\frac{1}{6}a=2(b+\frac{1}{6}a)$.

Ultima relaţie este echivalentă cu: $\frac{5}{6}a=2b+\frac{2}{6}a$.

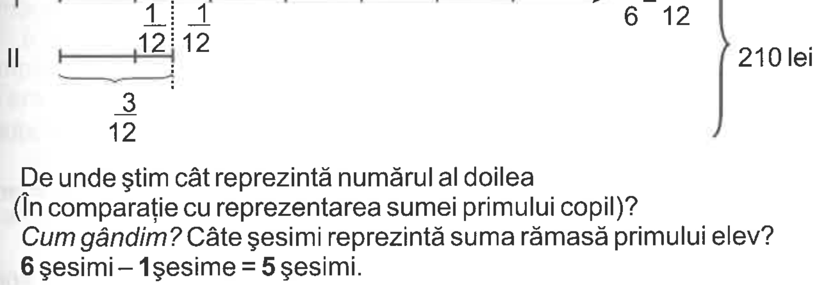
Scăzând din fiecare membru al egalităţii $\frac{2}{6}a$, rezultă: $\frac{1}{2}a=2b$, adică $a=4b$.

Dacă $a+b=210$, atunci $4b+b=210$, iar $b=210:5=42$; $a=168$ (lei).

Rezolvarea 3

Pentru ca transferul să fie posibil, trebuie ca suma primului copil să fie organizată în şesimi (ca să luăm o şesime).

Grafic:



De unde ştim cât reprezintă numărul al doilea

(În comparaţie cu reprezentarea sumei primului copil)?

Cum gândim? Câte şesimi reprezintă suma rămasă primului elev?

6 şesimi – **1** şesime = **5** şesimi.

Care este jumătatea la **5** şesimi?

5 şesimi **: 2 = 2** şesimi şi jumătate de sesime, adică $\frac{5}{12}$.

Câte asemenea unităţi fracţionare reprezintă suma pe care o avea al doilea copil? Sau $\frac{1}{6} + ? = \frac{5}{12}$.

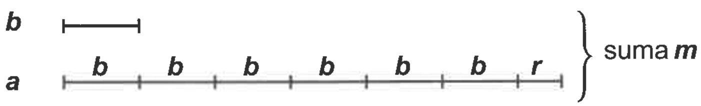
Rezultă că suma pe care o avea al doilea copil reprezintă $\frac{3}{12}$, pentru că $\frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12}$.

În total sunt **15** asemenea unităţi fracţionare.
Rezultă că **15** părţi la fel de mari reprezintă **210** lei.
Atunci, o singură parte va fi reprezentată de **14** lei, căci **210 : 15 = 14**.
Primul elev avea **168** lei, adică $\mathbf{12 \times 14 = 168}$, iar al doilea avea **42** de lei, pentru că $\mathbf{3 \times 14 = 42}$.
Răspuns: **I = 168** lei; **II = 42** de lei.

29. Date fiind relaţiile dintre vitezele medii, rezultă că, în aceeaşi unitate de timp (o oră), distanţele parcurse sunt mai mari sau mai mici, în funcţie de vitezele medii; dacă viteza autobuzului este de **4** ori mai mare decât a bicicletei, rezultă că într-o oră autobuzul parcurge o distanţă de **4** ori mai mare decât bicicleta.
Rezultă desenul:

În **80** km sunt **16** distanţe, fiecare egală cu cea parcursă pe jos.
Câţi km a parcurs pe jos? **80 : 16 = 5**.
Dar cu bicicleta? $\mathbf{3 \times 5 = 15}$.
Dar cu autobuzul? $\mathbf{4 \times 15 = 60}$ sau $\mathbf{12 \times 5 = 60}$.
Dacă cei **60** de km sunt parcurşi într -o oră, aceasta este viteza lui.

30. Deci $a = 6b + r$ şi $a + b = m$. Grafic raportul dintre a şi b este:



Dacă din suma m scădem pe r, obţinem $7b$, adică $m - r = 7b$; atunci $b = (m - r) : 7$.
Algebric: înlocuind pe a în a doua relaţie, obţinem: $6b + r + b = m \Leftrightarrow \Leftrightarrow 7b = m - r \Leftrightarrow (m - r) : 7 = b$.

31. Pentru a se obţine **2** pătrate, lungimea se împarte în **2** părţi fiecare egală cu lăţimea, care ar fi şi latura pătratului. Rezultă că lungimea este de **2** ori mai mare decât lățimea. În perimetru sunt **6** părți egale (lățimi).

Care este lățimea? **150 : 6 = 25**. Care este lungimea? **2×25 = 50**.

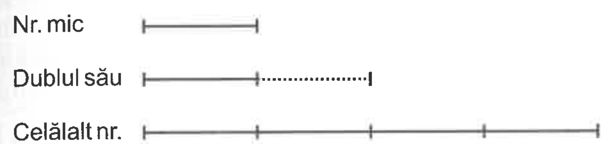
(Se poate lucra şi cu semiperimetrul).

32. În **27** de metri pătrați sunt **3** arii, fiecare egală cu aria parcelei mici. Cât este aria parcelei mici? **27 : 3 = 9**. Dar a celei de-a doua? **2×9 = 18** sau **27 – 9 = 18**. Deoarece aria primei parcele este de **9** m pătrați, iar dimensiunile sunt exprimate în numere naturale, rezultă că latura este **3** m. Aceasta este şi lățimea dreptunghiului.

Care este lungimea acestuia? **18 : 3 = 6**.

Care este perimetrul sau lungi-mea gardului care înconjoară parcela? Este de **18** metri, căci **2×6 + 2×3 = 18**.

33. Dacă primul este mai mare decât dublul celuilalt de **2** ori, înseamnă că al doilea constituie o parte, iar celălalt **4** părți. În sumă sunt **5** părți, fiecare egală cu numărul mai mic. Care este numărul mai mic? **170 : 5 = 34**. Dar celălalt? **4×34 = 136**. Grafic:



34. <u>Rezolvarea 1</u>

Cum gândim pentru a reprezenta grafic cele trei numere? Dacă am reprezenta numărul timbrelor lui Dinu printr-un segment, pentru reprezentarea numărului de timbre pe care le are Camelia, am desena un segment cât $\frac{2}{5}$ din primul. Deci primul segment ar avea **5** părți (cincimi), iar al doilea, **2** asemenea părți. Dar numărul timbrelor pe care le are Irina este de **3** ori mai mic decât numărul de timbre pe care le are Camelia, adică o treime din **2** părți. Cum putem reprezenta grafic acest număr?

Avem două variante de lucru:

a) Împărțim fiecare din cele două părți ce reprezintă numărul de timbre pe care le are Camelia în *câte* **3** părți (mai mici), numărul de timbre pe care le are Irina va fi reprezentat de două asemenea părți, căci **6 : 3 = 2**, iar numărul timbrelor lui Dinu cât **15** asemenea părți, deoarece **5×3 = 15**;

b) reprezentăm direct numărul de timbre pe care le are Camelia printr-un număr de părți multiplu de **2** şi de **3**, adică **6** părți; numărul de timbre pe care le are Irina prin **2** asemenea părți, iar celălalt număr prin **15** asemenea părți, deoarece **6** părți reprezintă **2** cincimi din **15** părți.

Deci numărul de timbre pe care le are:

Câte părți, fiecare egală cu jumătate din numărul timbrelor pe care le are Irina, sunt în total? $6+2+5\times3=23$ (părți).

Care număr cuprins între **91** şi **95** se împarte exact la **23**? Este numărul **92**, căci $92:23=4$ (timbre), care reprezintă o parte. Câte timbre are Irina? $2\times4=8$ (timbre).

Câte timbre are Camelia? $6\times4=24$ (timbre) sau $3\times8=24$ (timbre).

Câte timbre are Dinu? $15\times4=60$ (timbre) sau $24:2\times5=60$(timbre).

Rezolvarea 2

Fie a numărul de timbre pe care le are Irina. Atunci, numărul de timbre pe care le are Camelia va fi $3a$, iar numărul timbrelor lui Dinu va fi $\frac{5}{2}\times3a$. Din enunț rezultă: $91<a+3a+\frac{15}{2}a<95 \Leftrightarrow 182<23a<190 \Leftrightarrow 7{,}9<a<8{,}2$. Dar $a\in N$, deci $a=8$, iar $3a=3\times8=24$; $\frac{5}{2}\times3a=60$.

35. Rezolvarea 1

Dacă numărul caietelor de matematică era de **3** ori mai mare decât al celor de dictando şi de **4** ori mai mare decât al celor de biologie, rezultă că numărul caietelor de matematică se împarte exact (este divizibil cu) la **4** şi **3**.

Care este cel mai mic număr natural divizibil cu **4** şi cu **3**? Este numărul **12**.

Dacă Tiberiu ar fi cumpărat **12** caiete de matematică, înseamnă că ar fi cumpărat **4** caiete de dictando, căci $12:3=4$ şi **3** caiete de biologie, deoarece $12:4=3$.

În total ar fi cumpărat **19** caiete, cel mai mic număr natural care îndeplineşte condițiile din enunț. Deci numărul total de caiete nu putea fi strict mai mic decât **19**, ci egal sau mai mare decât **19**.

Pentru *reprezentarea grafică*, este necesar să se observe că numărul de părți care ar reprezenta numărul caietelor de matematică trebuie să fie multiplu de **3** şi de **4**, adică **12** părți (cel mai mic număr).

Rezolvarea 2

Presupunem că numărul total de caiete cumpărate de Tiberiu era strict mai mic decât **19**. Notând cu a numărul caietelor de biologie (deci $a\in N$), atunci cel al caietelor de matematică va fi $3a$, iar al celor de dictando $\frac{3a}{4}$. *Rezultă:*

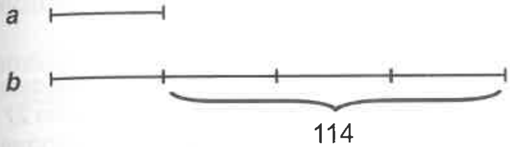
$a+3a+\frac{3a}{4}<19 \Leftrightarrow (4a+12a+3a):4<19 \Leftrightarrow 19a:4<19 \Leftrightarrow 19a<76$. Rezultă că $a\in\{1, 2, 3\}$, însă $\frac{3a}{4}\notin N$. Ar trebui ca a să fie multiplu de **4**, dar atunci $a+3a+\frac{3a}{4}\geq19$.

CAPITOLUL AL IV-LEA

Probleme de diferență și raport. Rezolvări

1. Rezolvarea 1

Fie ***a*** și ***b*** primul și, respectiv, al doilea număr. Cele două valori se pot reprezenta grafic astfel:



Din desen rezultă că primul număr este mai mare cu **114**, adică cu **3** părți, fiecare parte egală cu al doilea număr.

De aceea putem privi diferența de **114** ca fiind organizată în **3** asemenea părți (**3*b***). Cât este ***b***? **114 : 3 = 38**. Cât este ***a***? **4 × 38 = 152**.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*:

Presupunem că ***b*** este **1**, atunci, pentru a se respecta raportul dat, ***a*** ar fi egal cu **4**, căci **4 × 1 = 4**, dar diferența ar fi **3**, pentru că **4 – 1 = 3**. Diferența reală este **114**.

De câte ori este mai mare diferența dată față de cea presupusă de noi? **114 : 3 = 38**. Rezultă că fiecare număr presupus de noi trebuie mărit de **38** de ori. Deci ***b* = 38**, căci **38 × 1 = 38**, iar ***a* = 152**, pentru că **38 × 4 = 152**.

Rezolvarea 3. *Prin proporții derivate*

Fie ***a*** și ***b*** cele două numere, iar ***m*** și ***n*** numărul de părți corespunzătoare lui ***a*** și, respectiv, lui ***b***; se poate scrie proporția: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Prin derivare, se obține: $\frac{(a-b)}{b} = \frac{(m-n)}{n}$.

În cazul dat, obținem: $\frac{114}{b} = \frac{4-1}{1}$, de unde ***b* = 114 : 3 = 38**; ***a* = 38 + 114 = 152**.

Rezolvarea 4. *Generalizare*

Dacă privim atent proporția de mai sus, obținută prin derivare, se poate generaliza:

"Numărul mai mic, în asemenea probleme, este egal cu câtul dintre diferența numerelor și diferența părților".

Păstrând notațiile anterioare, rezultă *formula*: ***b* = (*a* – *b*) : (*m* – *n*) × *n***.

În particular: **114 : (4 – 1) = 38**, deci ***b* = 38**; ***a* = 152**.

Rezolvarea 5

Păstrând notațiile de mai sus, se pot scrie egalitățile: **(*a* – *b*) = 114** și ***a* = 4*b***. Prin substituția lui ***a*** în prima egalitate, se obține: **4*b* – *b* = 114** ⇔ ⇔ **3*b* = 114** ⇔ ***b* = 38**; ***a* = 4 × 38 = 152**.

Verificare: **152 – 38 = 114**; **152 : 38 = 4**.

2. (Diferența trebuie calculată)

Observație: În asemenea probleme, *diferența între mărimi se păstrează*, numai *raportul se micșorează*, dacă la fiecare mărime se adaugă *același* număr, iar dacă din fiecare mărime se ia *același* număr, raportul se mărește.

Rezolvarea 1. *Grafic*

Deci, după ce se mai toarnă apă, diferența va fi ca şi cea actuală, adică **35 – 8 = 27**, dar raportul va fi **2**.

Grafic, raportul dintre cantități va fi:

Se observă că în primul vas vor fi două părți, fiecare egală cu cea care va fi în al doilea vas. Partea care este în plus în primul vas va reprezenta **27** litri (diferența se păstrează). Deci în al doilea vas vor fi **27** litri, iar în primul de două ori mai mult, adică **2 × 27 = 54**.

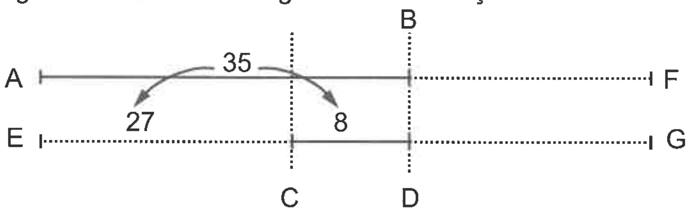
Câți litri se mai toarnă în al doilea vas pentru a conține **27**? **8 + ? = 27**, rezultă **27 – 8 = 19**. (Câți litri se toarnă în primul vas pentru a conține **54** litri? **35 + ? = 54**, rezultă **54 – 35 = 19**.)

În cât timp se toarnă cei **19** litri? Dacă într-un minut se toarnă câte **1** litru, **19** litri se vor turna în atâtea minute de câte ori **1** se cuprinde în **19**, adică **19 : 1 = 19**.

Răspuns: **19** minute.

Rezolvarea 2. (*Tot grafic*)

Reprezentăm prin segmentul AB cantitatea din primul vas şi prin segmentul CD cantitatea din al doilea vas. Desenăm astfel CD pentru a arăta că segmentele care se adaugă sunt de aceeaşi mărime:



Trebuie să prelungim ambele segmente (AB şi CD) cu două segmente egale (BF şi DG), astfel ca AF să fie dublul lui CG, ceea ce înseamnă că EC trebuie să fie egală cu GC. Dar EC reprezintă **27** de litri, deci CG reprezintă tot **27**. Cum CD reprezintă **8** litri, DG va reprezenta **19** litri, căci **27 – 8 = 19**. Deci peste **19** minute (în fiecare minut se toarnă în fiecare vas câte **1** litru) primul vas va conține o cantitate de **2** ori mai mare decât cea din vasul al doilea.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Important este să aflăm ce cantitate va fi în fiecare vas atunci când valoarea raportului va fi **2**. Dacă am presupune că în al doilea vas este **1** litru, atunci în primul ar fi de **2** ori mai mult, adică **2 × 1 = 2**, dar diferența ar fi **1**, căci **2 – 1 = 1**. De fapt, *diferența este şi va fi* de **27** (de litri), căci **35 – 8 = 27**.

De câte ori este mai mare diferența reală decât cea din ipoteza noastră? De atâtea ori de câte ori **1** se cuprinde în **27**, adică **27 : 1 = 27**. Rezultă că fiecare număr presupus de noi trebuie mărit de **27** de ori, pentru a obține cantitățile reale. Deci, în al doilea vas vor fi **27** de litri, pentru că **27 × 1 = 27**, iar în primul vas vor fi **54** de litri, deoarece **27 × 2 = 54**.

Peste câte minute vor fi în al doilea vas **27** de litri? (Peste câte minute vor fi în primul vas **54** de litri?), adică **8 + ? = 27** sau **35 + ? = 54**. Peste **19** minute, căci **27 – 8 = 19** sau **54 – 35 = 19**, iar în fiecare minut se toarnă câte **1** litru.

Rezolvarea 4. *Prin particularizarea formulei* (din rezolvarea **4** a problemei **1.**)

Dacă notăm cu b numărul de litri din b, rezultă: $b = (a - b) : (m - n) \times n$, adică $b = (35 - 8) : (2 - 1) = 27$. Dar **8 + ? = 27**. Deci peste **19** minute se va realiza raportul $\frac{2}{1}$ între cantități, deoarece **27 – 8 = 19**, iar în fiecare minut se toarnă câte **1** litru.

Rezolvarea 5. *Prin proporții derivate*

Fie raportul $\frac{a}{b}$ între cantitățile finale. Se poate scrie proporția: $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$.

Prin derivare, se obține: $\frac{(a-b)}{b} = \frac{2-1}{1}$. Rezultă $b = 27 : (2-1) = 27$.

Peste câte minute în al doilea vas vor fi **27** de litri? sau **8 + ? = 27**.

Răspuns: **19** minute.

Rezolvarea 6

Fie x cantitatea care se toarnă în fiecare vas. Se poate scrie egalitatea: $(8 + x) \times 2 = 35 + x$. Scăzând x din fiecare membru al egalității, rezultă: $16 + x = 35$, adică $x = 35 - 16 = 19$.

19 litri se vor turna în **19** minute, căci **19 : 1 = 19**.

3. Rezolvarea 1. *Grafic*

Diferența de vârstă de **42** de ani, adică **53 – 11 = 42,** era *aceeași* și atunci când raportul vârstelor era $\frac{7}{1}$. Luând ca unitate vârsta băiatului, grafic raportul dintre vârste era:

Cu câte părți, fiecare egală cu vârsta fiului de atunci, erau mai multe în vârsta tatălui? **7 – 1 = 6**. Care este diferența dintre vârste? **53 – 11 = 42**.

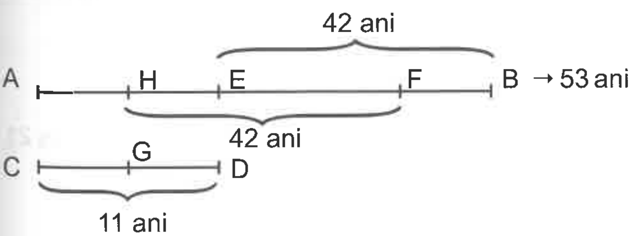
Deci, **6** părți, fiecare egală cu vârsta de atunci a băiatului, reprezintă **42** de ani. Câți ani avea băiatul? **42 : 6 = 7**. (Câți ani avea tatăl? $7 \times 7 = 49$.)

Cu câți ani în urmă băiatul avea **11** ani? Adică **11 – ? = 7**. (Cu câți ani în urmă tatăl avea **53** de ani? Adică **53 – ? = 49**.) **11 – 7 = 4** (sau **53 – 49 = 4**).

Răspuns: Cu **4** ani în urmă.

Rezolvarea 2. *Tot grafic*

Reprezentăm prin segmentul AB vârsta tatălui și prin segmentul CD vârsta fiului:



Diferența de vârstă dintre cei doi este reprezentată prin segmentul EB, care constituie **42** de ani, adică **53 – 11 = 42**. Trebuie să micșorăm ambele segmente cu câte un segment, adică FB și, respectiv, GD, egale între ele. În acest fel, AF este de **7** ori mai mare decât CG, diferența dintre ele (care rămâne tot de **42** de ani) este HF. Dacă AF este de **7** ori mai mare decât DG și CG = AH, rezultă că în HF sunt **6** părți, fiecare egală cu CG care reprezintă **7** ani, pentru că **42 : 6 = 7**, tocmai vârsta băiatului.

Cu câți ani în urmă băiatul avea **7** ani? **11 – ? = 7, 11 – 7 = 4**.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Important este să aflăm ce vârstă avea fiecare când raportul dintre acestea era $\frac{7}{1}$. Dacă am presupune că băiatul avea **1** an, atunci, pentru a se respecta raportul, tatăl avea de **7** ori mai mult, adică $\mathbf{7 \times 1 = 7}$, dar diferența dintre vârste ar fi fost de **6** ani, căci **7 – 1 = 6**.

De fapt, diferența reală este de **42** de ani, adică **53 – 11 = 42**. De câte ori este mai mare această diferență față de diferența presupusă de noi?
42 : 6 = 7.

Rezultă că fiecare vârstă din ipoteza noastră trebuie mărită de **7** ori.

Deci băiatul avea atunci **7** ani, deoarece $\mathbf{7 \times 1 = 7}$, iar tatăl avea **49** de ani, căci $\mathbf{7 \times 7 = 49}$. Cu câți ani în urmă băiatul avea **7** ani (sau tatăl avea **49** de ani)? **11 – 7 = 4**.

Rezolvarea 4. *Prin particularizarea formulei*

Fie ***b*** vârsta băiatului când raportul era $\frac{7}{1}$; aplicăm formula (a se vedea rezolvarea **4** de la problema **1.**): $\boldsymbol{b = (53 - 11) : (7 - 1) = 42 : 6 = 7}$.

Cu câți ani în urmă băiatul avea **7** ani? **11 – 7 = 4**.

Rezolvarea 5. *Algebric*

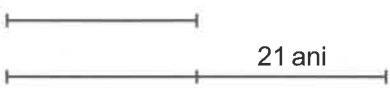
Fie ***x*** numărul anilor care au trecut din momentul în care raportul vârstelor era $\frac{7}{1}$; atunci: $\boldsymbol{53 - x = 7(11 - x)}$, adică $\boldsymbol{53 - x = 77 - 7x \,/ + x \Leftrightarrow 53 = 77 - 6x}$, de unde $\boldsymbol{x = (77 - 53) : 6 = 4}$.

4. Rezolvarea 1. *Grafic*

Diferența dintre vârste va fi aceeași și când raportul se modifică. Grafic, peste **9** ani, raportul va fi:

Vârsta fiicei

Vârsta mamei



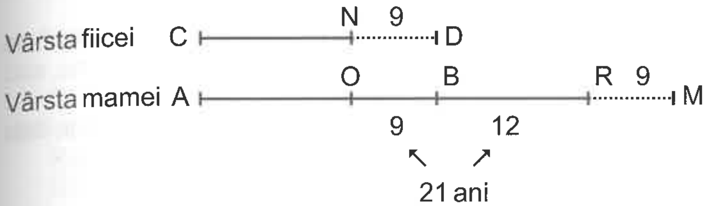
Cu câte părți, fiecare egală cu vârsta pe care o avea fata, vor fi mai multe în vârsta mamei? **2 – 1 = 1**. Câți ani va avea fata? O parte = **21** de ani. Câți ani va avea mama? $\mathbf{2 \times 21 = 42}$ sau **21 + 21 = 42**.

Câți ani are acum fata? **21 – 9 = 12**.

Câți ani are acum mama? **42 – 9 = 33** sau **12 + 21 = 33**.

Rezolvarea 2. *Tot grafic*

Înainte de a reprezenta grafic vârstele, descompunem diferența de **21** de ani în două numere, dintre care unul să fie **9** (cât se adună la fiecare vârstă): **21 = 9 + 12**.



Deci CD = AB şi, din enunţ, AB = BM sau AM = 2CD; dar RM = ND = OB = **9** şi BR = **12**. Rezultă că AO sau CN = **12** (vârsta fetei), iar AR = **12 + 9 + 12 = 33** (vârsta mamei).

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Presupunem că, atunci când raportul vârstelor va fi $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}$, fata va avea **1** an; atunci mama ar avea **2** ani, iar diferenţa ar fi **1** an, de **21** de ori mai mică decât diferenţa reală, căci **21 : 1 = 21**. Rezultă că fata va avea de **21** de ori mai mult decât în ipoteza noastră, adică **21** × **1 = 21**, iar mama: **21** × **2 = 42**. În prezent, fata are **12** ani, adică **21 – 9 = 12**, iar mama **33** de ani.

Rezolvarea 4. *Prin particularizarea formulei*

(A se vedea şi rezolvarea **4** de la problema **1.**)

Fie ***f*** vârsta fetei peste **9** ani. Atunci: ***f*** **= 21 : (2 – 1) = 21.** Peste câţi ani fata va avea **21** de ani? Peste **9** ani. Câţi ani are acum? **21 – 9 = 12.** Câţi ani are mama? **12 + 21 = 33** (ani?).

Rezolvarea 5

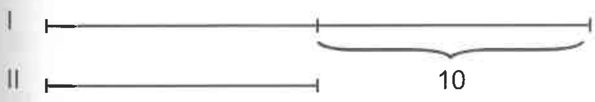
Notând cu ***y*** vârsta actuală a fetei, se poate scrie egalitatea:
2(*y* + 9) = *y* + 21 + 9, de unde **2*y* + 18 = *y* + 30**, iar ***y* = 12**.
Care este vârsta mamei? **12 + 21=33**.

5. (Raport după transfer)

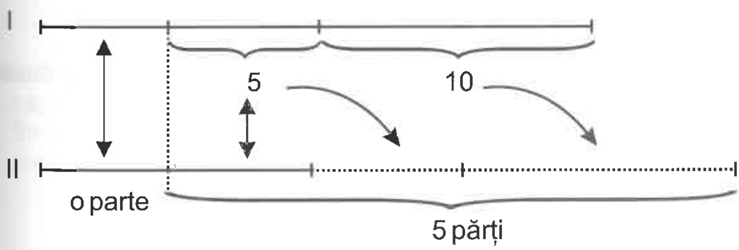
Rezolvarea 1. *Grafic, pe etape*:

Notăm cu **I** numărul bomboanelor din prima pungă şi cu **II**, numărul bomboanelor din a doua pungă. Putem reprezenta grafic astfel:

Etapa a:



Etapa b: Transfer **15** din prima în a doua, adică **10** şi încă **5**



Etapa c: Figurăm ceea ce rămâne în **I** (până la primul punct).

Din enunț, rezultă că restul din **I** se cuprinde în **II** (modificat) de două ori. Delimităm și în **II** un segment egal (prin linia punctată și perpendiculară) cu ceea ce a rămas în **I**.

Etapa d: Din desen rezultă că **5** părți, fiecare egală cu numărul de bomboane ce vor rămâne în prima pungă, reprezintă **20** de bomboane, căci

5 + 10 + 5 = 20 și **6** părți – **1** parte = **5** părți (Raportul dat este $\frac{6}{1}$; o parte deja este, cea de la început). Câte bomboane ar rămâne în prima pungă?
20 : 5 = 4. Câte bomboane sunt în prima pungă? **4 + 15 = 19**. Câte bomboane sunt în a doua pungă? **19 – 10 = 9**.

Verificare: **(9 + 15) : (19 – 15) = 4; 19 – 9 = 10.**

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

După transferul preconizat, diferența dintre cele două numere ar fi **20**, iar raportul ar fi $\frac{6}{1}$. Presupunem că în prima pungă ar fi rămas o bomboană, atunci în a doua ar fi fost de **6** ori mai mult, adică **6×1 = 6**. Dar diferența este **5**, căci **6 – 1 = 5**. De câte ori este mai mică această diferență față de cea reală, adică față de **20**? De **4** ori, fiindcă **20 : 5 = 4**. Rezultă că trebuie să mărim fiecare mărime din ipoteza noastră de **4** ori. În prima pungă au rămas **4** bomboane, deoarece **4×1 = 4**, iar în a doua vor fi **24**, pentru că **6×4 = 24**. Câte bomboane *sunt* în prima pungă? **4 + 15 = 19**. Dar în a doua? **19 – 10 = 9**.

Rezolvarea 3

Fie y numărul de bomboane din prima pungă și x numărul de bomboane din a doua pungă. Din enunț, rezultă:

$y = x + 10$ și $(x + 15) : (x + 10 - 15) = 6 \Leftrightarrow (x + 15) : (x - 5) = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 15 = 6(x - 5)$.

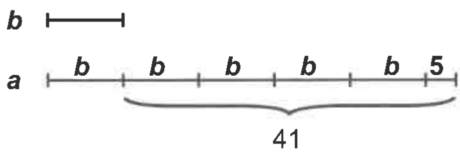
Prin scăderea lui x din ambii membri, se obține:

$15 = 5x - 30 \Leftrightarrow 5x = 45$. Rezultă: $x = 9$; $y = 9 + 10 = 19$.

6. Deoarece restul este **5**, b nu poate fi **5**, pentru că restul trebuie să fie mai mic decât împărțitorul. Atunci, $c = 5$.

Reformularea problemei și scrierea pe scurt: $a = 5b + 5$ și $a - b = 41$.

Rezolvarea 1. *Grafic*:



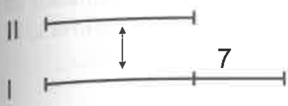
Din desen, rezultă că $4b = 41 - 5 = 36$. Deci, $b = 9$; $a = 5 \times 9 + 5 = 50$.

Rezolvarea 2

Din enunț, rezultă $a = 5b + 5$ și $a - b = 41$. Prin înlocuirea lui a în a doua egalitate, se obține: $5b + 5 - b = 41 \Leftrightarrow 4b = 36 \Leftrightarrow b = 9$; $a = 5 \times 9 + 5 = 50$.

7. Rezolvarea 1. *Grafic*

Notăm cele două numere cu **I** şi, respectiv, cu **II**.



Comparând cele două reprezentări, se observă că **II** se cuprinde în **I** o dată şi mai rămâne un rest, care este tocmai diferența **7**.

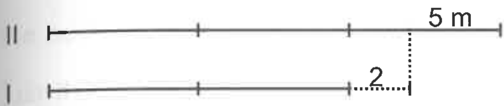
Rezolvarea 2

Dacă $\boldsymbol{a = b + 7}$ şi

$\boldsymbol{a = 1 \times b + r}$, comparând cele două egalități, rezultă $\boldsymbol{r = 7}$.

8. *Grafic*

Din enunț, rezultă că bucata a doua (**II**) poate fi împărțită în **3** părți la fel de mari (treimi). Prima bucată reprezintă **2** treimi din a doua, astfel:



Din desen, rezultă că diferența dintre cele două bucăți este de **7** m, pentru că la aceeaşi lucrare, primei bucăți îi mai trebuie **2** m, iar celeilalte îi mai rămân **5** m; cei **7** m reprezintă o treime din a doua bucată.

Câți metri are a doua bucată? $\boldsymbol{3 \times 7 = 21}$ (m). Dar prima? $\boldsymbol{21 : 3 \times 2 = 14}$ (m) sau $\boldsymbol{21 - 5 - 2 = 14}$ (m).

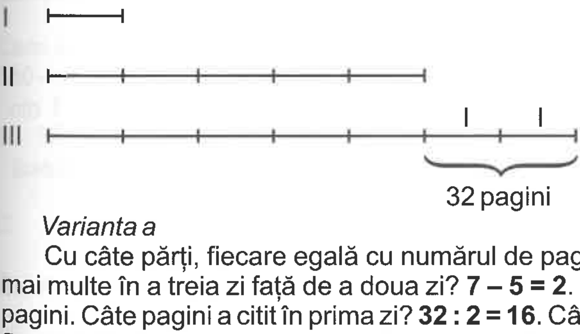
Verificare

Cât reprezintă $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ din **21** m? $\boldsymbol{21 : 3 \times 2 = 14}$. Care este diferența dintre cele două bucăți? $\boldsymbol{21 - 14 = 7}$ (m).

Partea a doua a problemei: Câți metri se folosesc pentru **8** rochii? $\boldsymbol{21 - 5 = 16}$ (m). Câți metri s-au folosit pentru o rochie? $\boldsymbol{16 : 8 = 2}$ (m).

9. *Grafic*

În fiecare dintre cele **3** zile a citit un număr de pagini, care se poate reprezenta astfel:



Varianta a

Cu câte părți, fiecare egală cu numărul de pagini citite în prima zi, sunt mai multe în a treia zi față de a doua zi? $\boldsymbol{7 - 5 = 2}$. Deci **2 I** reprezintă **32** de pagini. Câte pagini a citit în prima zi? $\boldsymbol{32 : 2 = 16}$. Câte pagini a citit a doua zi? $\boldsymbol{5 \times 16 = 80}$. Dar în a treia zi? $\boldsymbol{7 \times 16 = 112}$ sau $\boldsymbol{80 + 2 \times 16 = 112}$. Câte pagini are cartea? $\boldsymbol{16 + 80 + 112 = 208}$ (pagini).

Varianta b

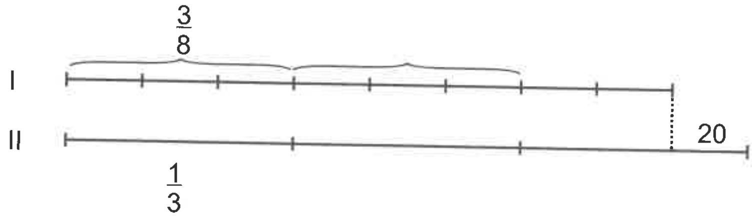
Câte părți, fiecare egală cu numărul de pagini citite în prima zi, sunt în sumă? **1 + 5 + 7 = 13**. Câte pagini reprezintă o parte (a citit în prima zi)? **32 : 2 = 16**. Câte pagini are cartea? **13×16 = 208**.

10. Notăm cu **I** şi cu **II**, primul şi, respectiv, al doilea număr.

Grafic

Ca să lucrăm cu numere mici, transformăm fracția $\frac{2}{6}$.

Prin simplificare, se obține o fracție echivalentă, adică $\frac{1}{3}$.
Deci, la **3** optimi din **I** corespunde o treime din **II**.
Rezultă următoarea reprezentare grafică:



Se observă că numărul al doilea este mai mare. Cu cât? Cu **20**. Dar ce parte din **I** sau din **II** reprezintă numărul **20**?

De aici, sunt două variante:

a) (mai accesibilă pentru elevii clasei a **IV**-a):

Dacă $\frac{1}{3}$ din **II** reprezintă cât $\frac{3}{8}$ din **I**, rezultă că $\frac{3}{3}$ din **II** reprezintă cât $\frac{9}{8}$ din **I**, căci **3** treimi reprezintă mai mult de **3** ori decât o treime (din **II**), iar de **3** ori câte $\frac{3}{8}$ din **I** sunt egale cu $\frac{9}{8}$ **I**.

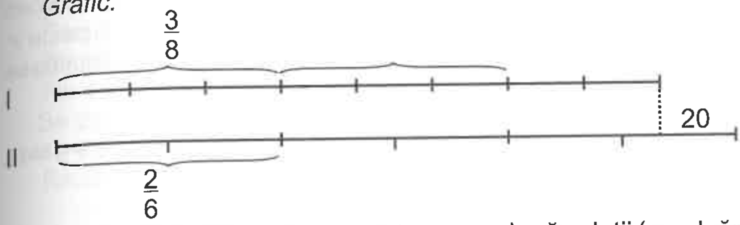
Dar orice întreg are **8** optimi, deci şi **I** are **8** optimi. Ar trebui să mai aibă încă o optime, căci $\frac{9}{8} - \frac{8}{8} = \frac{1}{8}$, ca să reprezinte tot atât cât **II**. Rezultă că **20** reprezintă cât $\frac{1}{8}$ din **I**. Primul număr este **160**, căci **8×20=160**, iar al doilea este **180**, deoarece **160 + 20 = 180**.

b) Dacă $\frac{3}{8}$ din **I** reprezintă cât $\frac{1}{3}$ din **II**, rezultă că $\frac{1}{8}$ din **I** reprezintă cât $\frac{1}{9}$ din **II**, căci $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}$, iar $\frac{8}{8}$ din **I** reprezintă cât $\frac{8}{9}$ din **II**, căci $8 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Rezultă că **20** reprezintă $\frac{1}{9}$ din **II**, deoarece $\frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

Dacă $\frac{1}{9}$ din **II** reprezintă **20**, atunci numărul al doilea este **180**, pentru că **9×20 = 180**, iar primul număr este **160**, deoarece **180 – 20 = 160**.

Rezolvarea 2 (fără a simplifica fracția $\frac{2}{6}$)

Grafic:



Comparând cele două segmente, avem două soluții (rezolvări):

1) se poate lucra ca la rezolvarea **1**, cu **2** variante;

2) aplicând metoda comparației prin reducere.

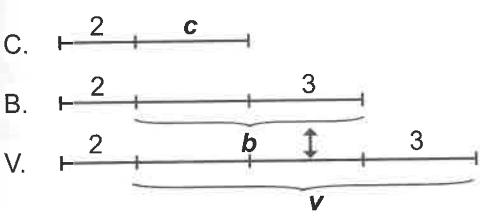
1) lucrând ca la rezolvarea **1**, se ajunge, într-o variantă, la aceeaşi constatare, că $\frac{1}{8}$ din **I** reprezintă cât $\frac{1}{9}$ din **II**; pe baza unei noi reprezentări grafice, se deduce că $\frac{1}{9}$ din **II** reprezintă **20** etc.; în altă variantă, se constată că $\frac{1}{6}$ din **II** reprezintă cât $\frac{3}{16}$ **I**; pe baza unei alte reprezentări grafice, se deduce că $\frac{2}{16}$ din **I** reprezintă **20** etc.

2) aplicând metoda comparației prin reducere: privind partea finală a celor două segmente, se constată că: $\frac{2}{8}$ din **I** plus **20** reprezintă cât $\frac{2}{6}$ din **II**. Pentru a afla câte părți corespund la **8** optimi din primul, trebuie să aflăm câte şesimi din al doilea corespund la o singură optime din primul, adică împărțim ambii termeni ai relației de mai sus prin **2**. Deci: $\frac{2}{8}$ din **I** plus **20** reprezintă cât $\frac{2}{6}$ din **II** ⊂ $\frac{1}{8}$ din **I** plus **10** reprezintă cât $\frac{1}{6}$ din **II**. Înmulțim ambii membri ai relației cu **8** şi obținem: $\frac{8}{8}$ din **I** plus **80** reprezintă cât $\frac{6}{6}$ din **II**.

Scăzând membru cu membru, obținem: **60** reprezintă cât $\frac{2}{6}$ din **II**. Care este al doilea număr? $\mathbf{60 : 2 \times 6 = 180}$. Care este primul număr? $\mathbf{180 - 20 = 160}$.

11. Rezolvarea 1. *Grafic*

Vârstele fiecăruia se pot reprezenta:



(Am notat vârstele actuale ale copiilor cu inițialele mari, iar vârstele cu **2** ani în urmă, prin inițialele mici ale numelui.)

Urmărind enunțul şi încercând să suprapunem segmentul $\boldsymbol{c}$ şi $\boldsymbol{b}$ peste $\boldsymbol{v}$, se constată că, după delimitarea lui $\boldsymbol{b}$ în $\boldsymbol{v}$, mai rămâne, pentru delimitarea lui $\boldsymbol{c}$, doar **3**. Rezultă că $\boldsymbol{c = 3}$.

Deci, cu **2** ani în urmă Cristian avea **3** ani; acum are **5** ani.

Bogdan are **8** ani, adică $\mathbf{2 + 3 + 3 = 8}$, iar Valentin **11** ani, adică $\mathbf{8 + 3 = 11}$ sau $\mathbf{2 + 3 + 3 + 3 = 11}$.

Sau: Dacă $\boldsymbol{b = c + 3}$, $\boldsymbol{v = c + 3 + 3}$, rezultă

$$\boldsymbol{c + c + 3 = c + 3 + 3}$$

Deoarece $\boldsymbol{c = c}$ şi $\mathbf{3 = 3}$, rezultă $\boldsymbol{3 = c}$.

Deci, cu doi ani în urmă, Cristian avea **3** ani; acum are **5** ani;

Valentin are **11** ani, iar Bogdan **8** ani.

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{x}$ vârsta actuală a lui Cristian, atunci:

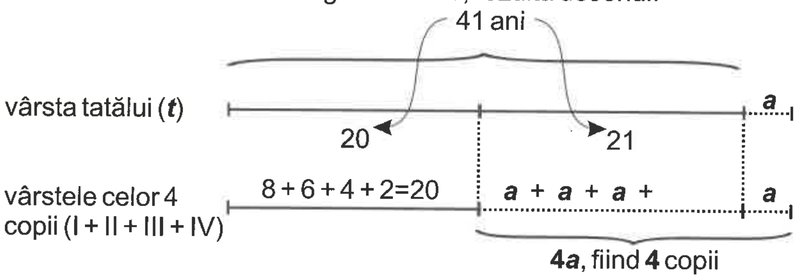
vârsta lui Bogdan: $\boldsymbol{x + 3}$, iar cea a lui Valentin $\boldsymbol{x + 6}$.

Se poate scrie: $\boldsymbol{(x - 2) + (x + 3 - 2) = x + 6 - 2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5}$; $\boldsymbol{x + 3 = 8}$; $\boldsymbol{x + 6 = 11}$.

12. În asemenea probleme trebuie să se țină cont de faptul că numărul de ani care se adaugă la vârsta tatălui, adică la **41**, se adaugă la vârsta *fiecăruia* dintre copii.

Rezolvarea 1. *Grafic*

Fie $\boldsymbol{a}$ nr. de ani care se adaugă la fiecare, rezultă desenul:



Din desen rezultă: $\boldsymbol{41 + a = 8 + 6 + 4 + 2 + a + a + a + a}$

$$\boldsymbol{41 = 20 + 3a \Leftrightarrow a = (41 - 20) : 3 = 7}.$$

Deci, peste **7** ani, tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor.

Verificare:

$\mathbf{41 + 7 = (8 + 7) + (6 + 7) + (4 + 7) + (2 + 7) \Leftrightarrow 48 = 15 + 13 + 11 + 9 \Leftrightarrow 48 = 48}$.

Rezolvarea 2

Care este diferența dintre vârsta actuală a tatălui şi suma vârstelor copiilor? $\mathbf{41 - (8 + 6 + 4 + 2) = 21}$.

Care va fi diferența peste **1** an? $\mathbf{(41 + 1) - (8 + 1 + 6 + 1 + 4 + 1 + 2 + 1) = 42 - 24 = 18}$.

Cu câți ani se micşorează diferența inițială într-un an? $\mathbf{21 - 18 = 3}$.

În câți ani dispare diferența de **21** ani? (Dacă într-un an diferența se micşorează cu **3** ani, în câți ani se va micşora cu **21** de ani?) **21 : 3 = 7**.

Deci, peste **7** ani tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor.

Rezolvarea 3

Fie $\boldsymbol{x}$ perioada de ani care trece pentru fiecare.

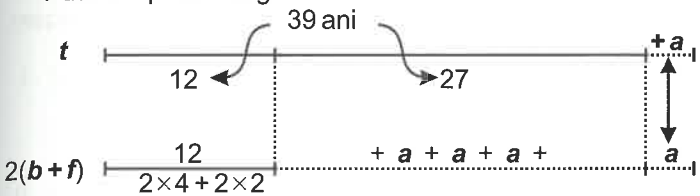
Se poate scrie egalitatea: $\mathbf{41 + x = 8 + x + 6 + x + 4 + x + 2 + x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{41 = 20 + 3x}$.

Rezultă $\mathbf{x = (41 - 20) : 3 = 7}$.

13. Problema este asemănătoare cu cea anterioară, numai că la vârsta fiecăruia dintre copii trebuie să se adauge dublul numărului de ani care se adaugă la vârsta tatălui.

Notăm cu $\boldsymbol{t}$ vârsta tatălui, cu $\boldsymbol{b}$, vârsta băiatului, cu $\boldsymbol{f}$, vârsta fiicei.

Putem reprezenta grafic astfel:



($\boldsymbol{a}$ este perioada de ani care se adaugă la fiecare dintre cei trei). Din desen rezultă:

$\mathbf{39 + a = 2 \times 4 + 2 \times 2 + 4a} \Leftrightarrow \mathbf{39 = 12 + 3a}$, adică $\mathbf{a = (39 - 12) : 3 = 9}$.

Deci, peste **9** ani tatăl va avea dublul sumei vârstelor copiilor.

Verificare: $\mathbf{39 + 9 = 2 \times 4 + 2 \times 2 + 2 \times 9 + 2 \times 9} \Leftrightarrow \mathbf{48 = 48}$.

Rezolvarea 2

Care este diferența actuală dintre vârsta tatălui şi dublul vârstelor copiilor? $\mathbf{39 - 2(4 + 2) = 27}$.

Pentru a se ajunge la raportul dat în enunț, diferența de **27** trebuie să dispară. Care va fi diferența peste un an?

$\mathbf{(39 + 1) - 2(4 + 1 + 2 + 1) = 40 - 16 = 24}$.

Cu cât se micşorează diferența inițială într-un an? **27 – 24 = 3**. Peste câți ani dispare diferența de **27** ani? **27 : 3 = 9**.

Deci, peste **9** ani, tatăl va avea vârsta egală cu dublul sumei vârstelor copiilor.

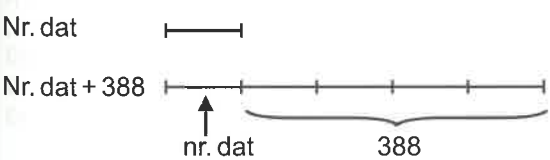
Rezolvarea 3

Fie $\boldsymbol{x}$ numărul de ani care se adaugă la fiecare.

Se poate scrie egalitatea: $\mathbf{39 + x = 2(4 + 2 + x + x)} \Leftrightarrow \mathbf{39 + x = 12 + 4x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{39 = 12 + 3x} \Leftrightarrow \mathbf{x = 9}$.

14. Rezolvarea 1

Grafic:



Se observă că de **4** ori numărul dat este egal cu **388**. Care este numărul dat? **388 : 4 = 97**.

Rezolvarea 2

Fie x numărul căutat. Se poate scrie: $x + 388 = 5x \,/ - x \Leftrightarrow 388 = 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 388 : 4 \Leftrightarrow x = 97$.

15. Rezolvarea 1

Dacă primul număr se obține din al doilea număr prin adăugarea unui zero, rezultă că primul număr este de **10** ori mai mare decât al doilea număr. Cu câte părți, fiecare egală cu numărul al doilea, este mai mare primul număr? **10** părți – **1** parte = **9** părți. Deci, de **9** ori numărul al doilea este egal cu **900**. Care este numărul al doilea? **900 : 9 = 100**. Care este primul număr? $10 \times 100 = 1\,000$.

Rezolvarea 2

Fie x primul numărul și y al doilea număr. Se pot scrie relațiile:
$x - y = 900$ și $x = 10y$. Prin înlocuirea lui x în prima relație, rezultă:
$10y - y = 900$, adică $y = 100$; $x = 1\,000$.

16. (Asemănătoare cu **8.**)

Rezolvarea 1

Raportul $\frac{5}{7}$ trebuie tradus astfel: considerăm suma primită de al doilea un întreg, pe care, spre a-l compara cu suma primită de primul, îl împărțim în **7** părți (șeptimi). Al doilea are o sumă cât **5** părți din primul, adică cu **2** părți mai puțin, ceea ce reprezintă tocmai diferența de **218** lei. Atunci, o parte (o șeptime) reprezintă **109** lei,căci **218 : 2 = 109**. Primul a primit **5** părți, adică **545** lei, deoarece $5 \times 109 = 545$; al doilea a primit **763** lei, adică **7** părți, iar $7 \times 109 = 763$ sau $545 + 218 = 763$.

Rezolvarea 2

Fie x suma primului muncitor, y suma celui de-al doilea. Din enunț, rezultă: $y - x = 218$ și $x = \frac{5}{7}y$. Prima relație devine: $y - \frac{5}{7}y = 218$, adică $\frac{2}{7}y = 218$, iar $y = 218 : 2 \times 7 = 763$; $x = 763 : 7 \times 5 = 545$ sau $x = 763 - 218 = 545$.

17. (Asemănătoare cu **10.**)

Rezolvarea 1

Notăm numărul de pagini din fiecare carte cu **I** și, respectiv, cu **II**.

Pe scurt: O cincime din **I** reprezintă cât o șeptime din **II** plus **17** pagini, dar și: $\frac{5}{5}$ din **I** reprezintă cât $\frac{7}{7}$ din **II**. Pe paza primei relații, deducem că cinci cincimi din **I** reprezintă cât **5** șeptimi din **II** plus 5×16 pagini; dacă **I = II** (pentru că este aceeași carte), rezultă că **2** șeptimi din **II** reprezintă **80** de pagini, pentru că orice întreg are **7** șeptimi. Câte pagini are cartea? $80 : 2 \times 7 = 280$ (pagini). Câte pagini mai are de citit primul copil? $280 - 280 : 5 = 224$ (pagini). Dar al doilea? $280 - 280 : 7 = 240$ (pagini) sau $224 + 16 = 240$ (pagini).

Rezolvarea 2

Din enunț rezultă: $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$ din numărul de pagini ale unei cărți reprezintă **16** pagini.

Câte pagini are cartea? $\mathbf{16:2\times 35=280}$ (pagini).

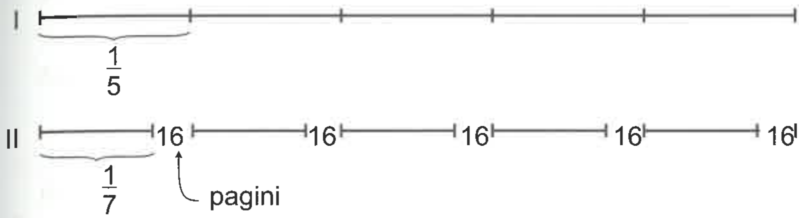
Câte pagini mai are de citit primul copil? $\mathbf{280-280:5=224}$.

Dar al doilea? $\mathbf{224+16=240}$ (pagini).

Rezolvarea 3 (Grafic, acelaşi raționament ca la rezolvarea **1**)

Reprezentăm întregul (numărul de pagini dintr-o carte), printr-un segment pe care îl împărțim în **5** părți la fel de mari.

Pentru al doilea copil, acelaşi întreg va fi reprezentat printr-un segment de aceeaşi mărime, dar împărțit în **7** părți, în aşa fel încât la $\mathbf{\frac{1}{5}}$ din **I** să corespundă $\mathbf{\frac{1}{7}}$ din **II** şi încă **16** pagini, astfel:



Orice întreg are **7** şeptimi. În desen, întregul al doilea este format din **5** şeptimi plus $\mathbf{5\times 16}$ pagini.

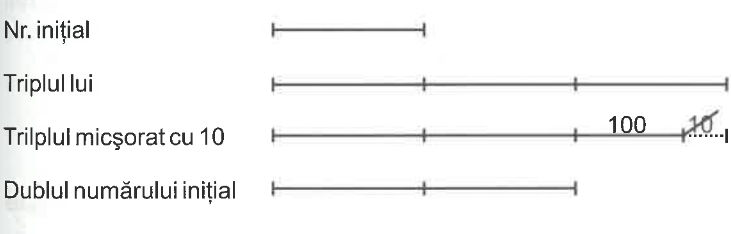
Rezultă că cele **2** şeptimi, care lipsesc, reprezintă **80** de pagini.

Câte pagini are cartea? $\mathbf{80:2\times 7=280}$.

Câte pagini mai are de citit primul copil? $\mathbf{280-280:5=224}$.

Dar al doilea? $\mathbf{280-280:7=240}$ sau $\mathbf{224+16=240}$ (pagini).

18. Pe etape, reprezentarea grafică poate fi:



Din desen, rezultă că o parte (tocmai numărul inițial) reprezintă **110**, căci $\mathbf{10+100=110}$. Deci nr. inițial este **110**.

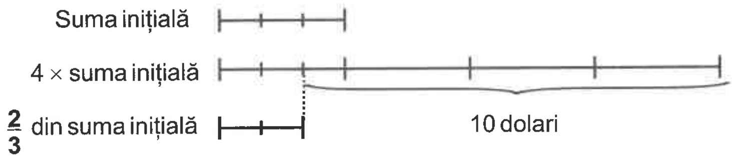
Verificare: $\mathbf{3\times 110-10=2\times 110+100\Leftrightarrow 320=320}$.

Rezolvarea 2

Fie x numărul inițial, triplul său $\mathbf{3x}$, dublul său $\mathbf{2x}$, se poate scrie:

$\mathbf{3x-10=2x+100\Leftrightarrow x-10=100\Leftrightarrow x=110}$.

19. Rezolvarea 1. *Grafic*:



În ultima reprezentare lipseşte o treime din suma inițială.

În a doua reprezentare, se observă că această treime şi încă cele din alte **3** părți, fiecare parte fiind egală cu suma inițială, reprezintă **10** dolari. Câte treimi reprezintă cei **10** dolari? $\mathbf{1+3+3+3=10}$.

Câți dolari reprezintă o treime din sumă? $\mathbf{10 : 10 = 1}$.

Câți dolari am? $\mathbf{3 \times 1 = 3}$.

Răspuns: **3** dolari.

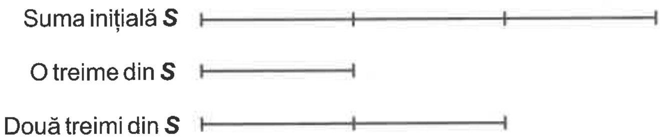
Verificare: $\mathbf{3 \times 4 - 3 : 3 \times 2 = 10}$.

Rezolvarea 2

Fie x suma inițială, se poate scrie: $4x = \frac{2}{3}x + 10 \Leftrightarrow \frac{10}{3}x = 10 \Leftrightarrow x = 3$.

20. Rezolvarea 1. *Grafic*:

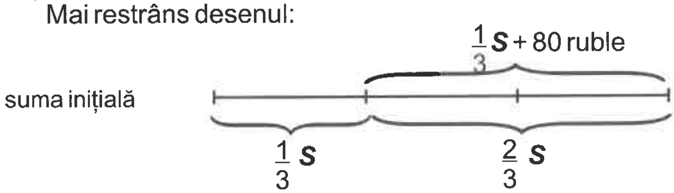
Pe etape, reprezentarea grafică:



Dacă micşorăm ***S*** de **3** ori, rămâne o treime.

Această treime reprezintă cu **80** de ruble mai puțin decât **2** treimi din *S*, adică $\frac{1}{3}S$ + **80** ruble = $\frac{2}{3}S$. Din compararea ultimelor două reprezentări, rezultă că **80** de ruble reprezintă o treime din suma inițială; atunci suma inițială (**3** treimi) este **240** de ruble, pentru că $\mathbf{3 \times 80 = 240}$.

Mai restrâns desenul:



$\frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S + 80$ ruble; rezultă $\frac{1}{3}S$ reprezintă **80** ruble, iar suma inițială este **240** de ruble, căci $\mathbf{3 \times 80 = 240}$ (ruble).

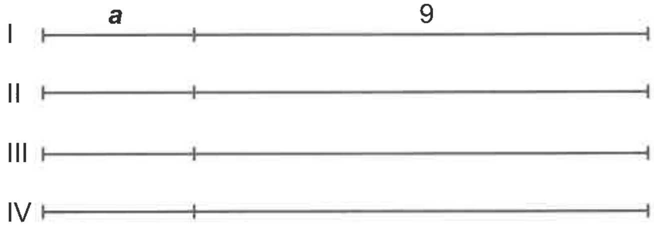
Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie x suma inițială, se poate scrie: $\frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x - 80$. Scăzând din fiecare membru al egalității $\frac{1}{3}x$, se obține o egalitate echivalentă cu: $\frac{1}{3}x = 80$.

Rezultă $x = 240$.

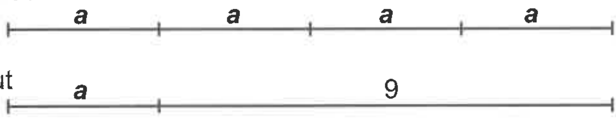
21. Rezolvarea 1

După delimitarea lui **9**, se observă că în fiecare segment inițial rămâne un număr ***a***. În patru segmente vor rămâne **4*a***, astfel:



Cum se poate exprima suma pe care o avea fiecare la început? ***a* + 9** lei. Cât le-a mai rămas în total? **4*a***. Dar (le-a rămas la un loc tot atât cât avuseseră la început). **4*a* = *a* + 9**. Grafic:

Le-a rămas la un loc



Fiecare la început

Prin compararea celor două segmente, se obține:

a* = *a şi ***a* + *a* + *a* = 9**, de unde rezultă că ***a* = 9 : 3**.

Câți lei avusese fiecare la început? **3 + 9 = 12**.

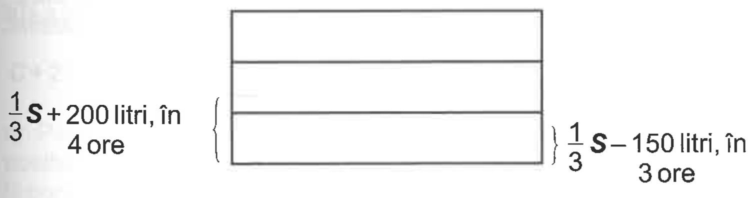
Verificare: **12 = 12×4 – 4×9**, adică **12 = 12**.

Rezolvarea 2

Fie ***y*** suma de bani pe care o avea fiecare la început, totalul ar fi **4y**. Se poate scrie: **4*y* – 4×9 = *y***. Scăzând din fiecare membru al egalității ***y***, se obține o egalitate echivalentă cu **3*y* = 36**, adică ***y* = 12**.

22. Dacă în **3** ore curge apă cât o treime din capacitatea bazinului minus **150** litri şi dacă în **4** ore curge cât o treime din capacitatea bazinului plus **200** litri, rezultă că într-o oră curg în bazin **350** litri, pentru că **150 + 200 = 350**.

Notând cu ***S*** capacitatea bazinului, rezultă reprezentarea grafică:



Dacă într-o oră curg **350** litri, câți litri curg in trei ore? **3×350 = 1 050**.

Dar **1 050** litri nu reprezintă o treime din capacitatea bazinului, ci ar mai trebui **150** litri.

Deci, câți litri reprezintă o treime din capacitatea bazinului?

1 050 + 150 = 1 200.

Care este capacitatea bazinului? **3×1 200 = 3 600** (litri) sau:

(4×350 – 200)×3 = 3 600.

23. Orice împărțire se poate scrie şi cu linie de fracție.

Exemplu: $\mathbf{8 : 4 = \frac{8}{4} = 2}$.

Câtul, număr natural, arată de câte ori împărțitorul este mai mic decât deîmpărțitul, adică **8** este mai mare decât **4** de **2** ori sau în **8** sunt **2** părți, egală fiecare cu **4** unități.

Deci, deîmpărțitul (numărătorul) va cuprinde **2** părți, adică:

$\mathbf{\frac{8}{4}}$ echivalent cu $\frac{\textbf{2 }\textbf{\textit{părți}}}{\textbf{1 }\textbf{\textit{parte}}}$.

În cazul dat, $\mathbf{\frac{1}{3}}$, deîmpărțitul este mai mic decât împărțitorul, pentru că deîmpărțitul constituie o parte, iar împărțitorul **3** părți.

Diferența de părți dintre cele **2** numere este reprezentată de numărul **18**, adică **2** părți reprezintă **18**; o parte (adică deîmpărțitul) este **9**, căci **18 : 2 = 9**, iar **3** părți (împărțitorul) sunt egale cu **27**, deoarece $\mathbf{3 \times 9 = 27}$.

Verificare:

$\mathbf{\frac{9}{27} = \frac{1}{3}}$, iar $\mathbf{27 - 8 = 17}$.

<u>Rezolvarea 2</u>. *Prin falsă ipoteză*

Considerăm că deîmpărțitul este **1**, atunci împărțitorul ar fi **3**, dar diferența ar fi **2**, de **9** ori mai mică față de diferența reală, **18**.

Rezultă că deîmpărțitul este **9**, căci $\mathbf{9 \times 1 = 9}$, iar împărțitorul este **27**, deoarece $\mathbf{9 \times 3 = 27}$.

<u>Rezolvarea 3</u>

Fie numerele ***a*** şi ***b***. Relațiile problemei se pot scrie pe scurt:

$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{1}{3}}$ şi $\boldsymbol{b - a = 18}$. Din prima egalitate, rezultă $\boldsymbol{a = \frac{1}{3}b}$.

Prin înlocuirea lui ***a*** în diferență, se obține: $\boldsymbol{b - \frac{1}{3} \times b = 18 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\, b = 18 \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow b = 18 : 2 \times 3 = 27;\ a = 27 : 3 = 9}$.

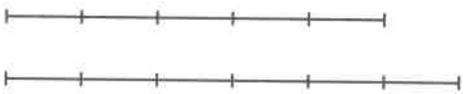
24. <u>Rezolvarea 1</u>

Răsturnatul lui $\mathbf{\overline{ab}}$ este $\mathbf{\overline{ba}}$. Enunțul se poate reformula:

"Numărul $\mathbf{\overline{ab}}$ constituie **5** părți, iar răsturnatul său, **6** asemenea părți." Astfel, am împărțit numărul $\mathbf{\overline{ab}}$ în **5** cincimi, iar răsturnatul său în **6** şesimi, care vor fi echivalente cu **6** cincimi din $\mathbf{\overline{ab}}$, adică:

$\mathbf{\overline{ab}}$

$\mathbf{\overline{ba}}$



$\mathbf{\frac{6}{6}\,\overline{ba} = \frac{6}{5}\,\overline{ab}}$

Din desen rezultă: $\mathbf{\frac{1}{6}\overline{ba} = \frac{1}{5}\overline{ab}}$ şi $\mathbf{\overline{ba} - \overline{ab} = \frac{1}{6}\,\overline{ba} = \frac{1}{5}\,\overline{ab}}$.

Scriind sistematic numerele şi efectuând diferența, se obține:

$\boldsymbol{10b + a - 10a - b = 9(b - a)}$. Dar $\boldsymbol{9(b - a) = \frac{1}{6}\ \overline{ba} \Leftrightarrow \overline{ba} = 6 \times 9 \times (b - a)}$ sau

$\boldsymbol{9(b - a) = \frac{1}{5}\,\overline{ab} \Leftrightarrow \overline{ab} = 5 \times 9 \times (b - a)}$.

Dacă b şi a sunt cifre distincte între ele şi de zero, $b-a \neq 0$.

Dacă $b-a=1$, rezultă $\overline{ba}=6\times9\times1=54$, iar $\overline{ab}=45$, unica soluție, deoarece: dacă admitem $b-a=2$, atunci $2\times54=108$, care este un număr de **3** cifre, iar $2\times45=90$, în care b nu este diferit de **0**.

Deci $b-a \leq 1$ şi $b-a \neq 0$.

Răspuns: $\overline{ab}=45$.

Verificare: $45=\frac{5}{6}\times54 \Leftrightarrow 45=45$.

Rezolvarea 2. (*Pe baza reconstituirii operațiilor*)

Dacă $\overline{ab}=\frac{5}{6}\,\overline{ba}$, rezultă $6\times\overline{ab}=5\times\overline{ba}$.

Produsul $5\times\overline{ba}$ se va termina în zero sau în **5**. Dar nici un produs al lui **6** nu se termină în **5**, deci $6\times\overline{ab}$ se va termina în zero; atunci şi $5\times\overline{ba}$ se va termina în zero, adică $5\times\overline{ba}=\overline{...0}$.

Dacă a e diferit de zero, rezultă $a\in\{2, 4, 6, 8\}$.

Dacă $a=2$, $6\times25\neq5\times52$.

Dacă $a=4$, $6\times45=5\times54$, soluție $\overline{ab}=45$.

Dacă $a=6$, $6\times65\neq5\times56$.

Dacă $a=8$, $6\times85\neq5\times58$.

Răspuns: $\overline{ab}=45$.

25. (Diferență şi dublu raport. Diferența se determină din modificările raportului.)

Notăm vârsta actuală a lui Cristi cu C, iar a tatălui, cu t.

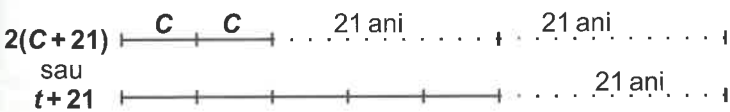
Rezolvarea 1

Pe etape, reprezentarea grafică este:

a) Reprezentăm raportul actual al vârstelor:

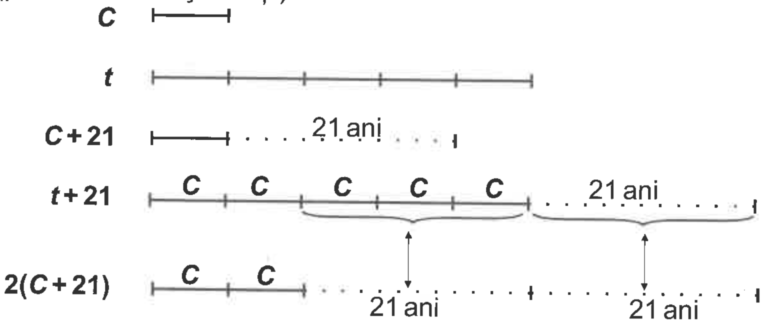
b) La vârsta actuală a lui Cristi adăugăm (punctat) **21** de ani:

c) Pentru reprezentarea vârstei tatălui de peste **21** de ani sunt două posibilități: repetăm segmentul ce reprezintă vârsta de atunci a lui Cristi (de la punctul b) sau la vârsta actuală a tatei adăugăm **21**, astfel:



d) Comparăm cele două reprezentări ale vârstei tatălui (de la punctele c.1 şi c.2): **21 = 21**, iar **5** părți sunt egale cu **2** părți plus **21** ani; rezultă **3** părți, fiecare egală cu vârsta actuală a lui Cristi, reprezintă **21** de ani. Câți ani are Cristi? **21 : 3 = 7** (ani). Ce vârstă are tatăl? **5×7 = 35** (ani).

Într-o altă variantă de rezolvare, cu desenul şi judecata mai restrânse (păstrăm aceleaşi notații):



Inițial, raportul dintre vârste este de $\frac{5}{1}$, adică vârsta tatălui are **5** părți egale, vârsta lui Cristi reprezintă o singură asemenea parte. Ca raportul să fie $\frac{2}{1}$, este suficient să se adauge *numai* la **2** părți din vârsta tatălui *câte* **21** de ani, aşa cum se adaugă şi la vârsta lui Cristi (care apoi se repetă de **2** ori); dar în problemă se spune că raportul $\frac{2}{1}$ se obține adăugându-se, la cele **5** părți, **21** de ani. Pe scurt, aceste relații se pot scrie:

2 părți din vârsta actuală plus **2×21** reprezintă cât **2** părți din raportul nou, dar şi

5 părți din vârsta actuală plus **21** de ani reprezintă cât **2** părți din noul raport. Rezultă:

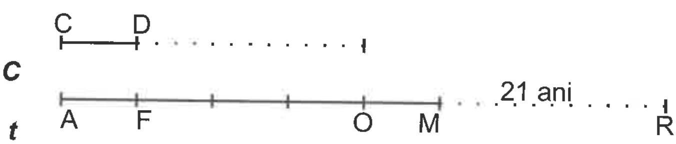
3 părți din vârsta actuală reprezintă **21** de ani.

Câți ani are Cristi? **21 : 3=7** (ani). Câți ani are tatăl? **5×7 = 35** (ani).

Rezolvarea 2. (Tot grafic)

Raportul actual dintre vârste este:

Raportul peste **21** de ani:



Rezultă: o jumătate din vârsta de peste **21** de ani a tatălui este reprezentată de OM plus **21** ani. Cealaltă jumătate (AO) reprezintă **4** părți, fiecare parte fiind egală cu CD. Dar OM = AF, iar OM plus **21** ani este egal cu FO plus AF. Deci, FO reprezintă **21** ani. Însă, FO = **3** părți, fiecare egală cu vârsta actuală a lui Cristi.

Câți ani are Cristi? **21 : 3 = 7**. Câți ani are tatăl? **5×7 = 35**.

Rezolvarea 3

Dacă aş grupa anii care reprezintă vârsta actuală a tatălui câte **5**, la fiecare grupă de câte **5** i-ar corespunde **1** an din vârsta băiatului. Peste **21** de ani, raportul este $\frac{2}{1}$. Dar câți ani se mai adaugă la fiecare grupă, pentru a se ajunge la acest raport? Concepem următorul tabel:

Vârsta tatălui (grupe de câte **5** ani)	Vârsta lui Cristi (grupe de câte **1** an)	Raportul
5 ani	**1** an	$\frac{5}{1}$
5 ani + **1** an	**1** an + **1** an	$\frac{6}{2} = 3$
5 + 1 + 1	**1 + 1 + 1**	$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
5 + 1 + 1 + 1	**1 + 1 + 1 + 1**	$\frac{8}{4} = 2$

Deci, *la fiecare grupă*, se mai adaugă câte **3** ani, pentru ca raportul să fie **2**. Fiecare grupă din anii ce reprezintă vârsta tatei va cuprinde **8** ani, o grupă din vârsta lui Cristi, **4** ani. La câte grupe se pot distribui câte **3** din cei **21** de ani? (Sau: dacă se distribuie câte **6** ani la două grupe distincte, la câte grupe se adaugă cei **42** de ani, adică **21 + 21**?). La atâtea grupe de câte ori **3** se cuprinde în **21**, adică **21 : 3 = 7**.

Deci sunt **7** grupe de câte **5** ani, adică **35** de ani (vârsta tatălui) şi **7** grupe de câte **1** an, adică **7** ani, vârsta lui Cristi; peste **21** de ani: **7** grupe a câte **8** ani, **56** de ani, vârsta ce o va avea tatăl, şi **7** grupe a câte **4** ani, adică **28** ani, vârsta ce o va avea Cristi.

Rezolvarea 4

Notând cu ***t*** un an din vârsta tatei, cu ***b*** un an din vârsta lui Cristi, grafic, pe etape, rezultă:

a) raportul actual: $\frac{5t}{1b}$

$$\begin{matrix} t.\,t. \\ t.\,b.\,t \\ t. \end{matrix}\;;\qquad \begin{matrix} t.\,t. \\ t.\,b.\,t \\ t. \end{matrix}\;;\qquad \underbrace{\begin{matrix} t.\,t. \\ t.\,b.\,t \\ t. \end{matrix}\quad \ldots \quad \begin{matrix} t.\,t. \\ t.\,b.\,t \\ t. \end{matrix}}_{\text{nu ştim câte grupe}}\;;$$

b) Mai adaug **21 *b*** şi **21 *t***.

Ca raportul să fie $\frac{2t}{1b}$, la fiecare ***b*** trebuie să corespundă ***2t***.

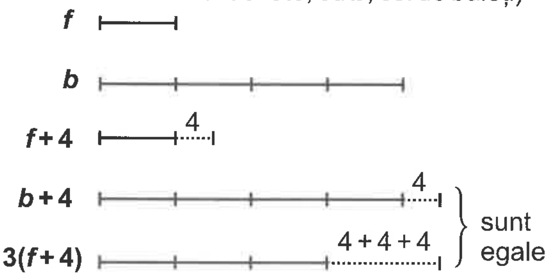
Grupăm întâi cei ***21t*** în câte **2**; vom obține **10** grupe cu câte ***2t*** şi ***1b***, rămânând negrupați ***1t*** şi ***11b***, adică:

$$\underbrace{\ldots + \begin{matrix} t.\;t.\;t. \\ b.\,b.\,b. \\ t.\;t.\;t. \end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix} t. \\ b. \\ t. \end{matrix}}_{\mathbf{10}\text{ grupe}} + \begin{matrix} b. \\ t. \end{matrix} \quad + 10\,b.$$

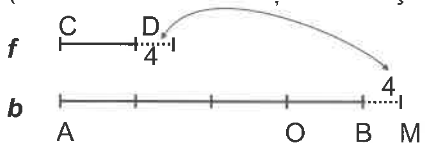
Câți t ne mai trebuie pentru ultimele grupe ca raportul să fie $\frac{2}{1}$?
$1 + 2 \times 10 = 21$

c) Dar în față (vezi punctul a), fiecărui b îi corespund **$5t$**.
Vom lua de aici câte **3** t din fiecare grupă pentru ca raportul să fie $\frac{2}{1}$. De la câte grupe voi lua? (De fapt, câte grupe de $\frac{5t}{1b}$ erau?) Dacă ne mai trebuie **$21t$**, luând câte **3**, vom lua de la **7** grupe, căci **$21 : 3 = 7$**.
Rezultă că inițial erau **7** grupe a câte **5** ani, deci tatăl avea **35** de ani; în fiecare grupă din cele **7** era câte **1** b, deci băiatul avea **7** ani.
Rezolvarea 5. *Algebric*
Fie x vârsta tatălui, y vârsta lui Cristi, se pot scrie:
$x = 5y$ și $x + 21 = 2(y + 21)$.
Prin înlocuirea lui x în relația a doua, se obține:
$5y + 21 = 2y + 42 \,/ - 2y \Leftrightarrow 3y + 21 = 42 \Leftrightarrow y = (42 - 21) : 3 = 7; x = 5 \times 7 = 35$.

26. Asemenea cu cea anterioară. Diferență și raport dublu.
Mărimile se măresc cu același număr, iar raportul se micșorează.
Rezolvarea 1. *Grafic*
(Notăm cu f numărul de fete, cu b, cel de băieți)



Din desen rezultă că o parte (nr. fete inițial) = **8**, deoarece **$4 + 4 = 8$**.
Băieți erau **32**, adică **$4 \times 8 = 32$**. Erau **40** elevi, căci **$8 + 32 = 40$**.
Verificare: **$32 : 8 = 4$; $(32 + 4) : (8 + 4) = 3$**.
Rezolvarea 2. *Grafic*, raportul dintre numerele modificate este:
(Notăm cu f numărul inițial de fete și cu b, numărul inițial de băieți)

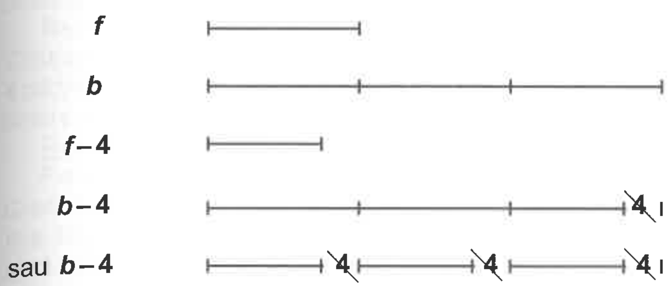


Din enunț, rezultă că OM este o treime din AM, adică o parte plus **4** reprezintă cât AO : **2**, adică **$1\frac{1}{2}$** părți, căci **3** părți : **$2 = 1\frac{1}{2}$** părți.
Deci, o jumătate din numărul inițial al fetelor reprezintă **4**.
Câte fete erau? **$4 + 4 = 8$**. Câți băieți erau? **$4 \times 8 = 32$**.
Câți elevi erau? **$8 + 32 = 40$**.
Observație: Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea problema anterioară.

27. (Diferență şi raport dublu. Mărimile se micşorează, iar raportul se măreşte; invers față de problema anterioară)

Rezolvarea 1. *Grafic*:

(Păstrăm notațiile de la problema de mai sus)



Se observă că din numărul băieților rămaşi nu s-au putut forma decât **3** părți din noul raport; rezultă că partea care nu s-a putut forma (nu s-a putut reprezenta direct) reprezintă **8**, căci **4 + 4 = 8**.

Câte fete erau? **8 + 4 = 8**.

Câți băieți erau? **3 × 12 = 36**.

Fără desen: Inițial raportul dintre numere este $\frac{3}{1}$, adică numărul băieților reprezintă **3** părți, iar al fetelor o parte.

Ca raportul să fie $\frac{4}{1}$, trebuie să se scadă din cele **3** părți numărul **4**, aşa cum se scade şi din partea ce reprezintă numărul fetelor.

Dacă s-ar scădea *câte* **4** din fiecare parte din raportul inițial, s-ar obține doar **3** părți din noul raport, lipsind una.

Deci, o parte din noul raport reprezintă **8**.

Erau **12** fete, căci **8 + 4 = 12**.

Băieți erau **36**, pentru că **3 × 12 = 36**.

Încercați *o altă formă a metodei grafice*, notând cu ***b*** fiecare băiat, cu ***f*** fiecare fată.

Pe baza raportului inițial, rezultă:

b. f. b. ***b. f. b.*** ***b. f. b.*** ***. . .*** ***b. f. b.***
b. ***b.*** ***b.*** ***b.***

(Nu ştim câte grupe sunt deocamdată)

Dacă pleacă **4** băieți şi **4** fete, băieții care au rămas negrupați (de la sfârşitul rândului) îi aşezăm în față, lângă cei grupați câte **3**, pentru ca unei fete să îi corespundă **4** băieți.

Deci, la fiecare grupă mai distribuim câte un băiat.

De la grupele desființate rămân **8** băieți, pentru că din cei **12** băieți de la ultimele **4** grupe, **4** băieți (şi **4** fete) au plecat, adică:

. . . b. ~~f~~. b. ***b. ~~f~~. b.*** ***b. ~~f~~. b.*** ***b. ~~f~~. ~~b~~.***
b. ***b.*** ***~~b~~.*** ***~~b~~.***

Cu cei **8** băieți rămaşi negrupați voi completa **8** grupe, pentru că distribui câte **1**.

Câți băieți vor fi în cele **8** grupe de câte **4**? **8 × 4 = 32**.

Câți băieți erau inițial? **32 + 4 = 36**.

Câte fete erau? **36 : 3 = 12**.

Rezolvarea algebrică

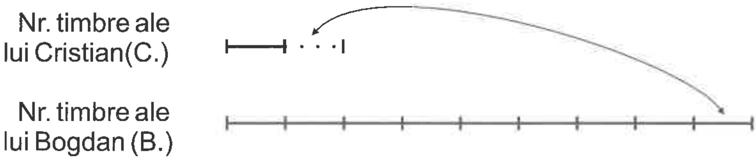
Fie x numărul băieților, y numărul fetelor, se pot scrie:

$x = 3y$ şi $x - 4 = 4(y - 4)$, de unde $3y - 4 = 4y - 16$, relație echivalentă cu:

$y = 12$; $x = 3 \times 12 = 36$.

28. (Diferență şi raport dublu. Transfer între mărimi)

Rezolvarea 1. *Grafic*, raportul inițial dintre mărimi este:



Cu câte părți avea mai mult Bogdan decât Cristian? **9 – 1 = 8**. Câte părți iau din numărul timbrelor lui Bogdan şi le transfer la Cristian, în aşa fel încât numărul părților lui Cristian să se cuprindă în numărul părților lui Bogdan de **4** ori (trebuie să constituie un sfert)?

Dacă iau o parte şi o transfer lui Cristian, acesta din urmă va avea două părți, iar lui Bogdan îi vor rămâne **8** părți (căci **9** părți – **1** parte = **8** părți); deci raportul va fi $\frac{4}{1}$, adică **8 : 2 = 4**.

În enunț se spune că sunt transferate **25** de timbre; deci, aceste **25** de timbre reprezintă o parte.

Inițial, Cristian avea o parte, adică **25** de timbre, iar Bogdan avea **225** de timbre, adică **9** părți, iar $9 \times 25 = 225$.

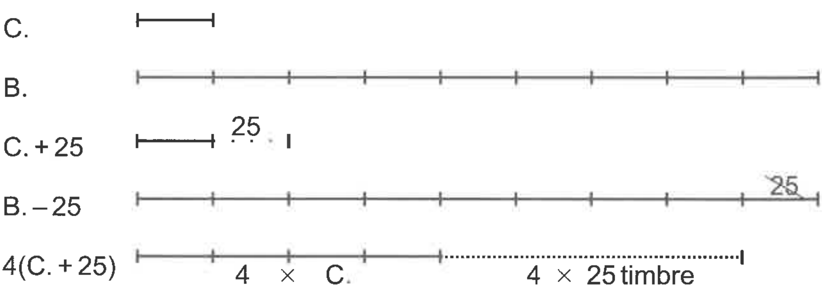
Verificare: **225 : 9 = 25** şi **(225 – 25) : (25 + 25) = 200 : 50 = 4**.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de la rezolvarea **1**; în plus, notăm **25*t***, **25** de timbre.

Inițial, raportul este $\frac{9}{1}$. Ca raportul să fie $\frac{4}{1}$, este necesar ca din cele **9** părți să se scadă **25** de timbre, aşa cum la partea ce reprezintă numărul de timbre ale lui Cristian se adaugă **25** de timbre. Deci, **9** părți din raportul actual fără **25** timbre reprezintă cât **4** părți din noul raport. Tot **4** părți din noul raport se obțin şi dacă la **4** părți din cele **9** se adaugă *câte* **25** timbre.

Grafic:



Din desen, rezultă că **4** părți, fiecare egală cu numărul inițial de timbre ale lui Cristian, reprezintă **100** timbre. O parte reprezintă **25** de timbre, căci **100 : 4 = 25**. Câte timbre avea Bogdan? $\mathbf{9 \times 25 = 225}$.

Sau: **9** părți actuale fără **25** ***t*** reprezintă cât **4** părți noi, dar şi **4** părți actuale plus $\mathbf{4 \times 25}$ ***t*** reprezintă tot **4** părți din noul raport.

Rezultă că **5** părți, fiecare egală cu numărul inițial de timbre ale lui Cristian, reprezintă **125** timbre, căci **9** părți din raportul actual reprezintă cât **4** părți din raportul actual plus **100** timbre plus **25** timbre. Cristian avea **25** de timbre, căci **125 : 5 = 25**, iar Bogdan avea **225** timbre, deoarece $\mathbf{9 \times 25 = 225}$.

Rezolvarea 3

Fie $\boldsymbol{x}$ numărul de timbre ale lui Bogdan, $\boldsymbol{y}$ numărul de timbre ale lui Cristian; se pot scrie relațiile: $\boldsymbol{x = 9y}$ şi $\boldsymbol{x - 25 = 4(y + 25)}$. Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{x}$ în a doua relație, rezultă: $\boldsymbol{9y - 25 = 4y + 100 \Leftrightarrow 5y = 125}$; $\boldsymbol{y = 125 : 5 = 25}$; $\boldsymbol{x = 9 \times 25 = 225}$.

29. (Asemănătoare cu problema anterioară)

Rezolvarea 1

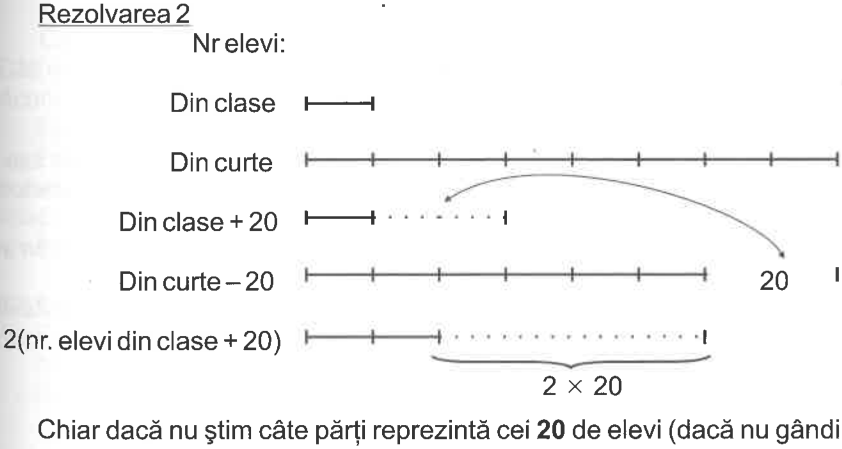
Pentru reprezentarea grafică, trebuie să determinăm câte părți reprezintă cei **20** de copii trimişi în clase (transfer). Inițial, raportul este $\mathbf{\frac{8}{1}}$, adică numărul elevilor ce se aflau inițial în clase constituiau o parte, iar cei din curte **8** părți. Câte părți trebuie să luăm din cele **8**, pe care să le adăugăm la o parte şi să obținem raportul $\mathbf{\frac{2}{1}}$? Gândim astfel:

(**8** părți – **1** parte) : (**1** parte + **1** parte) = **7** părți : **2** părți $\neq$ **2**
(**8** părți – **2** părți) : (**1** parte + **2** părți) = **6** părți : **3** părți = **2**,

tocmai raportul căutat. Rezultă că acei **20** de elevi trimişi în clase constituiau **2** părți, fiecare parte egală cu numărul inițial de elevi ce se aflau în clase. (Se poate lucra şi fără desen). Câți elevi erau inițial în clase? **20 : 2 = 10**. Câți elevi erau inițial în curte? $\mathbf{8 \times 10 = 80}$. Câți elevi erau în clasa întâi la acea şcoală? **10 + 80 = 90**.

Verificare: **80 : 10 = 8; (80 – 20) : (10 + 20) = 2**.

Rezolvarea 2



Chiar dacă nu ştim câte părți reprezintă cei **20** de elevi (dacă nu gândim ca la punctul **1**), se observă că, repetând partea ce reprezintă numărul inițial al elevilor din clase de **2** ori, mai rămân, pentru compararea ultimelor două reprezentări, **6** părți. Dar **6** părți sunt constituite din **60** de elevi, adică $\mathbf{2 \times 20 + 20}$ (cei care pleacă). O parte, numărul inițial al elevilor care se aflau în clase, reprezintă **10**, pentru că $\mathbf{60 : 10 = 6}$. În curte, erau **80** de copii, căci $\mathbf{8 \times 10 = 80}$. La acea școală, în clasa **I** erau **90** de copii.

Rezolvarea 3. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{x}$ numărul inițial al elevilor din curte, $\boldsymbol{y}$, nr. celor ce se aflau la început în clase, se pot scrie: $\mathbf{x = 8y}$ și $\mathbf{x - 20 = 2(y + 20)}$.

Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{x}$, obținem: $\mathbf{8y - 20 = 2y + 40 \Leftrightarrow 6y - 20 = 40 \Leftrightarrow y = (40 + 20) : 6 = 10}$; $\mathbf{x = 8 \times 10 = 80}$; total $= \mathbf{90}$.

30. Diferență și dublu raport. O mărime se micșorează, cealaltă se mărește.

Rezolvarea 1

Grafic, primul raport dat este:

În situația în care modific numerele, așa cum se spune în problemă, al doilea număr modificat (micșorat de **4** ori) se cuprinde în fiecare parte din primul număr de **4** ori. De ce? Pentru că din al doilea rămâne a patra parte (un sfert). În cele **6** părți ale primului număr de la început vor fi **24** de părți (de sferturi ale celui de-al doilea număr). În acest caz, raportul este $\mathbf{\frac{24}{1}}$; dar el trebuie să fie $\mathbf{\frac{26}{1}}$. Rezultă că în nr. **4**, cel care se adaugă la primul număr, mai sunt **2** asemenea părți (sferturi). Care este primul număr? $\mathbf{4 : 2 \times 4 = 8}$ sau sau cele **2** sferturi formează o jumătate din al doilea număr, deci $\mathbf{4 \times 2 = 8}$. Primul număr este **48**, căci $\mathbf{6 \times 8 = 48}$.

Grafic, situația după modificare:

Verificare: $\mathbf{48 : 8 = 6}$; $\mathbf{(48 + 4) : (8 : 4) = 26}$.

În lucrările elevilor, desenul și rezolvarea vor fi:

A câta parte rămâne din al doilea număr? O parte : $\mathbf{4 = 1}$ sfert. Câte asemenea sferturi sunt în primul număr nemodificat? $\mathbf{6 \times 4 = 24}$. Câte sferturi lipsesc pentru ca raportul să fie $\mathbf{\frac{26}{1}}$? $\mathbf{26 - 24 = 2}$. Rezultă că **2** sferturi din al doilea sunt formate de numărul **4**. Cât este un sfert? $\mathbf{4 : 2 = 2}$. Care este al doilea număr? $\mathbf{4 \times 2 = 8}$. Care este primul număr? $\mathbf{6 \times 8 = 48}$.

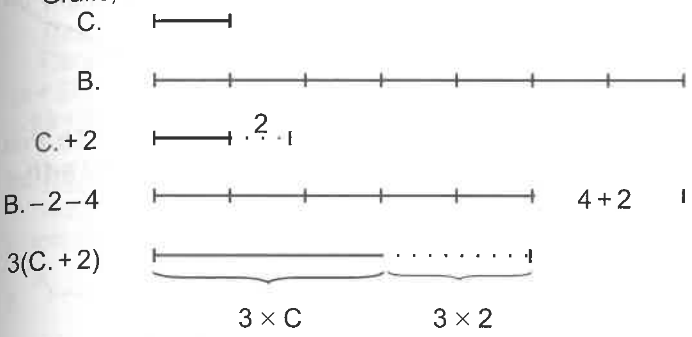
Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{a}$ și, respectiv, $\boldsymbol{b}$ cele două numere, se pot scrie:

$a = 6b$ şi $(a+b) : \frac{b}{4} = 26$, de unde $a + 4 = \frac{26}{4}b \,/ \times 4 \Leftrightarrow 4a + 16 = 26b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24b + 16 = 26b \,/ -24b \Leftrightarrow\ 16 = 2b \Leftrightarrow b = 8;\ a = 48.$

31. Transfer şi micşorare a unei mărimi.
Grafic, modificările sunt:



(Am notat suma de bani pe care o are fiecare copil prin iniţialele numelui său.)

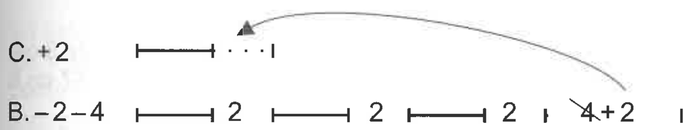
Din desen, rezultă că **2** părţi, fiecare egală cu suma iniţială a lui Costel, reprezintă **6** lei, căci $\mathbf{3 \times 2 = 6}$.

Câţi lei *avea* Costel? **6 : 2 = 3**. Câţi lei *are* Costel? **3 + 2 = 5**. Câţi lei avea Barbu? $\mathbf{7 \times 3 = 21}$. Câţi lei *are* acum? **21 – 2 – 4 = 15** sau $\mathbf{3 \times 5 = 15}$.

<u>Rezolvarea 2</u>

(Păstrăm aceleaşi notaţii ca mai sus.)

Prima dată raportul era de $\frac{7}{1}$, iar după modificări a devenit $\frac{3}{1}$, deci au dispărut **4** părţi din raportul iniţial. Dar câţi lei reprezintă cele **4** părţi?



Cele **4** părţi dispărute reprezintă **12** lei, deoarece **2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 12**. Câţi lei reprezentau o parte? **12 : 4 = 3**, tocmai suma pe care o avea Costel. Acum are **5** lei, căci **3 + 2 = 5**, iar Barbu **15** lei, pentru că $\mathbf{3 \times 5 = 15}$.

<u>Rezolvarea 3</u>

Fie x suma pe care o avea Barbu, y suma pe care o avea Costel. Se pot scrie egalităţile: $x = 7y$ şi $x - 2 - 4 = 3\,(y + 2)$. Prin înlocuirea lui x în ultima relaţie, se obţine: $7y - 6 = 3y + 6 \Leftrightarrow 4y = 12 \Leftrightarrow y = 3;\ x = 21$.

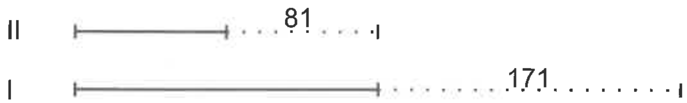
Acum Barbu are **15** lei, iar Costel **5** lei.

32. Dublu raport. Modificări cu egalitatea mărimilor

<u>Rezolvarea 1</u>

Notăm primul număr cu **I**; al doilea cu **II**.

Putem reprezenta grafic astfel:



Din prima afirmaţie din enunţ, rezultă că **I = II + 81**. Din a doua afirmaţie, rezultă că patru părţi, fiecare egală cu al doilea număr (cel iniţial, nu includem şi pe **81**), reprezintă **252**, căci **81 + 171 = 252**.

Care este al doilea număr? **252 : 4 = 63**.

Care este primul număr? **63 + 81 = 144**.

Rezolvarea 2

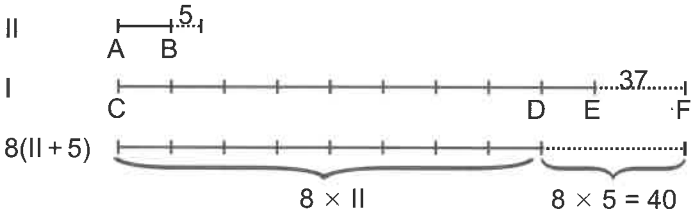
Fie numerele a şi b. Se pot scrie egalităţile: $b + 81 = a$ şi $a + 171 = 5b$. Prin înlocuirea lui a în a doua egalitate, se obţine: $b + 81 + 171 = 5b \Leftrightarrow 252 = 4b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $b = 63$; $a = 114$.

33. Dublu raport. Măriri ale mărimilor cu numere diferite

Rezolvarea 1

(Notăm primul număr cu **I**, al doilea cu **II**)

Raportul iniţial dintre cele două numere se poate figura astfel:



Pentru a se obţine al doilea raport, se adaugă **5** şi, respectiv, **37**.

Deci, ca raportul să devină $\frac{8}{1}$, e necesar ca numărul al doilea mărit cu **5**, adică AB + **5**, să se cuprindă în primul număr mărit cu **37**, adică în CF, de **8** ori.

Dar AB se cuprinde în CD de **8** ori; atunci **5** se cuprinde în DE + **37** de **8** ori. Aşadar, DE + **37** = **8** × **5** = **40**, de unde DE = **3**; deci şi AB = **3**.

Dacă al doilea număr este **3**, primul număr era de **9** ori mai mare, adică **27**.

Rezolvarea 2

Pe aceeaşi reprezentare grafică:

Dacă la o parte din CE, adică la DE care este egală cu AB, se adaugă numai **5** din **37**, se obţine *o singură parte* din noul raport.

Mai trebuie formate încă **7** părţi, pentru ca raportul să fie $\frac{8}{1}$.

Din ce le formăm? Din CD + (**37** – **5**). Deci **8**AB + **32** reprezintă **7** părţi din noul raport.

Dacă AB + **5** reprezintă cât **1** parte din noul raport, atunci **8**AB + **8**×**5** reprezintă cât **8** părţi din noul raport, dar şi **8**AB + **32** reprezintă cât **7** părţi din noul raport.

Rezultă că o parte din noul raport, adică al doilea număr mărit cu **5**, este **8**, pentru că **8**×**5** – **32** = **8**. Iniţial al doilea număr era **3**, căci **8** – **5** = **3**, iar primul număr era **27**, căci **9**×**3** = **27**.

Rezolvarea 3

Fără desen:

Dacă **9** părți din vechiul raport + **37** reprezintă cât **8** părți noi, iar **8** părți din vechiul raport + $\mathbf{8 \times 5}$ reprezintă cât **8** părți din noul raport, rezultă că o parte, adică al doilea număr inițial, era **3**, căci $\mathbf{40 - 37 = 3}$.

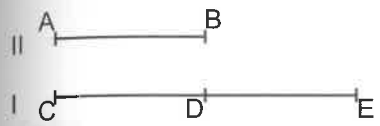
Primul număr era **27**, căci $\mathbf{9 \times 3 = 27}$.

Rezolvarea 4

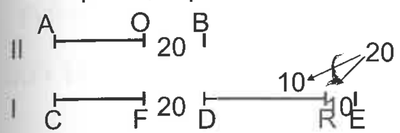
Fie $\boldsymbol{a}$ primul număr, $\boldsymbol{b}$ al doilea număr. Se pot scrie egalitățile: $\boldsymbol{a = 9b}$ şi $\boldsymbol{(a + 37) : (b + 5) = 8}$. Ultima egalitate este echivalentă cu $\boldsymbol{a + 37 = 8b + 40} \Leftrightarrow \boldsymbol{9b + 37 = 8b + 40} \Leftrightarrow \boldsymbol{b = 3}$; $\boldsymbol{a = 27}$.

34. Rezovlarea 1

Notăm cu **I** cantitatea de lapte din primul bidon, cu **II**, pe cea din al doilea bidon. Grafic, raportul dintre cantitățile inițiale este:



Raportul, după modificări:



Dacă din CD luăm **20** de litri, obținem o parte egală cu ceea ce rămâne în al doilea bidon. Din DE trebuie să mai formăm încă **2** părți, pentru că noul raport este $\mathbf{\frac{3}{1}}$. Dacă din DE am lua **20** de litri am obține încă o parte, dar trebuie să luăm numai **10** litri, pentru că din primul bidon se scot **30** de litri, adică **20 + 10**, şi nu **40**, căci **20 + 20 = 40**. Deci DR este mai mare decât CF cu o parte ce reprezintă **10** litri. În al doilea bidon rămân **10** litri. Câți litri erau la început? **10 + 20 = 30** (litri).

Câți litri erau în primul bidon? $\mathbf{2 \times 30 = 60}$ (litri).

Verificare: **60 : 30 = 2; (60 – 30) : (30 – 20) = 3.**

Rezolvarea 2. Fără desen:

Dacă atunci când din primul bidon se scot **20** de litri se obține o parte din noul raport, rezultă că din **2** părți din vechiul raport dacă se scot $\mathbf{2 \times 20 = 40}$ (litri), se obțin **2** părți din noul raport. Dacă din **2** părți din vechiul raport se scot **30** de litri, se obțin **3** părți din noul raport.

Se observă, prin compararea ultimelor două relații, că $\mathbf{2 \times 20 - 30 = 10}$ (litri) reprezintă o parte din noul raport, tocmai cantitatea rămasă în al doilea bidon.

Câți litri erau la început în al doilea bidon? **10 + 20 = 30**.

Câți litri erau în primul bidon? $\mathbf{2 \times 30 = 60}$.

Rezolvarea 3

Fie $\boldsymbol{a}$ cantitatea inițială din primul bidon, $\boldsymbol{b}$, cea din al doilea.

Se pot scrie egalitățile: $\boldsymbol{a = 2b}$ şi $\boldsymbol{a - 30 = 3(b - 20)}$.

Rezultă $\boldsymbol{2b - 30 = 3b - 60} \Leftrightarrow \boldsymbol{2b = 3b - 30} \Leftrightarrow \boldsymbol{b = 30}$; $\boldsymbol{a = 2 \times 30 = 60}$.

35. Rezolvarea 1

Grafic, raportul dintre produs şi cât este:

Din desen rezultă: câtul este **6 : 3 = 2**; iar produsul este **8**, căci **4×2 = 8**.

Care sunt numerele naturale care au produsul **8** şi câtul **2**?

Numerele sunt **4** şi **2**, căci **4×2 = 8**, iar **4 : 2 = 2**.

Rezolvarea 2

Dacă notăm cele două numere cu a şi, respectiv, cu b, cu p, produsul lor, cu c, câtul lor, se pot scrie egalităţile: $p = 4c$ şi $p - c = 6$, de unde $4c - c = 6$, adică $c = 6 : 3 = 2$, iar $p = 4 \times 2 = 8$;

$p = ab = 8$ şi $a = 2b$.

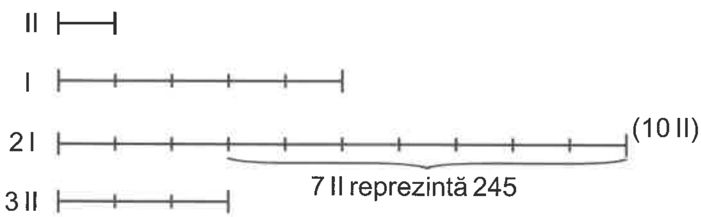
Prin înlocuirea lui a în produsul ab, rezultă:

$2b \times b = 8 \Leftrightarrow 2b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$; $a = 2 \times 2 = 4$.

36. Rezolvarea 1

Notăm primul număr cu **I**, al doilea cu **II**.

Grafic, relaţiile dintre cele două numere sunt:



Care este al doilea număr? **245 : 7 = 35**.

Dar primul număr? **5×35 = 175**.

Rezolvarea 2

Fie a primul număr, b, cel de-al doilea număr.

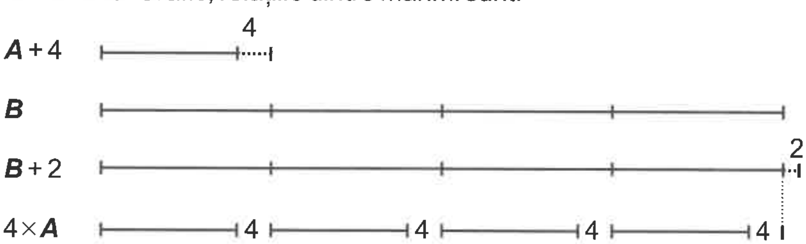
Se pot scrie egalităţile: $a = 5b$ şi $2a - 3b = 245$.

Prin înlocuirea lui a în cea de-a doua egalitate, se obţine:

$10b - 3b = 245$. Rezultă $7b = 245 \subset b = 35$; $a = 5 \times 35 = 175$.

37. Rezolvarea 1

Notăm cu A numărul de bile din prima cutie, cu B, numărul de bile din a doua cutie. Grafic, relaţiile dintre mărimi sunt:



Se observă că $B + 2$ reprezintă cât $4A$. Rezultă că $2A$ reprezintă **18** bile, căci $4+4+4+4+2=18$. Câte bile erau în A? $18:2=9$.

Câte bile erau în B? $(9+4)\times 4=52$.

Rezolvarea 2

Păstrând notațiile anterioare, putem scrie: $B = 4(A + 4)$ şi $B + 2 = 6A$; rezultă $4A+16+2=6A$, adică $A=9$; $B=52$.

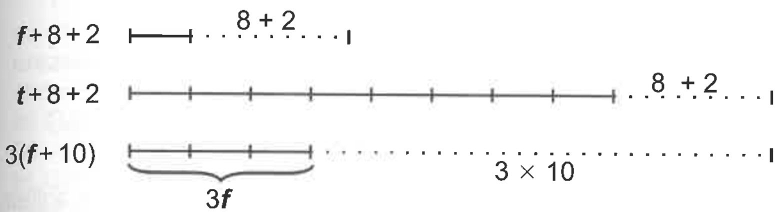
38. (Asemănătoare cu problema **25.**)

Rezolvarea 1. *Grafic*

(Notăm cu ***f*** vârsta actuală a fiului, cu ***t***, cea a tatălui.)

Raportul vârstelor cu **8** ani în urmă:

Peste **2** ani:



Se observă că **5** părți, fiecare egală cu vârsta fiului în urmă cu **8** ani, constituie **20** de ani; rezultă că o parte, adică vârsta fiului de acum **8** ani, constituie **4** ani, pentru că $20:5=4$. Acum fiul are **12** ani, căci $4+8=12$. Tatăl are acum **40** de ani, căci $4\times 8+8=40$.

Rezolvarea 2

Pe aceeaşi reprezentare grafică (prima parte):

Dacă la vârsta fiului de acum **8** ani în urmă se adaugă **10** ani, se obține o parte din noul raport. Acelaşi lucru se obține şi dacă la o parte din vârsta tatălui adăugăm **10** ani. Câte părți din vârsta tatălui au mai rămas? 8p.–1p.= **7** părți. Câte părți, fiecare egală cu vârsta viitoare a fiului, mai trebuie să formăm dacă o parte am format-o? Raportul nou trebuie să fie $\frac{3}{1}$, deci mai trebuie încă **2** părți.

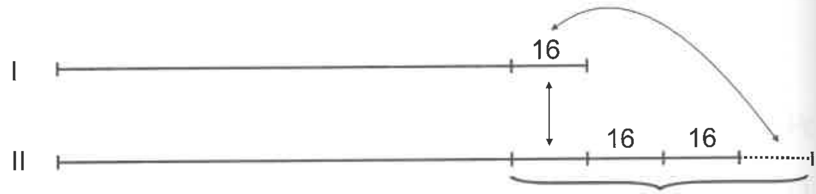
Dacă **2** părți (de peste **2** ani) sunt formate din **7** părți (de acum **8** ani), **1** parte va fi formată din $3\frac{1}{2}$ părți (anterioare), adică la o parte de acum **8** ani mai adaug încă $2\frac{1}{2}$ părți, fiecare egală cu vârsta fiului de acum **8** ani. Dar, la început, am arătat că la vârsta fiului de acum **8** ani am adăugat **10** ani. Rezultă $2\frac{1}{2}$ părți sunt constituite din **10** ani, adică **5** jumătăți reprezintă **10** ani, o jumătate, **2** ani, iar vârsta fiului de acum **8** ani în urmă era de **4** ani. Acum are **12** ani, iar tatăl are **40** de ani, adică $\mathbf{8 \times 4 + 8 = 40}$. Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea ex. **25**.

Rezolvarea 3. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{t}$ şi $\boldsymbol{f}$ vârstele de acum **8** ani în urmă. Se pot scrie: $\boldsymbol{t = 8f}$ şi $\boldsymbol{t + 8 + 2 = 3(8 + 2 + f)}$. Rezultă: $\boldsymbol{t = 3f + 20}$ şi $\boldsymbol{t = 8f}$, adică $\boldsymbol{5f = 20}$, $\boldsymbol{f = 4}$. În prezent, $\boldsymbol{f = 12}$, $\boldsymbol{t = 40}$.

39. Rezolvarea 1

Din prima afirmație rezultă că numărul de cărți din al doilea corp este mai mare decât numărul de cărți din primul corp cu dublul numărului de transfer, adică **32**, căci $\mathbf{2 \times 16 = 32}$. Din a doua afirmație rezultă că numărul de cărți rămase în primul corp reprezintă jumătate din numărul de cărți care vor fi în al doilea corp. Dacă notăm numărul de cărți din fiecare corp cu **I** şi, respectiv, cu **II**, reprezentarea grafică poate fi:



o doime din al doilea număr, mărit cu 16

Câte cărți rerpezintă jumătate din numărul cărților ce vor fi în al doilea corp? (Câte cărți vor rămâne în primul corp?) $\mathbf{4 \times 16 = 64}$. Câte cărți erau inițial în primul corp? $\mathbf{64 + 16 = 80}$. Câte cărți erau în al doilea corp?

$\mathbf{80 + 32 = 112}$.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

Gândim situația ce poate fi obținută *după al doilea transfer*. Diferența dintre al doilea şi primul număr ar fi de **64**, pentru că diferența inițială este de **32**, iar după al doilea transfer aceasta se măreşte cu încă **32**.

Presupunem că în primul corp ar rămâne **1** carte, atunci în al doilea ar fi cărți, diferența ar fi **1**. Dar diferența reală va fi **64**, deci de **64** de ori mai mare decât am presupus. Atunci, fiecare număr de cărți presupus de noi trebuie mărit de **64** de ori.

În primul corp au rămas **64** de cărți, căci $\mathbf{64 \times 1 = 64}$, iar în al doilea corp ar fi fost **128** de cărți, căci $\mathbf{2 \times 64 = 128}$.

Inițial, în primul corp erau **80** de cărți, pentru că $\mathbf{64 + 16 = 80}$, iar în al doilea corp, **112**, deoarece $\mathbf{128 - 16 = 112}$.

Rezolvarea 3

Fie $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$ numărul de cărți din primul şi, respectiv, din al doilea corp. Se pot scrie relațiile: $\boldsymbol{x + 16 = y - 16}$ şi $\boldsymbol{2(x - 16) = y + 16}$.

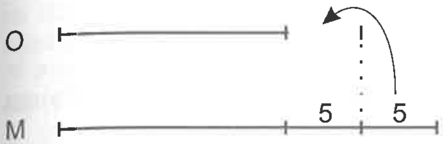
Prima relație devine: $\boldsymbol{y - x = 32 \Leftrightarrow y = 32 + x}$.

Prin înlocuirea în a doua relație, obținem: $\boldsymbol{2x - 32 = 48 + x \,/ - x \Leftrightarrow}$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow x - 32 = 48 \Leftrightarrow x = 80;\ y = 112}$.

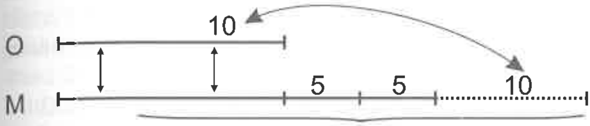
40. Rezolvarea 1. *Grafic*

Notăm cu $\boldsymbol{O}$ numărul de castane pe care le are Oana, cu $\boldsymbol{M}$, numărul de castane pe care le are Mihaela.

Din prima afirmație se deduce că Mihaela are cu **10** castane mai mult decât Oana, deoarece prin transferul celor **5** castane, adică jumătatea lui **10**, se realizează egalitatea între numere, adică:



Dacă Mihaela mai primește de la Oana **10** castane, înseamnă că diferența dintre numerele de castane se mărește cu $\mathbf{2 \times 10}$, adică:



Chiar dacă desenul nu reflectă mărimea reală a părților, se poate deduce că o jumătate din numărul de castane pe care le-ar avea Mihaela ar reprezenta **30**, căci **10 + 5 + 5 + 10 = 30**. (Tot atâtea vor rămâne și Oanei după al doilea transfer). De aici, *sunt două variante*:

a) Câte castane ar avea Mihaela? $\mathbf{2 \times 30 = 60}$. Câte are în realitate? **60 – 10 = 50**. Dar Oana? **50 – 10 = 40**.

b) Câte castane ar avea Oana după al doilea transfer? O parte, care reprezintă **30**. Câte are în realitate? **30 + 10 = 40**. Câte castane are Mihaela? $\mathbf{2 \times 30 - 10 = 50}$ sau **40 + 10 = 50**.

Rezolvarea 2

Fie $\boldsymbol{x}$ numărul de castane pe care le are Mihaela, $\boldsymbol{y}$ numărul de castane ale Oanei. Se pot scrie egalitățile: $\mathbf{x - 5 = y + 5}$ și $\mathbf{x + 10 = 2(y - 10)}$. Ultima relație este echivalentă cu $\mathbf{x = 2y - 30}$. Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{x}$ în prima egalitate, se obține: $\mathbf{2y - 30 - 5 = y + 5 \Leftrightarrow y - 35 = 5 \Leftrightarrow y = 40;\ x = 2 \times 40 - 30 = 50}$.

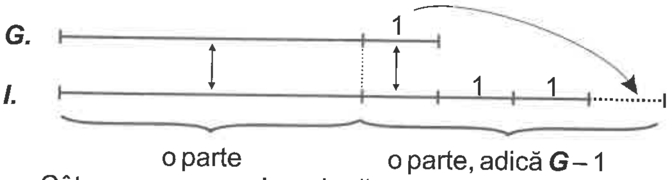
Verificare: **40 + 5 = 50 – 5; (50 + 10) : (40 – 10) = 2**.

41. Asemănătoare cu problema anterioară, numai că în realizarea reprezentării grafice este mai ușor să pornim de la a doua relație, cea care cuprinde transferul în urma căruia se obține egalitatea între mărimi.

Rezolvarea 1

Notăm numărul de pere pe care le are Gheorghe cu ***G***, iar numărul perelor lui Ioan, cu ***I***. Din a doua relație, rezultă că Ion avea cu **2** pere mai mult decât Gheorghe, adică:

Dacă ar avea loc primul transfer, lui Gheorghe i-ar rămâne atâtea pere cât jumătate din numărul pe care l-ar avea Ion, adică:



Câte pere ar avea Ion, după ce ar mai primi una? $2 \times 4 = 8$. Câte are în realitate? $8 - 1 = 7$. Câte pere are Gheorghe? $7 - 2 = 5$ sau $4 + 1 = 5$. (Pentru o altă variantă, a se vedea problema anterioară).

Rezolvarea 2. (*Propusă de eleva D.O.*)

Dacă atunci când s-ar realiza transferul unei unităţi către prima persoană s-ar obţine un număr de **2** ori mai mare decât numărul de pere de la a doua persoană, rezultă că primul poate avea (înainte de transfer): **3**, **5**, **7**, **9**, ... **(2*n* + 1)**, deci *un număr impar*, pentru că prin transfer se obţine un număr care se divide prin **2**. Dacă atunci când s-ar realiza transferul către al doilea, acesta ar avea un număr egal de pere cu primul, rezultă că el are *cu* ***2*** *pere mai puţin decât primul*, adică **1**, **3**, **5**, **7**, **9**, ..., deci tot *un număr impar* (pentru că un număr impar micşorat cu **2** dă tot un număr impar). Dacă admitem perechile de numere **3** şi **1** sau **5** şi **3**, în situaţia primului transfer, nu s-ar realiza condiţiile privitoare la raport (**4 : 0** = fără sens; **6 : 2 = 3**). Atunci admitem perechea **7** şi **5**, pentru că: $(7 + 1) : (5 - 1) = 2$ şi $7 - 1 = 5 + 1$.

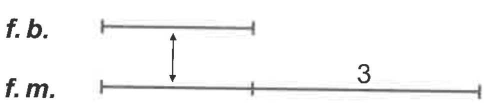
Rezolvarea 3

Fie x numărul de pere ale lui Ion, y numărul de pere ale lui Gheorghe. Se pot scrie: $x + 1 = 2(y - 1)$ şi $x - 1 = y + 1$. Din prima egalitate, rezultă:
$x = 2y - 2 - 1 \Leftrightarrow x = 2y - 3$. Prin înlocuire în a doua relaţie rezultă:
$2y - 3 - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y - 4 = 1 \Leftrightarrow y = 5$; $x = 2 \times 5 - 3 = 7$.

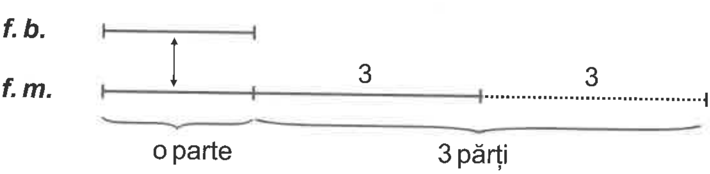
42. Dublu raport, fără transfer. Modoficări ale mărimilor

Rezolvarea 1

Din prima afirmaţie rezultă fata moşului a tors mai mult decât fata babei cu **3** gheme, adică:



Când fata moşului ar mai primi **3** gheme, s-ar obţine:



Am notat *numărul* de gheme toarse de fata babei cu ***f.b.***, iar cel al ghemelor toarse de fata moşului cu ***f.m.*** Din afirmaţia a doua rezultă că **3** părţi, fiecare egală cu numărul de gheme toarse de fata babei, reprezintă **6** gheme, căci $3 + 3 = 6$. (Pe desen, se observă echivalenţa unei părţi, din cele **4** ale celui de-al doilea raport). Câte gheme a tors fata babei? $6 : 3 = 2$. Câte gheme a tors fata harnică (a moşului)? $2 + 3 = 5$.

Verificare: $2 + 3 = 5$; $(5 + 3) : 4 = 2$.

Rezolvarea 2

Fie x numărul de gheme toarse de fata babei, y celălalt număr. Se pot scrie egalitățile: $x + 3 = y$ şi $4x = y + 3$. Prin înlocuirea lui y în a doua egalitate, se obține: $4x = x + 3 + 3 \Leftrightarrow 4x = x + 6$. Scăzând x din fiecare membru al egalității, rezultă: $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$; $y = 5$.

43. (d.)

(d. înseamnă "dificilă")

Notăm cu **I** suma de bani din prima puşculiță, cu **II**, cea din a doua puşculiță, cu ***S***, suma din ambele puşculite, iar numărul natural, un număr de ruble. Dacă atunci când se transferă **40** de ruble *în* a doua puşculiță, aceasta conține o sumă de **3** ori mai mare decât cea rămasă în prima, rezultă că, în totalul care nu se modifică, sunt **4** părți, fiecare parte fiind egală cu suma rămasă în prima puşculiță.

Deci, **I** fără **40** ruble este cât $\frac{1}{4}S$, adică:

I este cât $\frac{1}{4}S$ plus **40** ruble.

Dacă atunci când se transferă **40** de ruble *în* prima puşculiță, aceasta conține o sumă de **2** ori mai mare decât suma rămasă în a doua puşculiță, rezultă că, în totalul care nu se modifică, sunt **3** părți, fiecare egală cu suma rămasă în a doua puşculiță.

Deci, **II** fără **40** ruble este cât $\frac{1}{3}$ S, adică:

II reprezintă cât $\frac{1}{3}$ S plus **40** de ruble.

Dacă **I + II** reprezintă ***S***, prin înlocuire se obține:

$$^{3)}\frac{1}{4}S + {}^{4)}\frac{1}{3}S + 80\ \textit{ruble} = S \Leftrightarrow \frac{5}{12} \qquad S = 80\ \textit{ruble}$$

Care este suma totală (*S*.)? $80 : 5 \times 12 = 192$ (ruble).
Câte ruble erau în prima puşculiță? $192 : 4 + 40 = 88$.
Dar în a doua? $192 : 3 + 40 = 104$.
Verificare: $(104 + 40) : (88 - 40) = 3$; $(88 + 40) : (104 - 40) = 2$.

Rezolvarea 2

Fie x suma din prima puşculiță, y suma din a doua puşculiță, se pot scrie: $3(x - 40) = y + 40$ şi $x + 40 = 2(y - 40)$. Rezultă:
$3x - 120 = y + 40 \Leftrightarrow 3x - y = 160 \Leftrightarrow y = 3x - 160$.
Prin înlocuirea lui y în a doua relație, se obține:
$x + 40 = 2(3x - 160) - 80 \Leftrightarrow x + 40 = 6x - 400$.
Prin scăderea lui x din ambii termeni ai egalității, obținem:
$40 = 5x - 400 \Leftrightarrow x = (400 + 40) : 5 = 88$; $y = 3 \times 88 - 160 = 104$.

Sarcini suplimentare

1) După rezolvarea **1** de la problema anterioară, rezolvați problemele: **39, 40, 41**.
Exemplul pentru problema **39**: (**16** este un număr de cărți, iar **I** şi **II** con-

stituie numărul de cărți existente în fiecare corp, S, totalul de cărți.)

Dacă $\mathbf{I+16=II-16}$, iar $\mathbf{I+II}=S$, rezultă $\mathbf{II-16}=\frac{1}{2}S$, adică $\mathbf{II}=\frac{1}{2}S+16$;

Dacă $\mathbf{(II+16):2=I-16}$, rezultă că $\mathbf{I-16}=\frac{1}{3}S$, echivalent cu $\mathbf{I}=\frac{1}{3}S+16$.

Atunci $S=\frac{1}{2}S+16+16+\frac{1}{3}S$.

Prin amplificare, pentru a se aduce la acelaşi numitor, se obține:

$\frac{3}{6}S+\frac{2}{6}S+16+16=S$, adică $\frac{1}{6}S$ reprezintă **32** de cărți.

Rezultă: $S=6\times32=192$; $\mathbf{I}=192:3+16=80$; $\mathbf{II}=192:2+16=112$.

2) După modelul de mai jos (metoda comparației prin scădere), rezolvați problemele: **40, 41, 42, 43.**

Datele sunt de la sarcina **1**. Notăm cu **I** cărțile din primul corp şi cu **II** cărțile din al doilea corp, iar numărul natural dat, un număr de cărți.

Atunci:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{I}+16=\mathbf{II}-16\\ \mathbf{I}-16=\frac{1}{2}(\mathbf{II}+16)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathbf{I}+16=\mathbf{II}-16\\ \mathbf{I}-16=\frac{1}{2}\mathbf{II}+8\end{array}\right.$$

Scădem egalitățile, membru cu membru.

$$\mathbf{I}+16-(\mathbf{I}-16)=\mathbf{II}-16-(\tfrac{1}{2}\mathbf{II}+8)\Leftrightarrow32=$$

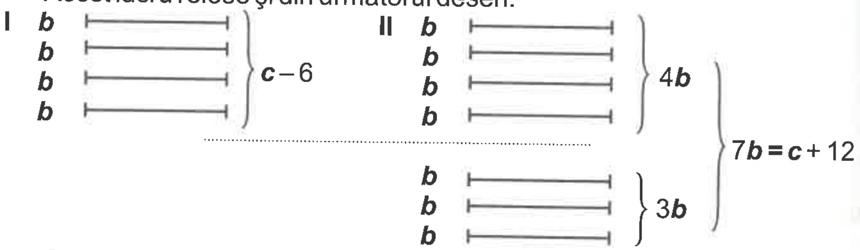
$$=\frac{1}{2}\mathbf{II}-24\Leftrightarrow\frac{1}{2}\mathbf{II}=32+24=56;\qquad \mathbf{II}=56\times2=112;$$

$$\mathbf{I}=112-16-16=80.$$

44. Înmulțirea căutată se poate scrie $a\times b=c$.

De câte ori se repetă mai mult factorul al doilea în situația a doua față de prima dată? $7b-4b=3b$.

Acest lucru reiese şi din următorul desen:



Care este diferența dintre produse? (Care este produsul $3b$?).

Dacă $7b=c+12$, iar $4b=c-6$, rezultă că $3b=12+6=18$.

Care este factorul al doilea (b)? $18:3=6$.

Care este produsul căutat? Dacă $7b=c+12$, atunci $c=7\times6-12$ sau: dacă $4b=c-6$, atunci $c=4\times6+6=30$.

Care este primul factor? $30:6=5$.

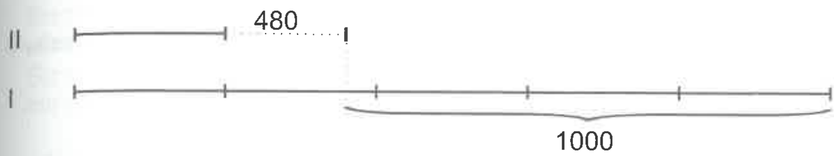
Verificare: $4\times6=24$; $7\times6=42$; $30-24=6$; $42-30=12$.

Răspuns: Înmulțirea este $5\times6=30$.

45. Rezolvarea 1

Notăm cantitățile din fiecare magazie cu **I** şi, respectiv, cu **II**.

Grafic, modificările sunt:



Ne fixăm întâi până unde este segmentul ce reprezintă cantitatea mărită din a doua magazie. Delimităm, printr-o linie punctată verticală, această cantitate şi pe segmentul ce reprezintă prima cantitate.

Rezultă că, până la sfârşit, acest segment reprezintă tocmai **1 000** kg, ceea ce s-a scos. Dar **1 480**, adică **1 000 + 480**, reprezintă **4** părți, fiecare egală cu cantitatea inițială din a doua magazie.

Câte kg erau inițial în a doua magazie? **1 480 : 4 = 370**.

Dar în prima? $\mathbf{5 \times 370 = 1\,850}$ sau **370 + 480 + 1000 = 1 850** (kg).

Rezolvarea 2. *Algebric*

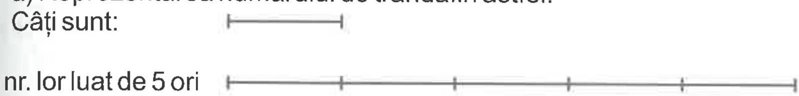
Fie x cantitatea de făină din prima magazie, y cealaltă cantitate.

Se pot scrie: $x = 5y$ şi $x - 1\,000 = y + 480$.

Înlocuim pe x din a doua relație: $5y - 1\,000 = y + 480 \,/ - y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4y - 1\,000 = 480 \Leftrightarrow y = (1\,000 + 480) : 4 \Leftrightarrow y = 370;\ x = 5 \times 370 = 1\,850$.

46. Rezolvarea 1. *Metoda grafică cu* **2** *variante*:

a) Reprezentarea numărului de trandafiri astfel:



Cele **4** părți, pe care le-am adăugat atunci când am mărit numărul de **5** ori, reprezintă **2** numere egale:

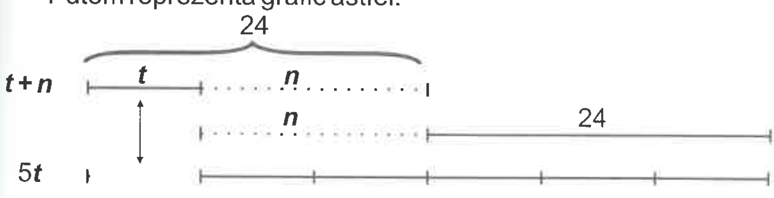
– primul număr este numărul *care ar mai trebui* pentru a fi **24** de trandafiri;

– al doilea este numărul care *depăşeşte* suma de **24**.

Deci, fiecărui număr îi corespund **2** părți, fiecare fiind egală cu numărul inițial de trandafiri. La partea inițială, dacă se adaugă încă **2** părți egale, se obține numărul **24**. Deci **3** părți, fiecare egală cu numărul inițial de trandafiri, reprezintă **24**. Câți trandafiri erau? **24 : 3 = 8**.

b) Fie t numărul de trandafiri existenți, n, numărul care se adaugă la t pentru a fi **24** sau numărul care depăşeşte **24**, atunci când repetăm de **5** ori pe t.

Putem reprezenta grafic astfel:



$t + 5\,t = 6\,t$, care reprezintă 48 trandafiri

(Am reprezentat $\boldsymbol{n}$ în fața numărului **24**, pentru a arăta echivalența între cele **2** segmente notate cu $\boldsymbol{n}$.) Se observă că **48**, adică **24 + 24**, reprezintă **6*t***, deoarece $\mathbf{5}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t} = \mathbf{6}\boldsymbol{t}$. Câți trandafiri erau? **48 : 6 = 8** (trandafiri).

<u>Rezolvarea 2</u>

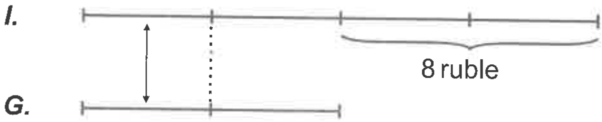
Fie $\boldsymbol{t}$ numărul de trandafiri existenți şi $\boldsymbol{n}$ numărul celor care mai trebuie pentru a fi **24**. Se pot scrie egalitățile: $\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n} = \mathbf{24}$ şi $\mathbf{5}\boldsymbol{t} = \mathbf{24} + \boldsymbol{n}$.

Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{n}$ în a doua egalitate, se obține: $\mathbf{5}\boldsymbol{t} = \mathbf{24} + (\mathbf{24} - \boldsymbol{t})$.

Prin adunarea lui $\boldsymbol{t}$ la fiecare membru, rezultă: $\mathbf{6}\boldsymbol{t} = \mathbf{48}$; deci $\boldsymbol{t} = \mathbf{8}$.

47. Dacă diferența de **8** ruble se menține şi după cheltuirea acelor sume, rezultă că s-au cheltuit sume egale; deci, o pătrime din suma Irinei reprezintă tot atât cât o jumătate din suma lui Ghennadi.

Grafic (Notăm sumele cu inițialele celor doi copii):

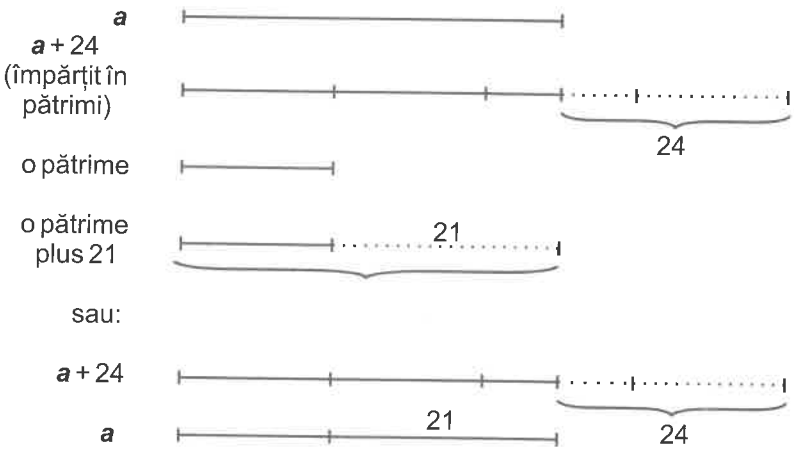


Câte ruble avea Irina? $\mathbf{8 : 2 \times 4 = 16}$.

Câte ruble avea Ghennadi? $\mathbf{2 \times 4 = 8}$ (ruble).

48. <u>Rezolvarea 1</u>

Fie $\boldsymbol{a}$ numărul natural inițial. Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen, rezultă că $\frac{3}{4}$ din $(\boldsymbol{a} + \mathbf{24})$ reprezintă **45**, căci **21 + 24 = 45**.

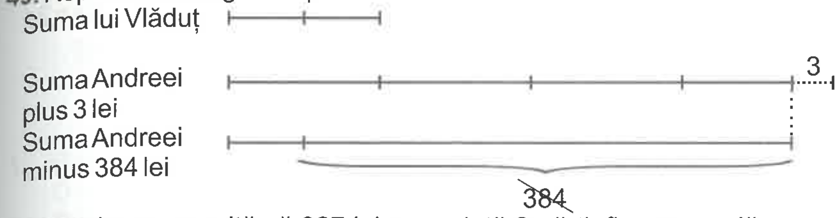
Atunci $\boldsymbol{a} + \mathbf{24} = \mathbf{45 : 3 \times 4 = 60}$, iar $\boldsymbol{a} = \mathbf{60 - 24 = 36}$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Fie $\boldsymbol{a}$ numărul natural. Din enunț rezultă:

$$\frac{1}{4}(a + 24) + 21 = a \Leftrightarrow \frac{1}{4}a + 6 + 21 = a \Leftrightarrow 27 = \frac{3}{4}a \Leftrightarrow a = 27 : 3 \times 4 = 36.$$

49. Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen, rezultă că **387** lei reprezintă **9** părți, fiecare egală cu suma Andreei micşorată cu **384** lei , căci **1 + 4 × 2 = 9** (părți), iar **384 + 3 = 387** (lei).

Câți lei avea Andreea? **387 : 9 + 384 = 43 + 384 = 427** (lei).

Câți lei avea Vlăduț? **(427 + 3) : 5 = 86** sau **(427 – 384) × 2 = 86** (lei).

50. Rezolvarea 1

Dacă fiecare cantitate se micşorează cu câte **30** kg, rezultă că diferența de **240** kg (căci **1 170 – 930 = 240**) *se menține* şi atunci când raportul dintre mărimi ajunge la $\frac{3}{4}$. Deci cantitatea de pere va reprezenta **3** părți egale, iar cea de mere, **4** asemenea părți.

Dacă vor fi cu **240** kg mai multe mere decât pere, rezultă că **240** kg fructe reprezintă o parte.

Câte kg de pere vor rămâne? **3 × 240 = 720** (kg).

Sau: Câte kg de mere vor rămâne? **4 × 240 = 960**.

Câte kg de pere s-au scos în total? adică **930 – ? = 720** (sau: **1 170 – ? = 960**). **930 – 720 = 210** (kg pere) sau **1 170 – 960 = 210** (kg mere).

În câte zile se scot **210** kg de fructe? **210 : 30 = 7**.

Pentru alte soluții, a se vedea rezolvările de la problemele **26** şi **27**.

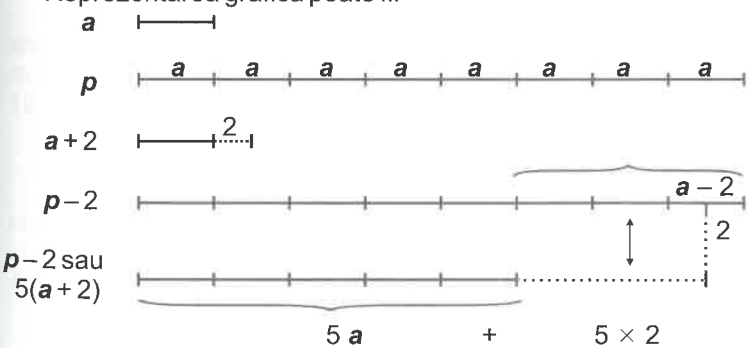
51. Rezolvarea 1

Notăm numărul elevilor prezenți inițial cu p, al celor absenți inițial cu a.

Din enunț, rezultă:

1) $p = 8a$, deoarece $a = \frac{1}{8}p$;
2) când din clasă au plecat doi elevi, numărul celor prezenți a devenit $p - 2$, iar al celor absenți $a + 2$ (ideea de transfer între mărimi, care nu este sesizată uşor);
3) $p - 2 = 5(a + 2)$, pentru că $a + 2 = \frac{1}{5}(p - 2)$.

Reprezentarea grafică poate fi:



Din compararea ultimelor reprezentări ale numărului de elevi prezenți a doua oară rezultă că **12** elevi reprezintă $\mathbf{3a}$, căci $\mathbf{5\times2+2=12}$, iar $\mathbf{8a-5a=3a}$.

Câți elevi erau absenți la început? $\mathbf{12:3=4}$.

Câți elevi erau prezenți inițial? $\mathbf{8\times4=32}$.

Verificare: $\mathbf{\frac{1}{8}\times32=4;\ \frac{1}{5}(32-2)=4+2 \Leftrightarrow 6=6}$.

Rezolvarea 2

Inițial raportul este $\mathbf{\frac{8}{1}}$, adică numărul elevilor prezenți inițial reprezenta **8** părți, iar al celor absenți, o parte.

Câte părți trebuie să luăm din cele **8**, pe care să le adăugăm la o parte ca să obținem raportul $\mathbf{\frac{5}{1}}$?

(**8** părți – **1** parte) : (**1** parte + **1** parte) = $\mathbf{3\frac{1}{2}}$;

(**8** părți – **2** părți) : (**1** parte + **2** părți) = **2**.

Se observă că raportul se micşorează. Rezultă că acei **2** elevi care au plecat nu reprezentau o parte, ci unități fracționare dintr-o parte.

Dar ce fel de unități fracționare?

Transformăm fiecare parte în doimi (sau în sferturi etc.)

(**16** doimi – **1** doime) : (**2** doimi + **1** doime) = **5**.

Rezultă că **2** reprezintă o jumătate din numărul elevilor absenți inițial.

Deci erau absenți **4** elevi, căci $\mathbf{2\times2=4}$, iar prezenți erau **32** elevi, pentru că $\mathbf{8\times4=32}$ sau $\mathbf{16\times2=32}$.

Rezolvarea 3

Fie $\boldsymbol{p}$ numărul elevilor prezenți, $\boldsymbol{a}$, numărul elevilor absenți inițial.

Din enunț rezultă: $\mathbf{p=8a}$ şi $\mathbf{5(a+2)=p-2}$. Înlocuind $\boldsymbol{p}$ în a doua relație, se obține: $\mathbf{5a+10=8a-2 \Leftrightarrow 10=3a-2 \Leftrightarrow a=4;\ p=8\times4=32}$.

CAPITOLUL AL V–LEA

Probleme în care sunt combinate relaţiile de sumă, diferenţă şi raport. Rezolvări

1. Rezolvarea 1

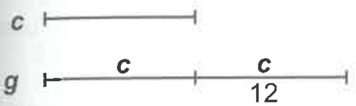
Din afirmaţia ***27** din ele nu sunt găini*, rezultă că **27** sunt curci şi raţe.

Din afirmaţia ***39** nu sunt curci*, rezultă că **39** sunt găini şi raţe.

Notând cu $\boldsymbol{r}$ numărul de raţe, cu $\boldsymbol{c}$, numărul de curci, cu $\boldsymbol{g}$, numărul de găini, se pot scrie egalităţile: $\boldsymbol{r+g=39}$ şi $\boldsymbol{r+c=27}$.

Din aceste două relaţii rezultă că numărul de găini este mai mare decât numărul curcilor cu **12**. (De ce? Pentru că la acelaşi număr de raţe se adaugă numere diferite ca să se obţină sume diferite; cu cât este mai mare numărul de găini faţă de cel al curcilor, cu atât este mai mare suma a doua faţă de prima, iar $\boldsymbol{39-27=12}$.)

Cealaltă relaţie arată că numărul găinilor este de **2** ori mai mare decât al curcilor. Grafic, putem reprezenta aceste relaţii:



Se observă că avem o problemă simplă de diferenţă şi raport. Deci, numărul de curci reprezintă o parte, adică **12**, numărul de găini este **24**, căci $\boldsymbol{2\times12=24}$; raţe sunt **15**, deoarece $\boldsymbol{27-12=15}$.

Rezolvarea 2. *Comparaţie prin scădere* (cu **2** variante):

a) Păstrând notaţiile de la rezolvarea **1**, putem scrie:

$\boldsymbol{r+c=27}$ şi

$\boldsymbol{r+g=39}$. Dacă $\boldsymbol{g=2c}$, a doua relaţie poate fi scrisă şi astfel:

$\boldsymbol{r+2c=39}$ şi

$\boldsymbol{r+c=27}$. Scăzând egalităţile, membru cu membru, rezultă:

$\boldsymbol{c=12}$. Atunci: $\boldsymbol{r=27-12=15}$; $\boldsymbol{g=2\times12=24}$.

b) $\boldsymbol{r+c=27}$ şi

$\boldsymbol{r+g=39}$. Dacă adunăm, membru cu membru, egalităţile, rezultă:

$\boldsymbol{r+r+c+g=66}$. Înlocuim pe $\boldsymbol{g}$ cu $\boldsymbol{c+c}$ şi obţinem:

$\boldsymbol{r+c+r+c+c=66}$. Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{r+c}$ cu **27**, rezultă:

$\boldsymbol{27+27+c=66}$, de unde $\boldsymbol{c=66-54=12}$; $\boldsymbol{r=15}$; $\boldsymbol{g=24}$.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Dacă presupunem că era o curcă, pentru a se păstra raportul dat (găini erau de **2** ori mai multe decât curci), rezultă că erau **2** găini, adică cu **1** mai mult; în fapt el avea cu **12** găini mai mult decât curci, adică dublul numărului **12**, deoarece trebuie să fie **12** găini pentru tot atâtea curci şi încă **12** în plus.

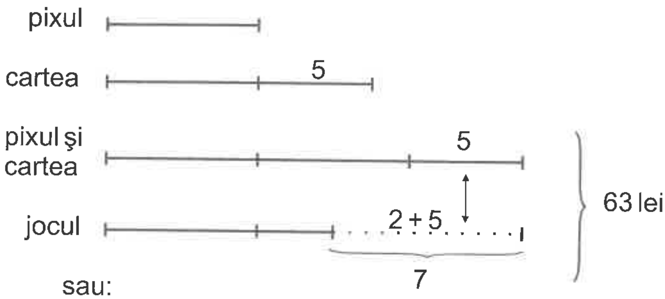
Deci erau **24** de găini, **12** curci şi **15** raţe, căci $\boldsymbol{27-12=15}$.

Rezolvarea 4. *Algebric*

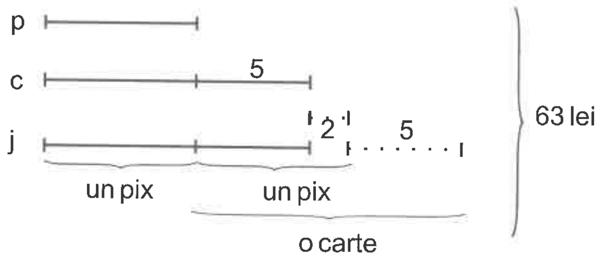
Notând cu $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}$ şi $\boldsymbol{g}$ numărul de curci, raţe şi, respectiv, de găini, se pot scrie: $\boldsymbol{r+c=27}$; $\boldsymbol{r+g=39}$; $\boldsymbol{g=2c}$. Din prima relaţie rezultă: $\boldsymbol{r=27-c}$. Înlocuim pe $\boldsymbol{r}$ şi pe $\boldsymbol{g}$, în funcţie de $\boldsymbol{c}$, în a doua relaţie, obţinem: $\boldsymbol{27-c+2c=39\Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow 27+c=39}$, rezultă $\boldsymbol{c=39-27=12}$; $\boldsymbol{g=2\times12=24}$; $\boldsymbol{r=15}$.

2. Rezolvarea 1.

Grafic, putem reprezenta astfel *prețurile obiectelor*:



sau:



Din prima reprezentare se observă că dacă la prețul jocului s-ar mai adăuga **2** lei, adică **7 – 5 = 2**, atunci el ar fi egal cu dublul prețului pixului. Rezultă că, dacă la prețul total adăugăm **2** lei şi scădem **5** lei (diferența de preț dintre carte şi pix), obținem prețul pentru **4** pixuri. Câți lei costă **4** pixuri? **63 + 2 – 5 = 60**. Cât costă un pix? **60 : 4 = 15**. Câți lei costă cartea?

15 + 5 = 20. Câți lei costă jocul? **15 + 20 – 7 = 28**.

Rezolvarea 2

Dacă din prețul total scădem **7** lei (cu cât este mai ieftin jocul decât cartea şi pixul la un loc), obținem prețul pentru două jocuri. Cât costă **2** jocuri? **63 – 7 = 56**. Câți lei costă un joc? **56 : 2 = 28**.

De aici, mai multe *variante*:

a) Câți lei costă **2** pixuri? **(28 + 7) – 5 = 30**; un pix = **30 : 2 = 15**;
Câți lei costă cartea? **15 + 5 = 20**

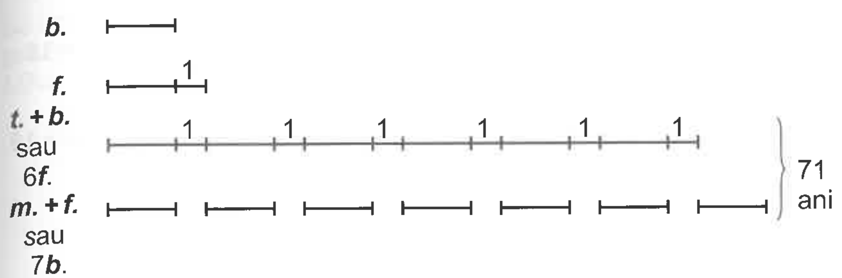
b) Câți lei costă **2** cărți? **28 + 7 + 5 = 40**. Dar o carte? **40 : 2 = 20**. Dar un pix? **20 – 5 = 15**.

c) Dacă jocul costă **28** de lei, cartea şi pixul costă la un loc **35** lei, adică **63 – 28 = 35**. Atunci un pix costă **15** lei, adică **(35 – 5) : 2 = 15**, iar o carte costă **20** de lei.

3. Rezolvarea 1 (fiul = băiatul = ***b***)

În reprezentarea grafică, începem cu numărul mai mic, vârsta băiatului; vârsta fiicei, fiind un număr consecutiv față de vârsta băiatului, este mai mare cu **1** an.

(Notații: literele reprezintă vârsta fiecăruia) *Grafic*:



În ultimele două repezentări, observăm că sunt cuprinse toate mărimile date, deci suma de **71** este constituită din aceste mărimi.

A fost nevoie şi de primele reprezentări pentru a arăta câte părţi constituie celelalte sume parţiale.

Câte părţi, fiecare egală cu vârsta fiului, sunt în suma de **71**? **6 + 7 = 13**. Care este suma a **13** părţi egale? **71 – (6 × 1) = 65**.

Care e vârsta băiatului? **65 : 13 = 5**.

Care e vârsta fiicei? **5 + 1 = 6**.

Care e vârsta tatălui?

Dacă vârsta tatălui şi a băiatului la un loc cuprinde de **6** ori vârsta fiicei, rezultă că ei au la un loc **36** de ani, căci **6 × 6 = 36**.

Deci: **5** + ? = **36**, adică tatăl are **31** de ani, pentru că **36 – 5 = 31**.

Se observă că la acei **6** ani ai fiicei dacă adăugăm vârsta mamei se obţin **35** de ani.

Rezultă că mama are vârsta de **29** ani, deoarece **35 – 6 = 29**.

Verificare: **5 + 6 + 29 + 31 = 71; 5 + 31 = 6 × 6 = 36; 6 + 29 = 7 × 5 = 35; 5 + 1 = 6**.

Rezolvarea 2

Notând mărimile cu iniţialele cuvintelor, se pot scrie:

$f + b = 1$; $t + b = 6f$; $m + f = 7b$.

Înlocuim în sumă prin cea mai mică mărime.

Dacă $t + b = 6f \Leftrightarrow t + b = 6(b + 1) \Leftrightarrow t = 5b + 6$;

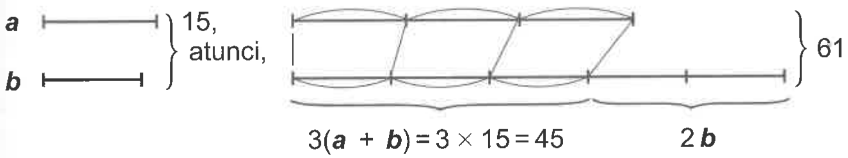
$m + f = 7b \Leftrightarrow m + b + 1 = 7b \Leftrightarrow m = 6b - 1$; atunci

suma $= b + b + 1 + (5b + 6) + (6b - 1) = 71 \Leftrightarrow 13b + 6 = 71 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = (71 - 6) : 13 = 5$; $f = 6$; $m = 6 \times 5 - 1 = 29$; $t = 5 \times 5 + 6 = 31$.

4. Rezolvarea 1

Fie numerele **a** şi **b**, grafic le putem reprezenta (nu avem nici o informaţie despre mărimea lor, ca atare, le vom reprezenta în mod arbitrar) astfel:



Din desen, rezultă că $2b = 61 - 3 \times 15 = 16$, adică $b = 16 : 2 = 8$; $a = 15 - 8 = 7$.

Rezolvarea 2. *(Comparaţie prin scădere)*

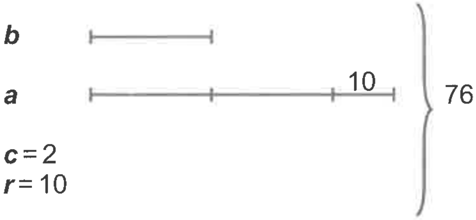
$$\begin{matrix} I. & a + b = 15 \,/\times 3 \\ II. & 3a + 5b = 61 \end{matrix} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3a + 3b = 45 \\ 3a + 5b = 61 \end{matrix} \Bigg\} \; II - I \Leftrightarrow 2b = 16, \text{ deci } b = 8;$$

$$a = 15 - 8 = 7.$$

Rezolvarea 3. *Algebric*

$a+b=15 \Leftrightarrow a=15-b; 3(15-b)+5b=61 \Leftrightarrow 45-3b+5b=61 \Leftrightarrow 2b=16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b=8; a=15-8=7$.

5. Fie numerele a şi b, se pot scrie: $a : b = 2$, (rest **10**), adică $a = 2b + 10$. Rezultă reprezentarea grafică:



Din desen se observă că $3b = 76 - 10 - 2 - 10 = 54$; $b = 54 : 3 = 18$; $a = 2 \times 18 + 10 = 46$.

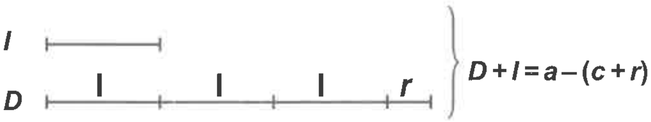
Verificare: $46 = 2 \times 18 + 10$; $46 + 18 + 2 + 10 = 76$.

Sau: Care este suma dintre a şi b? $76 - 2 - 10 = 64$.

Care ar fi suma, dacă împărţirea ar fi exactă? **64 – 10 = 54**. Câte părţi, fiecare egală cu b, sunt în suma **54**? **1** parte + **2** părţi = **3** părţi.

Care este numărul b? **54 : 3 = 18**. Care este numărul a? $2 \times 18 + 10 = 46$.

6. *Observaţie*: Această problemă generalizează relaţiile întâlnite în problemele de tipul problemei **5**. Fie c câtul împărţirii date. Dacă $D + I + c + r = a$, rezultă $D + I = a - c - r = a - (c + r)$. Grafic, relaţia dintre D şi I poate fi:



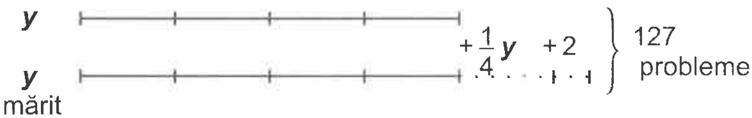
Se observă că dacă îl scădem pe r din $D + I$, obţinem: $D + I - r = 4I$. Dar $4I = a - (c + r) - r = a - (c + 2r)$. Înlocuind pe c cu **3** în ultima egalitate scrisă,

rezultă $4I = a - (3 + 2r) \Leftrightarrow I = \dfrac{a - (3 + 2r)}{4}$.

7. Reprezentăm numărul de probleme pe care le-a rezolvat Mihai printr-un segment, pe care îl împărţim în patru. De ce? Pentru că la acesta trebuie să adăugăm sfertul său, iar sfertul se obţine împărţind întregul în **4** părţi la fel de mari. Deci:

Rezolvarea 1. *Grafic*:

Fie y numărul de probleme pe care le-a rezolvat Mihai. Putem reprezenta grafic astfel:



Dacă din **127** scădem **2**, obţinem suma a **5** părţi, fiecare parte fiind egală cu un sfert din numărul inițial de probleme rezolvate. Câte probleme reprezintă un sfert din acel număr? **(127 – 2) : 5 = 25**. Câte probleme rezolvase Mihai până la acel moment? **4** sferturi, adică **4×25 = 100** (probleme).

Verificare: **100 + 100 : 4 + 2 = 127**.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de la rezolvarea anterioară. Se pot scrie egalitățile:

$$y+\frac{1}{4}y+2=127 \Leftrightarrow \frac{5}{4}y=125 \Leftrightarrow y=125:5\times4 \Leftrightarrow y=100.$$

8. În asemenea probleme, trebuie să căutăm o sumă pe care putem să o organizăm în părți echivalente; de obicei, ca unitate se ia partea mai mică. Pentru ca mărimea (cantitatea) din ziua a treia să constituie o jumătate din mărimea a doua, e nevoie să adăugăm **1** kg, iar pentru ca prima cantitate să conțină **3** părți, fiecare egală cu cea din ziua a doua, trebuie să o micşorăm cu **1** kg.

Grafic, raportul cantităților vândute este:

Considerând că în prima zi a vândut mai puțin cu **1** kg, iar în a treia zi mai mult cu **1** kg, decât cantitățile date, observăm că:

– totalul rămâne nemodificat;

– în a treia zi a vândut cât jumătate din cantitatea din a doua zi;

– în a doua zi a vândut **2** părți, fiecare egală cu cantitatea modificată (mărită cu **1**) din a treia zi;

– în prima zi a vândut o cantitate care poate fi organizată în **6** părți, fiecare egală cu cantitatea din a treia zi (modificată).

Câte părți, fiecare egală cu jumătate din cantitatea din ziua a doua (sau cu cantitatea modificată din ziua a treia) sunt în total? **1 + 2 + 6 = 9**.

Care este cantitatea ce poate fi organizată în **9** asemenea părți (Care este totalul?)? **1 809 – 1 + 1 = 1 809** (totalul rămâne nemodificat; de fapt putem considera că am transferat **1** kg din **I** în a **III**-a zi).

Câte kg a vândut în ziua a treia? **1 809 : 9 – 1 = 200**.

Câte kg a vândut în a doua zi? **(200 + 1)×2 = 402**.

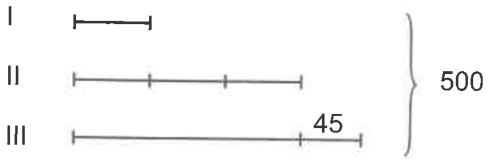
Câte kg a vândut în prima zi? **6×201 + 1 = 1 207** sau **3×402 + 1 = 1 207**.

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie ***y*** cantitatea vândută în a treia zi; atunci în ziua a doua ar fi **(*y* + 1)×2**, iar în prima zi, **(*y* + 1)×2×3 + 1**; suma = **1 809 = *y* + (*y* + 1)×2 + (*y* + 1)×2×3 + 1**, adică ***y* + 2*y* + 2 + 6*y* + 6 + 1 = 1 809**, echivalent cu **9*y* = 1 809 – 9 = 1 800**, de unde ***y* = 1 809 : 9 = 200**; în ziua a doua: **(200 + 1)×2 = 402**; în prima zi: **3×402 + 1 = 1 207**.

9. Rezolvarea 1

Din enunț se observă că primul este cel mai mic, iar al treilea este cel mai mare. În reprezentarea grafică pornim de la numărul mai mic, astfel:



Se observă că pe al doilea îl putem organiza în trei părți, fiecare egală cu primul număr, iar din al treilea trebuie să scădem **45** ca să-l putem organiza în **3** asemenea părți.

Care este suma ce poate fi organizată în părți, fiecare egală cu primul număr? **500 – 45 = 455**. În câte părți fiecare egală cu primul număr, poate fi organizată suma de **455**? **1 + 3 + 3 = 7**. Care este primul număr? **455 : 7 = 65**. Care este al doilea număr? **3×65 = 195**. Care este al treilea număr?

195 + 45 = 240 sau **3×65 + 45 = 240**.

Verificare: **65 + 195 + 240 = 500; 195 : 65 = 3; 240 – 195 = 45**.

Rezolvarea 2. *Algebric*

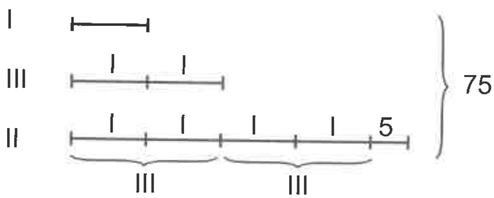
Fie ***y*** primul număr, al doilea este **3*y***, iar al treilea **3*y* + 45**, atunci:

$y + 3y + 3y + 45 = 500 \Leftrightarrow 7y + 45 = 500 \Leftrightarrow y = (500 - 45) : 7 = 65$.

Al doilea număr: **3×65 = 195**; al treilea număr: **3×65 + 45 = 240**.

10. Rezolvarea 1

Dacă primul număr este jumătate din al treilea, rezultă că este mai mic de **2** ori sau că al treilea este mai mare decât primul de **2** ori. Din afirmația "dacă împărțim pe al doilea la al treilea obținem câtul **2** şi restul **5**", rezultă că al doilea este mai mare cu **5** decât dublul celui de-al treilea număr, adică **II = 2III + 5**. După această *reformulare*, este uşor să reprezentăm grafic numerele:



Se observă că şi al doilea poate fi organizat în **4** părți, fiecare egală cu primul număr, dacă scădem din el numărul **5**.

Care este suma ce poate fi organizată în părți, fiecare parte fiind egală cu primul număr? **75 – 5 = 70**.

Câte asemenea părți cuprinde suma **70**? **1 + 2 + 4 = 7**.

Care este primul număr? **70 : 7 = 10**.

Care este al doilea număr? **4×10 + 5 = 45**.

Care este al treilea număr? **2×10 = 20** (sau: al doilea = **2×20 + 5 = 45**).

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie ***y*** primul număr, al treilea este **2*y***; pentru al doilea, scriem enunțul: **II: III = 2** (rest **5**), înlocuim pe **III** cu **2*y***, atunci **II = 2×2*y* + 5**, adică **II = 4*y* + 5**, iar suma = $75 = y + 2y + 4y + 5 = 5$; $y = (75 - 5) : 7 = 10$; al treilea = **2×10 = 20**; al doilea = **4×10 + 5 = 45**.

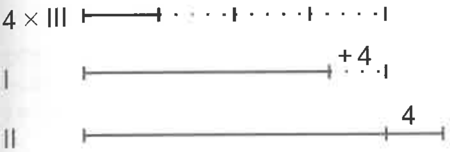
11. Rezolvarea 1

Pentru a organiza suma în **100** părți egale, luăm ca unitate cel mai mic număr. Se observă că îndeplineşte această condiție al treilea număr. De ce?

Pentru că pe al treilea “îl mărim de **4** ori” pentru a obține un număr egal cu primul mărit *cu* **4** sau cu al doilea micşorat *cu* **4**.

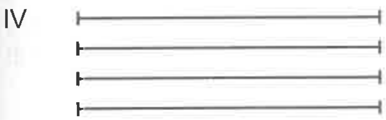
Fie acesta al treilea număr:

Îl mărim de **4** ori, adică îl repetăm de **4** ori, adăugându-i astfel încă **3** părți (punctat):



Față de acesta le reprezentăm şi pe primul şi pe al doilea. Nu ştim ce parte reprezintă numărul **4**, de aceea nu trebuie ca în desen să coincidă cu vreo parte delimitată.

Dacă al patrulea micşorat de **4** ori este egal cu unul dintre celelalte numere obținute astfel, rezultă că el are în realitate **4** asemenea părți, adică:



(Dacă micşorăm al patrulea număr de **4** ori, înseamnă că dăm deoparte **3** părți din el.) (Am notat numerele cu **I**, cu **II**, cu **III** şi, respectiv, cu **IV**).

Luând ca unitate numărul al treilea inițial, se observă că:
– primul mărit cu **4** are **4** părți, fiecare egală cu numărul al treilea;
– al doilea micşorat cu **4** are **4** asemenea părți;
– al patrulea număr (nemicşorat) are **16** asemenea părți, pentru că o parte are **4 III**, iar patru părți au de **4** ori mai mult, adică **4×4** părți au **16 III**;
– dacă transfer **4** de la **II** la **I**, suma totală nu se modifică.

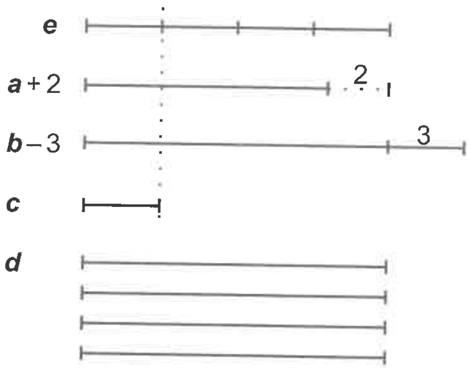
Câte părți,fiecare fiind egală cu numărul al treilea, sunt în suma **100**? **1 + 4 + 4 + 16 = 25**. Care este al treilea număr? **100 : 25 = 4**.
Nr. **I = 4×4 – 4 = 12**; **II = 4×4 + 4 = 20**; **IV = 4×4×4 = 64**.

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie ***y*** al treilea număr (e mai uşor să folosim relațiile de multiplicitate, nu de divizibilitate), atunci: **I = 4*y* – 4**, **II = 4*y* + 4**; **IV = 16*y***,
iar ***y* + 4*y* – 4 + 4*y* + 4 + 16*y* = 100**, de unde **25*y* = 100**, iar ***y* = 100 : 25 = 4**.
I = 4×4 – 4 = 12; **II = 4×4 + 4 = 20**; **IV = 16×4 = 64**.

12. Rezolvarea 1. (Asemănătoare cu cea anterioară)

Este mai uşor pentru că al cincilea număr, care nu se modifică, este luat ca termen de comparație. Fie cele **5** numere ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e***. Îl reprezentăm grafic pe **e**, având grijă să putem exprima a patra parte din el, căci al treilea trebuie "mărit de **4** ori ca să îl obținem pe al cincilea", adică al treilea este cât o pătrime din al cincilea:



Dacă prin micşorarea lui ***d*** de **5** ori se obține numărul ***e***, rezultă că, în realitate, ***d* = 5*e***. Organizăm suma **100** în părți egale cu cel mai mic, adică fiecare parte să fie egală cu numărul ***c***. Se observă că:

– ***e* = 4*c***;
– ***a*** mărit cu **2 = 4*c***;
– ***b*** micşorat cu **3 = 4*c***;
– ***d*** are **5*e***, adică are **20*c***. Câte părți, fiecare egală cu ***c***, ar fi în total?

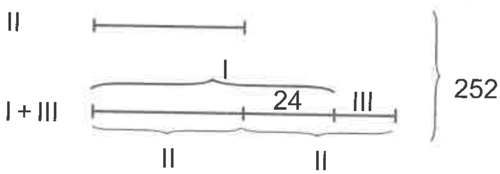
4 + 4 + 4 + 1 + 20 = 33. Care este suma ce poate fi organizată în **33** de părți egale? **100 + 2 – 3 = 99**. Care este numărul ***c***? **99 : 33 = 3**; ***e* = 4×3 = 12**; ***a* = 4×3 – 2 = 10**; ***b* = 4×3 + 3 = 15**; ***d* = 5×12 = 60**.

Rezolvarea 2. *Algebric* (mai accesibilă elevilor din clasa a **IV**-a)

Fie ***y*** al treilea număr (cel mai mic), atunci: **I = 4*y* – 2**; **II = 4*y* + 3**; **IV = 4*y***; **V = 5×4*y* = 20*y***, iar **4*y* – 2 + 4*y* + 3 + *y* + 4*y* + 20*y* = 100**, de unde **33*y* = = 100 – 1 = 99**, iar ***y* = 3** etc.

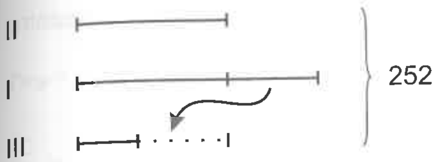
13. Rezolvarea 1

Grafic, sumele de bani ce constituie cele trei premii se pot reprezenta astfel:



Am notat sumele ce constituie cele trei premii cu **I**, cu **II** şi, respectiv, cu **III**. Începem reprezentarea cu al doilea, fiind mai mic decât primul; apoi îl reprezentăm pe primul care este cât al doilea plus **24**; când adăugăm pe al treilea în continuarea primului, obținem de **2** ori al doilea, adică **24 + III = II**.

Sau:



Deci, putem să privim suma de **252** ca fiind organizată în **3** părți, fiecare egală cu numărul al doilea. Care este valoarea premiului al doilea?

252 : 3 = 84 (lei). Care este valoarea premiului întâi? **84 + 24 = 108** (lei).

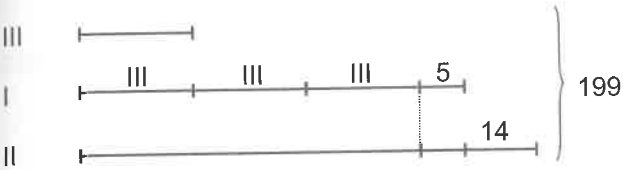
Cât era valoarea premiului al treilea? **252 – 108 – 84 = 60** (lei) sau **2×84 – 108 = 60** (lei).

Rezolvarea 2. *Algebric* (mai accesibilă pentru elevii clasei a **IV**-a)

Fie ***y*** valoarea premiului al doilea, atunci **I = *y* + 24**; pentru scrierea valorii premiului al treilea, să urmărim enunțul: **(I + III) : 2 = II**, adică **(*y* + 24 + III) = 2*y*** ⇔ **III = *y* – 24**. Atunci, ***y* + *y* + 24 + *y* – 24 = 252** ⇔ **3*y* = 252**, iar ***y* = 252 : 3 = 84**; **I = 84 + 24 = 108**; **III = 84 – 24 = 60.**

14. Din enunț rezultă că al treilea număr este cel mai mic, iar al doilea este cel mai mare.

Grafic:



Pentru a organiza suma în părți egale, trebuie să micşorăm primul număr cu **5**, iar pe al doilea cu **19**, adică cu **5 + 14**.

Câte părți, fiecare egală cu al treilea număr, pot fi? **1 + 3 + 3 = 7**.

Care este suma ce poate fi organizată în **7** asemenea părți?

199 – 5 – 5 – 14 = 175.

Care este numărul al treilea? **175 : 7 = 25.**

Care este primul număr? **3×25 + 5 = 80.**

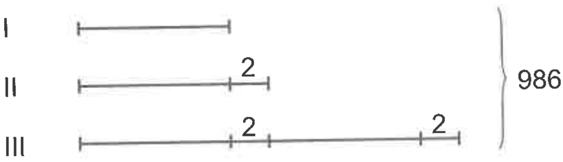
Dar al doilea număr? **80 + 14 = 94** sau **3×25 + 5 + 14 = 94.**

Rezolvarea algebrică seamănă cu rezolvarea anterioară.

15. Rezolvarea 1

(Se impune o interpretare gramaticală a enunțului: "Care număr este mai mic de **2** ori decât al treilea? Al doilea, pentru că subiectul pentru ultima parte a enunțului se subînțelege.")

Grafic:



Dacă pe al doilea îl micşorez cu **2**, iar din al treilea luăm **4**, obţinem patru părţi, fiecare egală cu primul număr.

Care este suma a **4** asemenea părţi? $\mathbf{986-2-4=980}$.

Care este primul număr? $\mathbf{980:4=245}$.

Care este al doilea număr? $\mathbf{245+2=247}$.

Dar al treilea număr? $\mathbf{2\times 247=494}$.

În altă variantă, putem determina suma a **4** părţi, fiecare egală cu al doilea număr, adică $\mathbf{986+2=988}$.

Care este al doilea număr? $\mathbf{988:4=247}$ etc.

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{y}$ primul număr, al doilea $\boldsymbol{y+2}$, al treilea $\boldsymbol{2(y+2)}$, adică $\boldsymbol{2y+4}$.

Atunci $\boldsymbol{986=y+y+2+2y+4 \Leftrightarrow 986=4y+6 \Leftrightarrow y=(986-6):4 \Rightarrow}$
$\boldsymbol{\Rightarrow y=245}$; al doilea $\mathbf{=245+2=247}$; al treilea $\mathbf{=2\times 245+4=494}$.

16. Rezolvarea 1

Dacă atunci când pe al doilea număr îl micşorez de **4** ori, obţin primul număr micşorat cu **2**, rezultă că în suma de **222** micşorată cu **2** vor fi **5** părţi, fiecare egală cu primul număr micşorat cu **2**.

Care ar fi primul număr micşorat cu **2**? $\mathbf{(222-2):5=44}$.

Care este al doilea număr? $\mathbf{44\times 4=176}$.

Care este primul număr? $\mathbf{44+2=46}$.

Grafic:

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{y}$ primul număr, al doilea număr $\boldsymbol{4(y-2)}$, iar suma **222** va fi egală cu $\boldsymbol{y+4y-8}$.

Deci $\boldsymbol{5y=230}$, iar $\boldsymbol{y=230:5=46}$; al doilea număr $\mathbf{=4\times 46-8=176}$.

17. Din ultima parte a enunţului, rezultă că suma primelor două numere reprezintă **3** părţi, fiecare parte fiind egală cu primul număr.

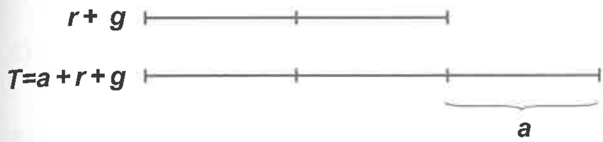
Deci suma lor trebuie să fie un număr divizibil cu **3**.

Rezultă că din **14** trebuie să scădem un număr, al treilea, iar ceea ce rămâne trebuie să se împartă exact la **3**. Dar numărul al treilea este cel mai mare dintre cele date. Atunci: **14 – 9** (este număr de o cifră) **= 5**, dar **5** nu se împarte exact la **3**; $\mathbf{14-8=6}$, iar $\mathbf{6:3=2}$.

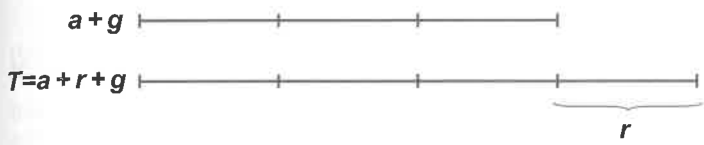
Deci, primul număr este **2**, al doilea este **4**, căci $\mathbf{2\times 2=4}$, iar al treilea este **8**.

18. Notăm *numărul* bilelor roşii cu ***r***, al celor galbene cu ***g***, iar al celor albastre cu ***a***. Totalul îl notăm cu ***T***.

Dacă bilele albe sunt cât o doime din toate celelalte bile, înseamnă că, dacă la celelalte bile adăugăm bilele albe (care reprezintă încă o parte), obţinem numărul total de bile; acest număr total va fi organizat în **3** părţi, fiecare parte fiind egală cu numărul bilelor albe; deci numărul bilelor albe este cât o treime din total, adică:



Dacă bilele roşii reprezintă o treime din celelalte, rezultă că acestea sunt cât o pătrime din total, adică:



Rezultă: $\frac{1}{3}T + \frac{1}{4}T + g = T \Leftrightarrow \frac{7}{12}T + g = T \Leftrightarrow \frac{5}{12}T = g$.

Dar $g = 10$ bile; rezultă $\frac{5}{12}T$ reprezintă **10** bile.

Câte bile erau în acea cutie (cât este T)? $10 : 5 \times 12 = 24$.

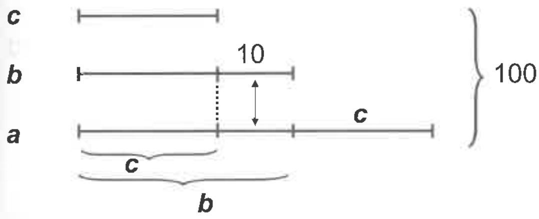
19. Rezolvarea 1

Fie numerele a, b şi, respectiv, c.

Din relaţia $a = b \times 1 + c$, în care $c < b$, deoarece c este restul acelei împărţiri, rezultă că **a** este mai mare decât b cu c.

Din a doua afirmaţie rezultă că $b = c + 10$.

Reprezentarea grafică poate fi:



Căutăm să organizăm suma **100** în părţi egale cu cel mai mic număr, adică cu c.

Se observă că dacă din b scădem pe **10**, obţinem c, iar dacă din a scădem **10**, obţinem $2c$.

Câte asemenea părţi am obţine? $1 + 1 + 2 = 4$.

Care este suma care poate fi organizată ca $4c$? $100 - 20 = 80$.

Care este numărul c? $80 : 4 = 20$.

Cât este b? $20 + 10 = 30$.

Cât este a? $30 + 20 = 50$ sau $20 + 20 + 10 = 50$.

Rezolvarea 2

Pe scurt, putem scrie: $a + b + c = 100$ şi $a = b \times 1 + c$, în care $c < b$.

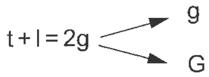
Dacă înlocuim, în prima egalitate, pe $b + c$ cu a, obţinem $2a = 100$, de unde $a = 50$. Rezultă $b + c = 50$. Dar b este mai mare decât c cu **10**.

Aplicând formula pentru determinarea numărului mai mare în cazul problemelor de sumă şi diferenţă (a se vedea rezolvarea **4** de la problema **1**, capitolul al II-lea), obținem: $\boldsymbol{b = (50 + 10) : 2 = 30}$; $\boldsymbol{c = 30 - 10 = 20}$.

20. Rezolvarea 1

Notăm numărul trandafirilor cu ***t***, al lalelelor cu ***l***, al garoafelor cu ***g***.

Din enunț rezultă:

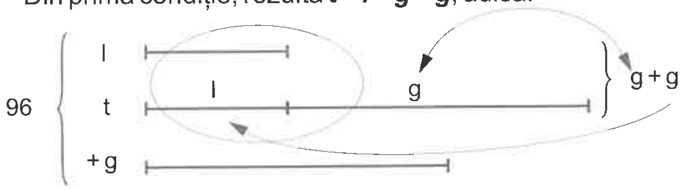


g + l = t

Din ultima condiție a enunțului, rezultă că trandafirii sunt mai mulți decât lalelele, adică:

Tot din a doua condiție, rezultă că segmentul notat cu ? reprezintă tocmai numărul de garoafe.

Din prima condiție, rezultă $\boldsymbol{t + l = g + g}$; adică:



Rezultă: $\boldsymbol{g = 2l}$. Dacă la $\boldsymbol{t + l}$ mai adăugăm numărul de garoafe, obținem totalul de flori.

Se observă că putem organiza suma de **96** în **3** părți, fiecare parte fiind egală cu numărul de garoafe.

Câte garoafe erau? **96 : 3 = 32**.

Câte lalele erau? **32 : 2 = 16**.

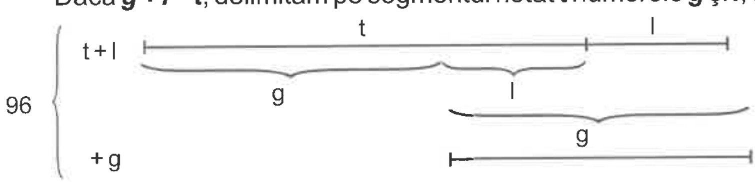
Câți trandafiri erau? **32 + 16 = 48**.

Verificare: **48 + 16 = 2 × 32 = 64**; **32 + 16 = 48**; **32 + 16 + 48 = 96**.

Rezolvarea 2. Tot grafic, cu mai multe variante:

Păstrăm notațiile anterioare. Reprezentăm printr-un segment numărul de trandafiri şi, în continuare, un alt segment pentru numărul de lalele, astfel:

Dacă $\boldsymbol{g + l = t}$, delimităm pe segmentul notat ***t*** numerele ***g*** şi ***l***, astfel:



a) Din enunț, rezultă: $\boldsymbol{t + l = g + g}$. Din desen, rezultă: $\boldsymbol{2l = g}$.
Deci: $\boldsymbol{3g = 96}$, iar $\boldsymbol{g = 32}$; **l = 32 : 2 = 16**; **t = 32 + 16 = 48**.

b) Dacă $\boldsymbol{2l = g}$, iar $\boldsymbol{t + l = 2g}$, rezultă $\boldsymbol{t + l = 4l}$, iar $\boldsymbol{t = 3l}$.

Deci: $96 = l + 2l + 3l \Leftrightarrow 96 = 6l$; $l = 16$; $g = 32$; $t = 48$.

c) Dacă $g + l + t = 96$, $g + l = t$, iar $t = 3l$, rezultă $2t = 96$, iar $t = 48$; $l = 48 : 3 = 16$; $g = 32$.

21. Când dublez numărul de caiete din primul teanc, repet numărul de caiete din acest teanc de două ori, adică îi mai adaug încă o parte la fel de mare ca aceea care era deja.

Rezolvarea 1

Din transferul preconizat, rezultă că în al doilea teanc erau inițial de **3** ori mai multe caiete decât în primul teanc și încă **4**.

De ce? Pentru că (deocamdată îl neglijăm pe **4**), atunci când intervine transferul, în primul teanc vor fi două părți, iar în al doilea vor rămâne tot atâtea, adică:

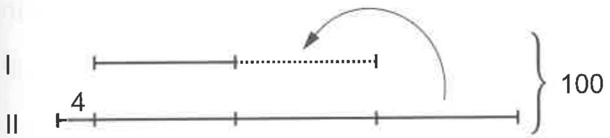
1 parte + ? părți = **3** părți – ? părți. Rezultă:

1 parte + **1** parte = **3** părți – **1** parte.

Deci numărul de caiete din primul teanc constituie inițial o parte, iar cel din al doilea teanc, **3** asemenea părți și încă **4** caiete.

(Notăm numărul inițial de caiete din fiecare teanc cu **I** și, respectiv, cu **II**.)

Reprezentarea grafică a mărimilor:



Care este suma ce poate fi organizată în **4** părți, fiecare parte fiind egală cu numărul inițial de caiete din primul teanc? $\mathbf{100 - 4 = 96}$.

Câte caiete erau în primul teanc? $\mathbf{96 : 4 = 24}$.

Câte caiete erau în al doilea teanc? $\mathbf{3 \times 24 + 4 = 76}$.

Verificare: $\mathbf{76 + 24 = 100}$.

$\mathbf{76 - 24 - 4 = 24 + 24 = 48}$.

Rezolvarea 2

După transferul preconizat rezultă **2** părți, fiecare egală cu numărul de caiete din orice teanc, dacă din al doilea dăm deoparte **4** caiete.

Care este suma a două asemenea părți? $\mathbf{100 - 4 = 96}$.

Câte caiete ar fi în primul teanc? $\mathbf{96 : 2 = 48}$. Dar **48** este un număr obținut prin dublarea altuia. Care este acel număr? adică $\mathbf{2 \times ? = 48}$. Deci, numărul de caiete din primul teanc era de **24**, pentru că $\mathbf{48 : 2 = 24}$.

Câte caiete erau în al doilea teanc? $\mathbf{100 - 24 = 76}$.

Rezolvarea 3. *Algebric*

Fie z și y numărul de caiete din primul și, respectiv, din al doilea teanc. Se pot scrie: $z + y = 100$ și $y - 4 - z = 2z$.

Rezultă: $100 - z - z - 4 = 2z \Leftrightarrow 96 - 2z = 2z \Leftrightarrow 96 = 4z \Leftrightarrow z = 96 : 4 = 24$; $y = 100 - 24 = 76$.

22. Rezolvarea 1

Într-o privire analitică a problemei concluzionăm că:

– pentru a afla cât trebuie să mai adune fiecare ca să contribuie cu sume egale, e necesar să aflăm *câți lei are fiecare* și *câți lei constituie* *contribuția fiecăruia*;

– pentru a afla câți lei are fiecare, trebuie să determinăm suma totală a celor trei copii.

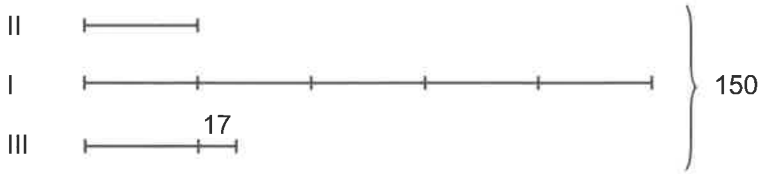
Deci: Câți lei au cei trei copii împreună? **450 – 300 = 150**.

Cu câți lei trebuie să contribuie fiecare? **450 : 3 = 150**.

Ca să contribuie fiecare cu câte **150** lei, la suma pe care o are adaugă suma ce urmează să o mai adune.

Câți lei are fiecare?

Observăm că al doilea copil are cel mai puțin, adică:



(Am notat sumele pe care le are fiecare copil cu **I**, cu **II** şi, respectiv, cu **III**.)

Dacă din **150** de lei scădem **17** lei, obținem suma a **7** părți, fiecare egală cu suma de bani pe care o avea cel de-al doilea copil.

Câți lei avea cel de-al doilea copil? **(150 – 17) : 7 = 133 : 7 = 19**.

Câți lei avea primul copil? **5 × 19 = 95**.

Câți lei avea al treilea? **19 + 17 = 36**.

Câți lei îi mai trebuie fiecăruia pentru a contribui cu câte **150** lei?

Adică:

I. **95** + ? = **150**; **II**. **19** + ? = **150**; **III**. **36** + ? = **150**.

Câți lei îi mai trebuie primul copil? **150 – 95 = 55**.

Câți lei îi mai trebuie celui de-al doilea copil? **150 – 19 = 131**.

Câți lei îi mai trebuie celui de-al treilea copil? **150 – 36 = 114**.

Verificare: **55 + 131 + 114 = 300**
95 + 19 + 36 = 150
300 + 150 = 450.

Rezolvarea 2

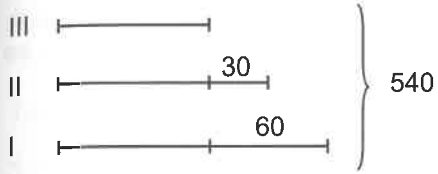
Fie $\boldsymbol{y}$ suma pe care o are al doilea copil şi $\boldsymbol{a}$ suma pe care trebuie să o mai strângă, $\mathbf{5}\boldsymbol{y}$ suma primului, $\boldsymbol{b}$ suma pe care trebuie să o mai adune, $\boldsymbol{y} + \mathbf{17}$ suma celui de-al treilea, $\boldsymbol{c}$ suma care îi mai trebuie, se pot scrie:

$$y + a + 5y + b + 17 + c = 450 \Leftrightarrow 7y + 17 + \underbrace{a + b + c}_{300} = 450 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = (450 - 300 - 17) : 7 = 19;\ 5y = 5 \times 19 = 95;\ y + 17 = 19 + 17 = 36;$$
$$19 + a = 95 + b = 36 + c = 450 : 3 = 150;\ a = 150 - 19 = 131,\ (\mathrm{II});$$
$$b = 150 - 95 = 55,\ (\mathrm{I});\ c = 150 - 36 = 114,\ (\mathrm{III}).$$

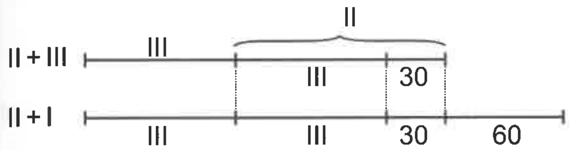
23. Rezolvarea 1

Se observă că al treilea număr este mai mic decât al doilea. Dacă suma primelor două numere este mai mare decât suma ultimelor două cu **60**, rezultă că primul este mai mare decât al treilea cu **60**. De ce? Pentru că atunci când la primul număr adaug pe al doilea, obțin o sumă cu **60** mai mare decât atunci când la al doilea îl adun pe al treilea. Deci, reprezentarea grafică (Notăm numerele cu **I**, **II** şi, respectiv, cu **III**):



Care este suma a **3** părți, fiecare egală cu al treilea număr? **540 – 30 – 60 = 450**. Care este al treilea număr? **450 : 3 = 150**. Dar al doilea? **150 + 30 = 180**. Dar primul număr? **150 + 60 = 210**. Sau, într-o altă *variantă grafică*: Plecăm tot de la diferența dintre al doilea şi al treilea:

Reprezentăm sumele date în enunț şi apoi îl înlocuim pe al doilea cu al treilea plus **30**, astfel:



De unde ştim cum să reprezentăm **I + II** față de **II + III**? Din enunț ştim că: **I = III + 60**, iar **II = III + 30**. Rezultă: **I + II = 2III + 30 + 60**.

Se observă că în prima reprezentare avem suma **II + III**, iar în a doua, suma **II + I**, deci se repetă **II**. Dacă **I + II + III = 540**, rezultă **I + II + II + III = 540 + II**. Dacă **II = III + 30**, rezultă **540 + II = 540 + 30 + III**. Din desen rezultă că **4III + 120 = 540 + 30 + III**, de unde **3III = 450**. Deci, **III = 150**, pentru că: **450 : 3 = 150**; **II = 180**, căci **150 + 30 = 180**; **I = 210**, deoarece **150 + 60 = 210**.

Rezolvarea 2

Fie cele trei numere a, b, c. Se pot scrie relațiile: $a + b + c = 540$; $a + b = b + c + 60$; $b = c + 30$. Înlocuind pe b în a doua relație, rezultă:

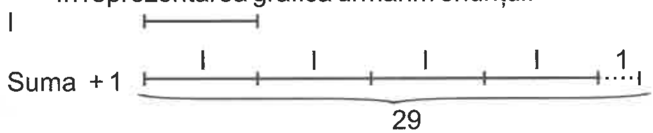
$c + 30 + a = c + 30 + c + 60$. Scăzând, din fiecare membru al egalității pe $c + 30$, obținem: $a = c + 60$. Înlocuind pe a şi pe b în prima egalitate, rezultă:

$c + 60 + c + 30 + c = 540 \Leftrightarrow c = (540 - 90) : 3 = 150$; $b = 150 + 30 = 180$; $a = 150 + 60 = 210$.

24. Notăm cele trei numere cu **I**, cu **II** şi, respectiv, cu **III**.

Rezolvarea 1

În reprezentarea grafică urmărim enunțul:



Din desen, rezultă că **4I = 29 – 1 = 28**. Deci, **I = 7**. Care este suma ultimelor două numere? **29 – 7 = 22**. Din enunț, rezultă că **II + III = 22**, iar **II = III + 6**. Este o problemă simplă de sumă şi diferență.

Putem apela la o nouă reprezentare grafică sau putem aplica formula de determinare a două numere, când se cunosc suma şi diferența lor (a se vedea rezolvarea **4** de la problema **1**, cap. **II**.).

Aplicând formula, obținem: **III = (22 – 6) : 2 = 8; II = (22 + 6) : 2 = 14**.

<u>Rezolvarea 2</u>

Fie numerele ***a***, ***b*** şi ***c***. Din relația **4*a* + 1 = 29**, rezultă: ***a* = (29 – 1) : 4 = 7**.

Atunci ***b* + *c* = 29 – 7 = 22**. Dar ***b* = *c* + 6**. Prin înlocuirea lui ***b*** în a treia egalitate, obținem: **2*c* + 6 = 22**.

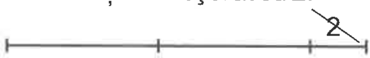
Răspuns: ***c* = 8; *b* = 14; *a* = 7**.

25. <u>Rezolvarea 1</u>

Pe etape, reprezentarea grafică este:

(notăm numărul băieților cu ***b***, iar cel al fetelor cu ***f***):

Numărul băieților micşorat cu **2**:

***b* – 2** 

Jumătate din acel număr:

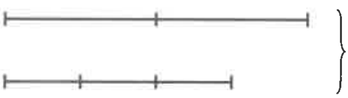
$\frac{1}{2}(b-2)$ 

$\frac{2}{3}$ *f.* 

Această jumătate este de două ori mai mare decât o treime din numărul fetelor, adică: $\frac{1}{2}(b-2) = \frac{2}{3}f$. Dar orice întreg are **2** jumătăți sau **3** treimi. Rezultă:

b – 2

f.



30 – 2

Câte părți egale între ele sunt în total? Dacă o jumătate din numărul băieților (micşorat cu **2**) reprezintă cât două treimi din numărul fetelor, atunci **2** jumătăți din acel număr al băieților reprezintă cât **4** treimi din numărul fetelor. Câte asemenea părți sunt în total? **4** treimi + **3** treimi = **7** treimi. Care este suma a **7** asemenea părți? **30 – 2 = 28**. Cât reprezintă o treime din numărul fetelor? **28 : 7 = 4**. Câte fete sunt? **3×4 = 12**. Câți băieți sunt? **4×4 + 2 = 18** sau **30 – 12 = 18**.

<u>Rezolvarea 2</u>

Fie ***y*** şi ***z*** numărul de băieți şi, respectiv, de fete. Se pot scrie relațiile:

$y + z = 30$ şi $\frac{1}{2}(y-2) = \frac{2}{3}z \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}z + 2$. Înlocuind pe ***y*** în prima relație, rezultă: $\frac{4}{3}z + 2 + z = 30 \Leftrightarrow \frac{7}{3}z = 28 \Leftrightarrow z = 28 : 7 \times 3 = 12$; $y = 30 - 12 = 18$.

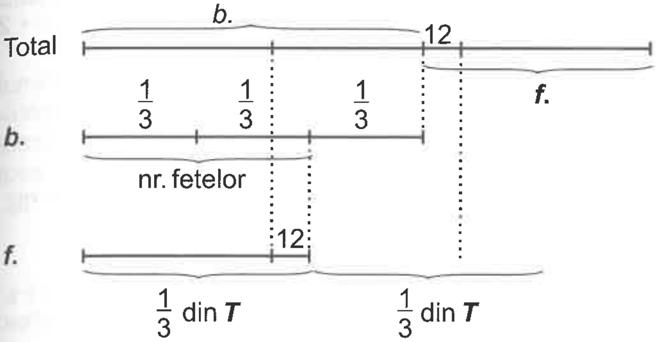
26. (d.) <u>Rezolvarea 1</u>

Notăm numărul băieților cu ***b***, iar al fetelor cu ***f***. Reprezentăm numărul total al participanților printr-un segment, pe care îl împărțim în treimi:

Totalul 

Delimităm pe acesta numărul de băieți: cu **12** mai mic decât $\frac{2}{3}$ din total;

înseamnă că restul din total reprezintă numărul fetelor, adică:



Dedesubt, pe segmentul ce reprezintă numărul băieților, delimităm **2** treimi din el, adică ***f***. Dar numărul fetelor reprezintă şi o treime din total plus **12**. Comparăm cele două reprezentări diferite ale numărului de fete. Se observă că a doua treime din total este formată din: **12** fete plus o treime din numărul băieților plus **12** fete, adică din **24** fete plus $\mathbf{\frac{1}{3}}$ din numărul băieților. Atunci **3** treimi din total vor fi reprezentate de $\mathbf{3\times24}$ fete plus **3** treimi din numărul băieților, adică **72** fete plus numărul băieților reprezintă totalul băieților şi al fetelor.

Se observă că toți băieții sunt luați în calcul. Rezultă că **72** reprezintă numărul fetelor.

Pentru a afla numărul băieților, determinăm **3** doimi din **72**, adică: $\mathbf{72:2\times3=108}$ (băieți). Câți participanți erau? $\mathbf{108+72=180}$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Fie ***y*** numărul total al participanților. Se poate scrie egalitatea:

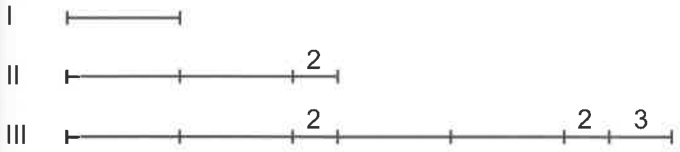
$$\frac{2}{3}y-12+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}y-12\right)=12 \Leftrightarrow \frac{1}{9}y=20 \Leftrightarrow y=9\times20=180.$$

27. Fiind numere consecutive, rezultă relația: $\mathbf{a+a+1+a+2=?+124}$. Dacă **124** este suma a două dintre ele, fiind par, rezultă că el s-a obținut din **2** numere pare sau **2** numere impare, între care diferența este **2**. Atunci: $\mathbf{a+a+2=124}$. Rezultă $\mathbf{a=61}$; $\mathbf{a+1=62}$; $\mathbf{a+2=63}$.

28. <u>Rezolvarea 1</u>

Privind analitic problema, constatăm că numărul inițial de oi ale fiecărui țăran este alcătuit din numărul de oi *vândute* şi numărul de oi rămase.

Reprezentăm grafic numărul de oi vândute de fiecare țăran:



În total cei trei ţărani au vândut **9** oi plus **7** părţi, fiecare parte fiind egală cu numărul de oi vândute de primul ţăran. Tot atâtea au rămas la fiecare ţăran. Deci, primul *a avut* **8** părţi şi încă **9** oi, al doilea **9** părţi (adică **7** părţi + **2** părţi) şi încă **11** oi, iar al treilea **11** părţi şi încă **16** oi.

Câte părţi, fiecare egală cu numărul de oi pe care le-a vândut primul ţăran, sunt în total? $\mathbf{8 + 9 + 11 = 28}$ (părţi). Care este suma ce poate fi organizată în **28** asemenea părţi? $\mathbf{176 - 9 - 11 - 16 = 140}$. Câte oi a vândut primul ţăran? $\mathbf{140 : 28 = 5}$. Câte oi a avut primul ţăran? $\mathbf{5 \times 8 + 9 = 49}$. Câte oi a avut al doilea ţăran? $\mathbf{9 \times 5 + 11 = 56}$. Câte oi a avut al treilea ţăran? $\mathbf{11 \times 5 - 6 = 71}$.

Verificare: $\mathbf{49 + 56 = 71 = 176}$;

$\mathbf{49 - 5 = 56 - (2 \times 5 + 2) = 71 - (2 \times 12 + 3) = 44}$.

Rezolvarea 2. *Algebric*

Fie $\boldsymbol{y}$ numărul de oi *vândute* de primul ţăran; al doilea: $\mathbf{2}\boldsymbol{y} \mathbf{+ 2}$; al treilea: $\mathbf{2(2}\boldsymbol{y}\mathbf{+2)+3=4}\boldsymbol{y}\mathbf{+7}$; în total $= \mathbf{7}\boldsymbol{y}\mathbf{+9}$.

Primul *a avut*: $\mathbf{8}\boldsymbol{y}\mathbf{+9}$; al doilea $= \mathbf{9}\boldsymbol{y}\mathbf{+11}$; al treilea $= \mathbf{11}\boldsymbol{y}\mathbf{+16}$.

În total au avut $= \mathbf{176 = 28}\boldsymbol{y}\mathbf{+36}$. Rezultă $\boldsymbol{y} = \mathbf{5}$.

Deci:

– Primul *a avut*: $\mathbf{8 \times 5 + 9 = 49}$;

– al doilea $= \mathbf{9 \times 5 + 11 = 56}$;

– al treilea $= \mathbf{11 \times 5 + 16 = 71}$.

29. Numerele consecutive pare sau numerele consecutive impare au diferenţa între ele **2**. Dacă sunt două numere, este o problemă simplă de sumă şi diferenţă: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \mathbf{2 = 32}$; $\boldsymbol{a} = \mathbf{15}$; $\boldsymbol{a} + \mathbf{2} = \mathbf{17}$.

3 numere – nu există soluţii (Verificaţi!);

4 numere: $\boldsymbol{a} = \mathbf{(32 - 12) : 4 = 5}$. Celelalte numere: **7**, **9**, **11**.

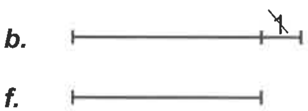
(*Observaţie*: **32** se împarte exact la **4**, la fel şi **12**). O altă soluţie ar fi fost cu **8** numere (**32** divizibil cu **8**, dar diferenţa, fiind **56**, depăşeşte suma; ea este divizibilă cu **8**).

30. Notăm cu ***b*** numărul de băieţi din acea familie, cu ***f***, numărul de fete. Băiatul, când afirmă că are tot atâtea surori cât şi fraţi, se autoexclude (nu este frate cu el însuşi). El intră în calculul din afirmaţia fetei.

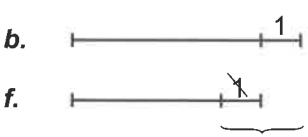
La fel şi fata, nu este soră cu ea însăşi, dar intră în calculul din afirmaţia băiatului.

Rezolvarea 1

Din afirmaţia băiatului rezultă:



Din afirmaţia fetei (intră în calcul şi băiatul), rezultă:



o jumătate din nr. băieţilor

Din al doilea desen, rezultă că o doime din numărul băieților reprezintă 2. Deci, erau **4** băieți, căci $\mathbf{2 \times 2 = 4}$, iar fete **3**, căci $\mathbf{2 + 1 = 3}$.

Răspuns: **7** copii.

Rezolvarea 2. *Algebric*

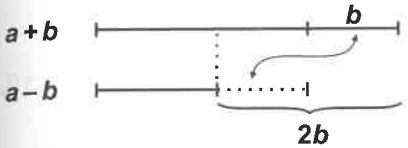
Păstrând aceleaşi notații, putem scrie relațiile:

$\boldsymbol{b - 1 = f}$, adică $\boldsymbol{b = f + 1}$; $\boldsymbol{2(f - 1) = b \Leftrightarrow 2f - 2 = b}$. Înlocuind pe $\boldsymbol{b}$, rezultă:

$\boldsymbol{2f - 2 = f + 1 \,/ - f \Leftrightarrow f - 2 = 1 \Leftrightarrow f = 3;\ b = 3 + 1 = 4}$. Atunci, $\boldsymbol{b + 1 = f}$.

31. Notăm numerele cu $\boldsymbol{a}$ şi, respectiv cu $\boldsymbol{b}$.

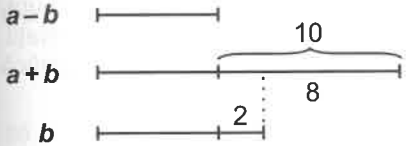
Rezolvarea 1. *Grafic*:



Dacă din segmentul ce reprezintă $\boldsymbol{a}$ delimităm un segment egal cu $\boldsymbol{b}$, obținem $\boldsymbol{a - b}$; prin verticala punctată delimităm şi în $\boldsymbol{a + b}$ acel segment egal cu $\boldsymbol{b}$.

Dar $\boldsymbol{a + b = a - b + 10}$, adică $\boldsymbol{2b = 10}$, de unde $\boldsymbol{b = 5}$; dacă $\boldsymbol{a - 5 = 5 - 2 = 3}$, rezultă $\boldsymbol{a = 8}$.

Rezolvarea 2. *Tot grafic*:



Dacă delimităm pe $\boldsymbol{b}$ în sumă, ceea ce rămâne este $\boldsymbol{a}$, adică **8**, căci $\mathbf{10 - 2 = 8}$. Dacă $\boldsymbol{a - b + 2 = b}$, rezultă $\boldsymbol{8 + 2 - b = b}$, adică $\boldsymbol{b = 5}$.

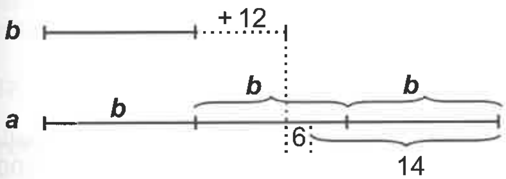
32. Din formularea ultimei părți a celei de-a doua condiții, rezultă că pot exista două variante.

Varianta I

Dacă primul număr modificat are rol de descăzut, rezultă:

$\boldsymbol{(a - 14) - (b + 12) = 6}$.

Rezolvarea 1. *Grafic*:



Din desen rezultă că $\boldsymbol{2b = 12 + 6 + 14 = 32}$, iar $\boldsymbol{b = 16}$; $\boldsymbol{a = 32 : 2 \times 3 = 48}$.

Rezolvarea 2

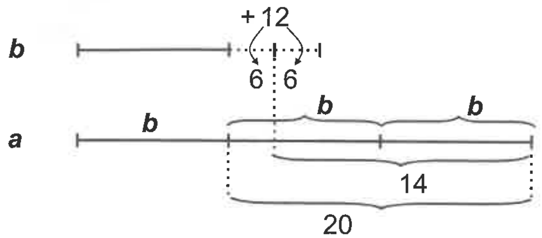
Dacă $\boldsymbol{a = 3b}$ şi $\boldsymbol{(a - 14) - (b + 12) = 6}$ prin înlocuirea lui $\boldsymbol{a}$ în a doua relație, obținem:

$\boldsymbol{3b - 14 = 6 + 12 + b \,/ - b \Leftrightarrow 2b - 14 = 18 \Leftrightarrow b = 16;\ a = 48}$.

Varianta a II-a

Dacă al doilea număr modificat are rol de descăzut, rezultă:
$(b+12)-(a-14)=6$.

Rezolvarea 1. *Grafic*:



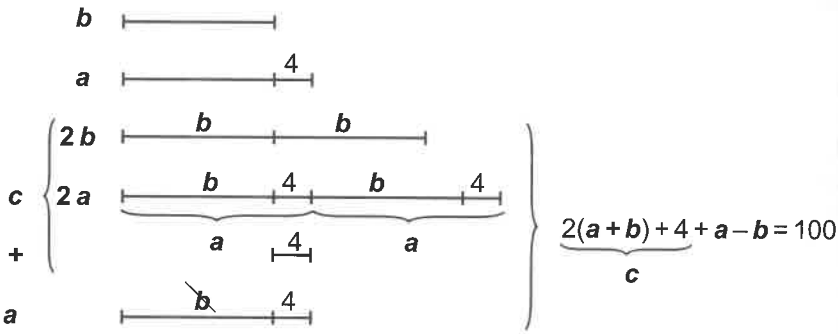
Din desen rezultă că o parte, ce reprezintă b inițial, este egală cu **10**, deoarece $(14+6):2=10$. Atunci $a=3\times 10=30$.

Rezolvarea 2

Dacă $a=3b$ și $(b+12)-(a-14)=6$, prin înlocuirea lui a în a doua relație, obținem: $(b+12)-(3b-14)=6 \Leftrightarrow (b+12)=3b-8 \Leftrightarrow 20=2b$.

Rezultă $b=10$, iar $a=30$.

33. Fie numerele a, b şi c. Din enunț, rezultă: $a=1\times b+4=b+4$; c împărțit la suma primelor două dă câtul **2** şi restul **4**, adică, pe baza definiției împărțirii, scriem: $c=2(a+b)=4$. Pentru a scrie a treia relație din enunț, trebuie să stabilim care este numărul mai mic. Din primele două relații, rezultă că mai mic este b. Deci $a+c-b=100$. În reprezentarea grafică începem cu cel mai mic, adică cu b, astfel:



Din desen rezultă că $4b+16=100$, adică $b=(100-16):4=21$;
$a=21+4=25$; $c=2\times 46+4=96$.

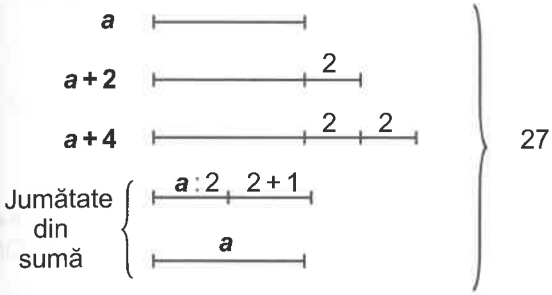
Rezolvarea 2

Păstrând aceleaşi notații şi înlocuind pe a şi pe c cu b în relația $a+c-b=100$, obținem: $2(b+4)+2b+4+b+4-b=100 \Leftrightarrow 4b+16=100$. Rezultă $b=(100-16):4=21$; $a=21+4=25$; $c=96$.

34. Câți spectatori au urcat în plus în cele **18** vagoane? $5\times 18=90$. Cele **90** de persoane sunt mai puține cu **6** decât numărul de locuri de pe scaunele din **3** vagoane, pentru că în al treilea rămân **6** locuri libere. Dacă am considera că şi în ultimul din cele trei vagoane sunt atâţia călători cât şi în primul sau în al doilea, ar fi **96** călători, adică **90 + 6 = 96.**

Câţi călători sunt în primul vagon? **96 : 3 = 32**. Dar în ultimul? **32 – 6 = 26**. Câţi spectatori au plecat cu tramvaiul? **(18 + 2)×32 + 26 = 666**. Care a fost numărul total al spectatorilor? **666 + 174 = 840**.

35. Fie ***a*** primul număr, al doilea ***a*** **+ 2**, al treilea ***a*** **+ 4**.
Rezultă: ***a*** **+** ***a*** **+ 2 +** ***a*** **+ 4 + (3*a* + 6) + 2 = 27**.
Grafic:

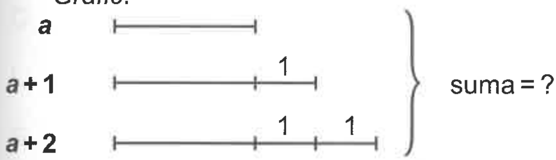


Pentru a reprezenta jumătatea sumei, observăm că **3*a*** împărţit la **2** este egal cu ***a*** plus o jumătate din ***a***.

În reprezentarea grafică sunt **9** jumătăţi din ***a***. Care este suma ce poate fi organizată în **9** asemenea părţi? **27 – 2 – 4 – 3 = 18**.

Cât reprezintă jumătatea lui ***a***? **18 : 9 = 2**. Care este primul număr? **2×2 = 4**. Care este al doilea număr? **4 + 2 = 6**. Dar al treilea? **6 + 2 = 8**.

36. Fie primul număr ***a***, al doilea ***a*** **+ 1**, al treilea ***a*** **+ 2**.
Grafic:

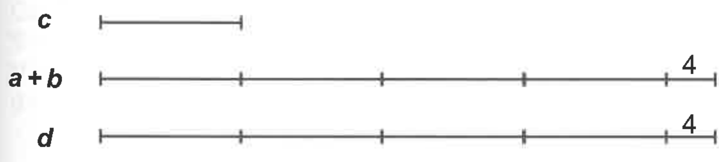


Prima afirmaţie din enunţ poate fi scrisă astfel:
3 ori suma împărţit la **17** este **6** şi restul **6**, adică
3 ori suma este egal cu **17×6 + 6**.

Rezultă că suma este **36**, deoarece: **(17×6 + 6) : 3 = 36**. Atunci, ***a*** **= 11**, căci **(36 – 3) : 3 = 11**; al doilea număr este **12**, pentru că **11 + 1 = 12**; al treilea este **13**.

37. Rezolvarea 1

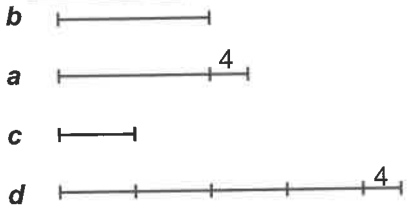
Din enunţ (din a patra afirmaţie), rezultă că numărul cel mai mic este al treilea. Notăm numerele cu ***a***, ***b***, ***c*** şi, respectiv, ***d***.
Grafic:



(Am figurat pe baza celei de-a treia afirmații precum și a ultimei relații din enunț.) Se observă că am reprezentat toate cele **4** numere.

Care este suma a **9*c***? **170 – 4 – 4 = 162**. Cât este ***c***? **162 : 9 = 18**. Cât este ***d***? **4×18 + 14 = 76**. Pentru determinarea lui ***b***, aplicăm formula pentru aflarea a două numere când se cunosc suma și diferența lor sau se poate apela la metoda grafică. Aplicăm formula pentru determinarea numărului mai mic și obținem: ***b* = (76 – 4) : 2 = 36**; ***a* = 36 + 4 = 40**.

<u>Rezolvarea 2</u>. *Tot grafic*:

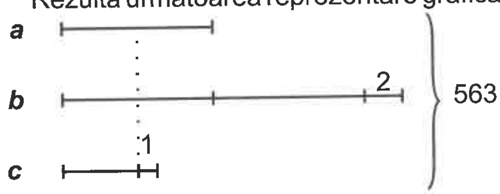


Pentru a reprezenta al treilea număr, reținem că ***a* = *b* + 4**, iar ***a* + *b* = 4*c* + 4**, adică ***b* + 4 + *b* = 4*c* + 4 ⇔ 2*b* = 4*c* ⇔ *b* = 2*c***, adică ***c*** este o doime din ***b***. Din enunț, rezultă că ***d* = 4*c* + 4**. Din desen, rezultă:

9*c* = 170 – 4 – 4 = 162. Deci ***c* = 18**; ***b* = 36**; ***a* = 40**; ***d* = 76**.

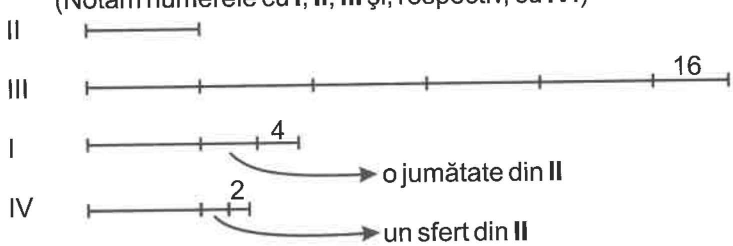
38. Fie numerele ***a***, ***b*** și ***c***. Din enunț rezultă că numărul mai mic este ***c***. Dacă ***b* = *a* + *a* + 2**, rezultă că diferența dintre primele două numere este ***a* + 2**, iar ***c*** este cât o doime din ***a*** plus **1**.

Rezultă următoarea reprezentare grafică:



Câte părți, fiecare egală cu o jumătate din ***a***, sunt? **1 + 4 + 2 = 7**.
Care este suma ce poate fi organizată în **7** asemenea părți?
563 – 3 = 560.
Cât este ***c***? **560 : 7 + 1 = 81**.
Cât este primul număr? **2×80 = 160**.
Dar al doilea? **4×80 + 2 = 322**.

39. Grafic, relațiile din enunț pot fi reprezentate astfel:
(Notăm numerele cu **I**, **II**, **III** și, respectiv, cu **IV**.)



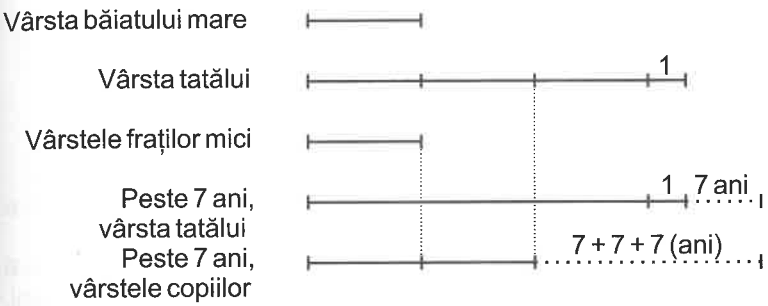
Transformăm toate mărimile în pătrimi, fiecare egală cu un sfert din **II**. În total vor fi **35** asemenea părți.

Care este suma ce poate fi organizată astfel? **3 522 – 22 = 3 500**.

Care este **II**? **3 500 : 35×4 = 400**. Care este **I**? **400 + 400 : 2 + 4 = 604**.

Care este **III**? **5×400 + 16 = 2 016**. Care este **IV**? **400 + 400 : 4 + 2 = 502**.

40. (Asemănătoare cu problemele **12** şi **13** din capitolul al **IV**-lea) *Grafic*:



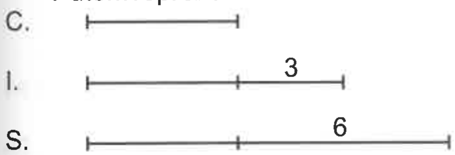
Din desen se observă că o parte egală cu vârsta băiatului mare reprezintă **13** ani, căci **7+ (7 – 1) = 13**. (Comparați ultimele două segmente.)

Ce vârsta avea tatăl? **3×13 + 1 = 40** (ani). Ce vârstă are băiatul cel mic? **(13 – 1) : 2 = 6** (ani). Ce vârstă are băiatul mijlociu? **6 + 1 = 7** (ani).

(Pentru alte moduri de rezolvare a se vedea problemele **12** şi **13**, din capitolul al **IV**-lea).

41. Notăm vârstele fiecărui copil cu inițialele numelui lor.

Putem reprezenta vârstele celor trei copii cu **2** ani în urmă, astfel:



Se observă că Ionuț este mai mare decât Cătălina cu **3** ani, căci **6 – 3 = 3**.

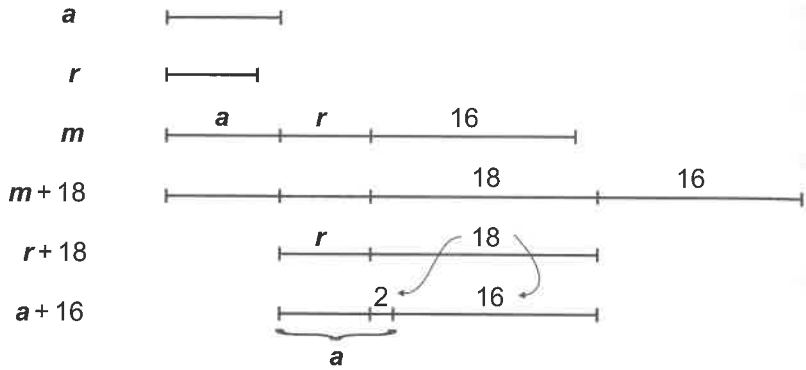
Diferența de vârstă dintre cei trei copii este constantă.

Delimitând pe segmentul ce reprezintă vârsta lui Sandu segmentele ce reprezintă vârstele celorlalți doi copii, putem deduce:

cu **2** ani în urmă, Ionuț avea **6** ani, acum are **8** ani.

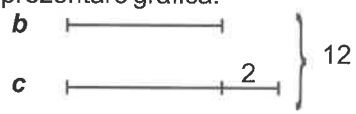
Suprapunând întâi segmentul ce reprezintă vârsta lui Ionuț, apoi segmentul ce reprezintă vârsta Cătălinei peste segmentul ce figurează vârsta lui Sandu, rezultă că pentru vârsta Cătălinei a mai rămas un segment ce reprezintă **3** ani, căci **6 – 3 = 3**. Deci, cu **2** ani în urmă Cătălina avea **3** ani. Acum are **5** ani, căci **3 + 2 = 5**. Sandu are **11** ani, deoarece **3 + 6 + 2 = 11**. Ce vârstă au părinții? Care este suma vârstelor actuale ale părinților? **5 + 8 + 11 + 14×3 = 66**. De aici, este o problemă simplă de sumă şi diferență. Vârsta mamei este de **32** ani, căci **(66 – 2) : 2 = 32** (ani). Vârsta tatălui este de **34** ani, deoarece **66 – 32 = 34**.

42. Din formularea *cerinței*, rezultă că Alex este mai mare decât Rareș. Notăm cu ***m*** vârsta mamei, cu ***a*** și respectiv cu ***r*** vârstele fiecăruia dintre cei doi fii. Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen și din enunț, rezultă că $r + 18$ este mai mic decât $m + 18$ de 2 ori. Deci $r + 18 = a + 16$. Înseamnă că Rareș este mai mic decât Alex cu **2** ani, căci $18 - 16 = 2$.

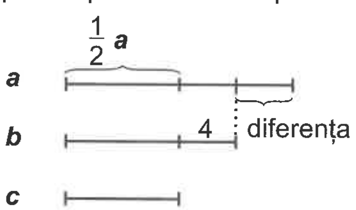
43. Fie a, b, c cele trei numerele naturale. Dacă $(a + b + c) : 3 = 8$, rezultă că $a + b + c = 3 \times 8 = 24$. Dacă $(b + c) : 2 = 6$, rezultă $b + c = 2 \times 6 = 12$, iar $a = 24 - 12 = 12$. Dacă $b + c = 12$, iar $c = 1 \times b + 2$, putem realiza următoarea reprezentare grafică:



Rezultă că $2b = 12 - 2 \Leftrightarrow b = 5$; $c = 5 + 2 = 7$ sau: $2c = 12 + 2 \Leftrightarrow c = 7$; $b = 7 - 2 = 5$.

44. Rezolvarea 1. (Calea sintetică, pe baza reprezentării grafice)
Notăm numerele cu a, b, c și, respectiv, cu d. Din enunț rezultă:
$(a + b + c + d) : 4 = 120 \Leftrightarrow (a + b + c + d) = 480$; $(a + b + c) : 3 = d \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a + b + c) = 3d$.
Grafic, ultimele două relații obținute se pot reprezenta astfel:

Care este al patrulea număr? $480 : 4 = 120$. Care este suma primelor trei numere? $480 - 120 = 360$. Pentru determinarea primelor trei numere, se poate apela la o nouă reprezentare grafică:



Pentru reprezentarea grafică a celui de-al treilea număr, este necesar să se delimiteze diferența dintre primele două numere, la care se adună **4**. Rezultă că al treilea număr este cât jumătate din primul număr.

Câte părți, fiecare egală cu al treilea număr, sunt în total? **2 + 1 + 1 = 4** (părți).

Care este suma a **4** asemenea părți? **360 – 4 = 356**.

Care este al treilea număr? **356 : 4 = 89**.

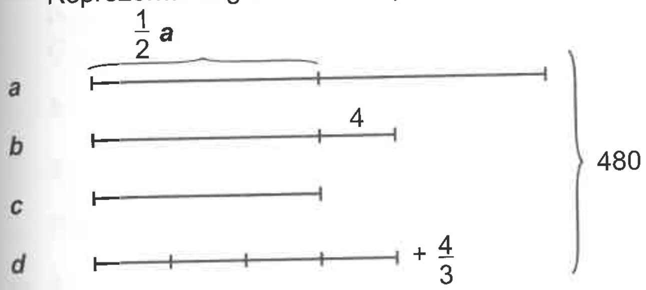
Care este al doilea număr? **89 + 4 = 93**.

Care este primul număr? **2 × 89 = 178**.

Rezolvarea 2. (Calea analitică, pe baza reprezentării grafice)

Dacă (***a*** + ***b*** + ***c*** + ***d***) : **4 = 120**, rezultă ***a*** + ***b*** + ***c*** + ***d*** = **480**.

Reprezentarea grafică a celor patru numere poate fi:



(Pentru reprezentarea celui de-al patrulea număr, gândim astfel: (**2** părți + **1** parte + **1** parte) : **3 = 4** treimi din al treilea număr, iar **4 : 3 =** $\mathbf{\frac{4}{3}}$.

Deci ***d*** este cât **4** treimi din al treilea număr plus $\mathbf{\frac{4}{3}}$.)

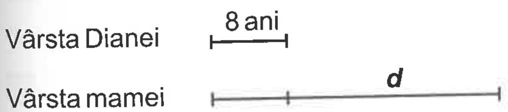
În suma **480** sunt **16** treimi plus $\mathbf{\frac{4}{3}}$. Atunci al treilea număr este **89**, deoarece **(480 – 4** $\mathbf{\frac{4}{3}}$**) : 16 × 3 = 89**; ***b*** **= 89 + 4 = 93**; ***a*** **= 2 × 89 = 178**; ***d*** **= 120**.

45. Pentru reprezentarea grafică a celor două vârste, gândim astfel:

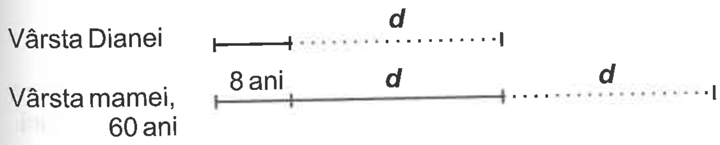
1) mama este mai mare decât Diana cu un număr de ani, notat cu ***d***;

2) numărul de ani (***d***), care trece pentru Diana ca să aibă vârsta actuală a mamei, se adună şi la vârsta mamei. Adică:

În prezent:



În viitor:



Din desen, rezultă că **60 – 8 = 52** (ani) reprezintă **2** părți, fiecare egală cu diferența dintre vârste.

Cu câți ani este mai mare mama decât Diana? **52 : 2 = 26** (ani).

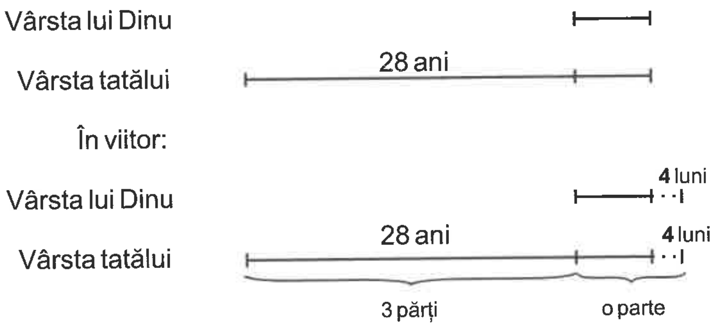
Câți ani are mama? **8 + 26 = 34** (ani).

46. Rezolvarea 1

Din desen, rezultă că diferența de vârstă dintre tată şi fiu este şi va fi de **28** de ani.

Una dintre reprezentările grafice poate fi:

În prezent:



Dacă peste **4** luni vârsta lui Dinu se va cuprinde de **4** ori în vârsta tatălui, rezultă că **28** de ani reprezintă **3** părți, fiecare egală cu vârsta actuală a lui Dinu plus **4** luni.

Ce vârstă are Dinu? **28** ani : **3** – **4** luni = **9** ani şi **4** luni – **4** luni = **9** ani.

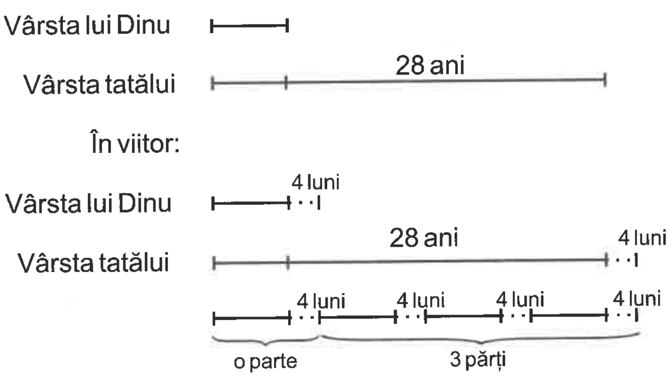
Ce vârsta are tatăl? **9 + 28 = 37** (ani).

Rezolvarea 2

Diferența de vârste este şi va fi de **28** de ani.

O altă reprezentare grafică poate fi:

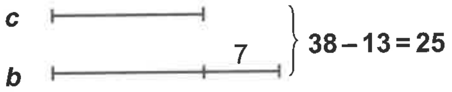
În prezent:



Din compararea ultimelor două reprezentări ale vârstei tatălui, rezultă că **28** ani reprezintă **3** părți, fiecare egală cu vârsta actuală a lui Dinu plus **4** luni.

Ce vârstă are Dinu? **28** ani : **3 – 4** luni = **9** ani.
Ce vârstă are tatăl? $\mathbf{9 + 28 = 37}$ (ani).

47. Fie cele trei numere a, b şi, respectiv, c. Rezultă:



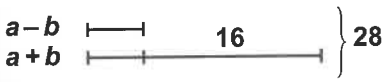
Din desen rezultă că $2c = 25 - 7 \Rightarrow c = 9$, iar $b = 9 + 7 \Rightarrow b = 16$.

48. Fie a şi b cele două numere. Din enunţ rezultă: $a + b = 32$; $32 - (a - b) = 8$. Putem afla diferenţa celor două numere. Deci $a - b = 32 - 8 \Rightarrow a - b = 24$. O reprezentare grafică poate fi:

Rezultă: $2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$; $a = 28$.

49. Fie a şi b cele două numere. Din enunţ rezultă: $a - b = 8$; $(a + b) - 8 = 14 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b = 22$. Pe baza unei reprezentări grafice, obţinem $b = 7$; $a = 15$.

50. Fie a şi b cele două numere. Din enunţ rezultă: $(a + b) + (a - b) = 28$; $(a + b) - (a - b) = 16$. Într-o reprezentare grafică, avem:

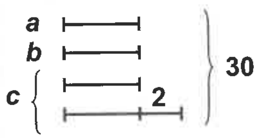


Rezultă $(a - b) = (28 - 16) : 2 \Rightarrow (a - b) = 6$, iar $a + b = 22$.
Atunci $b = 8$, $a = 14$.
Observaţie: Calea algebrică este mult mai economicoasă.

51. Fie a şi b cele două numere. Din enunţ rezultă: $a - b = 5$; $a + b + 5 = 32 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b = 27$. Obţinem: $2b = 22 \Rightarrow b = 11$, iar $a = 16$.

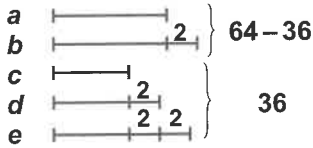
52. Din enunţ rezultă: $a + b = 19$; $19 + (a - b) = 26 \Rightarrow a - b = 27$.
Atunci: $2b = 19 - 7 \Rightarrow b = 6$, iar $a = 13$.

53. Din enunţ rezultă: $a + b + c = 30$; $a = b$; $2a + 2 = c$. Deci:



Rezultă: $4a = 28 \Leftrightarrow a = 7$; $b = 7$; $c = 2 \times 7 + 2 = 16$.

54. $a+b+c+d+e=64$; $b=a+2$; $a+b=64-36=28$; $d=c+2$; $e=d+2 \Rightarrow$
$\Rightarrow e=c+4$; $c+d+e=36$. Reprezentarea grafică poate fi:



Din desene rezultă: $2a=28-2 \Rightarrow a=13$; $b=15$; $3c=36-6 \Rightarrow c=10$; $d=12$; $e=14$.

55. Fie a şi b cele două numere. Din enunţ rezultă: $(a+b):(a-b)=14 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+b)=14(a-b) \Rightarrow 28=14(a-b) \Rightarrow a-b=28:14 \Rightarrow a-b=2$.
Obţinem: $b=13$; $a=15$.

56. Fie a şi b cele două numere. Din enunţ rezultă: $(a+b):(a-b)=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+b):8=4 \Rightarrow a+b=32$. Obţinem: $b=12$; $a=20$.

57. $(a+b)=64$; $64:[2(a-b)]=4 \Rightarrow 64=8(a-b) \Rightarrow a-b=8$.
Atunci $b=28$, iar $a=36$.

58. $(a+b)=36$; $36:[(a-b):2]=6 \Rightarrow (a-b):2=36:6 \Rightarrow a-b=12$.
Atunci, $b=12$, iar $a=24$.

59. $a-b=16$; $(a+b):[(a-b):4]=8 \Rightarrow (a+b):(16:4)=8 \Rightarrow a+b=32$;
$a-b=16$. Atunci $b=8$; $a=24$.

60. $a-b=4$; $(a+b):[3\cdot(a-b)]=4 \Rightarrow (a+b)=48$. Atunci $b=22$, iar $a=26$.

61. $a-b=10$; $5(a+b):[(a-b)\cdot 4]=2 \Rightarrow 5(a+b):40=2 \Rightarrow a+b=16$.
Obţinem $b=3$, iar $a=13$.

62. $a+b=80$; $40:[2\cdot(a-b)]=2 \Rightarrow (a-b)=10$. Obţinem $b=35$, iar $a=45$.

63. Fie cele trei numere naturale a, b şi respectiv c. Din enunţ rezultă:
$a+b=10$; $a+c=6$; $b+c=8$. Atunci $2(a+b+c)=24 \Rightarrow a+b+c=12$;
$a=4$; $b=6$; $c=2$.

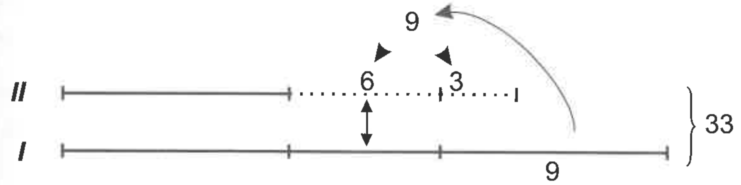
64. Din enunţ rezultă: $a+b+c=17$; $a+b=11$; $b+c=15$. Atunci $c=6$; $a=2$;
$b=9$.

65. Notăm numărul de bile cu a, g şi, respectiv, cu r. Din enunţ rezultă:
$g+r=8$; $a+r=12$; $a+g=10$; $g+r+a=(8+12+10):2 \Leftrightarrow g+r+a=15$.
Deci $a=7$; $g=3$; $r=5$.

66. Din transferul enunţat rezultă că într-o vază sunt cu **2 + 2 = 4** flori mai multe decât în cealaltă. Într-o vază sunt **(12 – 4) : 2 = 4** flori şi în cealaltă **4 + 4 = 8** flori.

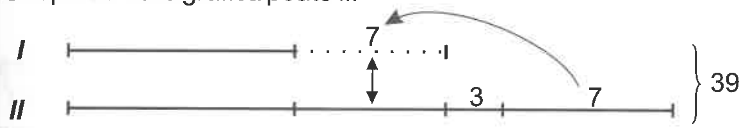
67. După transfer se obțin **3** părți egale, deci suma totală se împarte exact la **3**. Unicul număr care se împarte exact la **3** și este cuprins între **16** și **20** este numărul **18**. Câți lei are Dinu? **(18 : 3) + 6 + 4 = 16** (lei). Câți lei are Alex? **(18 : 3) – 4 = 2** (lei). Câți lei are Tibi? **(18 : 3) – 6 = 0** (lei).

68. O reprezentare grafică a numărului de cărți poate fi:



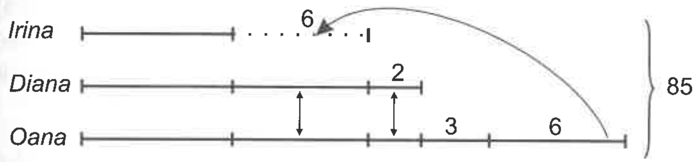
Din desen rezultă că în primul raft sunt cu **9 + (9 – 3) = 15** cărți mai multe decât pe al doilea raft. Atunci: pe al doilea raft erau **(33 – 15) : 2 = 9** cărți, iar pe primul raft erau **33 – 9 = 24** cărți.

69. O reprezentare grafică poate fi:



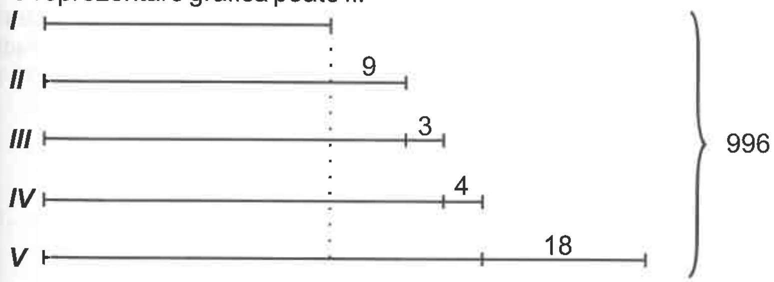
Din desen rezultă că în primul teanc erau cu **7 + 3 + 7 = 17** caiete mai multe decât în al doilea teanc. Atunci: în primul teanc erau **(39 – 17) : 2 = 11** caiete, iar în al doilea teanc erau **39 – 11 = 28** caiete.

70. O reprezentare grafică poate fi:
Sumele pentru:



Obținem: triplul sumei Irinei este **85 – (6 + 2 + 6 + 2 + 3 + 6) = 60** lei. Câți lei avea Irina? **60 : 3 = 20** (lei). Câți lei avea Diana? **20 + 8 = 28** (lei). Câți lei avea Oana? **28 + 3 + 6 = 37** (lei).

71. O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că **5** părţi, fiecare parte fiind egală cu primul număr, reprezintă $\mathbf{996 - 4 \times 9 - 3 \times 3 - 2 \times 4 - 18 = 925}$. Care este primul număr? $\mathbf{925 : 5 = 185}$. Care este al doilea număr? $\mathbf{185 + 9 = 194}$. Celelalte trei numere sunt: **197**; **201**; **219**.

72. Fie cele două numere a şi b. Din enunţ rezultă: $a - b + 7 = 19$, iar $(a + b) : 8 = 5$. Aceste două relaţii cuprind suma şi diferenţa celor două numere, adică $a - b = 12$, iar $a + b = 40$. Rezultă (şi după o eventuală reprezentare grafică): $b = (40 - 12) : 2 \Rightarrow b = 14$; $a = 26$.

73. Obţinem $a + b + c = 598 - 5 \cdot 104 \Leftrightarrow a + b + c = 78$. Din enunţ rezultă că $b = a + 2$, $c = a + 4$, iar $3a = 72$. Deci $a = 24$; $b = 26$; $c = 28$.

74. Notăm numerele cu a, b, c şi respectiv d. Din enunţ rezultă:
$(a + b + c + d) : 4 = 24 \Rightarrow a + b + c + d = 96$; $(a + b + c) = 3 \cdot 20 \Rightarrow a + b + c = 60$, iar $d = 96 - 60 \Rightarrow d = 36$; $(b + c + d) = 3 \cdot 22 \Rightarrow b + c + d = 66$, iar $a = 96 - 66 \Rightarrow a = 30$; $30 + b + c + 36 = 96 \Rightarrow b + c = 30$; dar b şi c sunt numere consecutive pare, adică $b + b + 2 = 30 \Rightarrow b = 14$, iar $c = 16$.

75. Notăm cu f numărul fetelor, cu b numărul băieţilor; atunci numărul elevilor participanţi este $f + b$. Din enunţ rezultă: $(f + b) \cdot (f - b) = 51 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f + b) \cdot (f - b) = 17 \cdot 3 = 51 \cdot 1$. Dacă $f + b = 17$, atunci $f - b = 3$. De aici avem o problemă simplă de sumă şi diferenţă: $b = 7$, iar $f = 10$. Dacă $f + b = 51$, iar $f - b = 1$, atunci $b = 25$, iar $f = 26$.

76. Notăm cu S_1, S_2 şi, respectiv, cu S_3 sumele iniţiale ale celor trei copii.

Din enunţ rezultă: $S_1 + S_3 = 2\,046 \Leftrightarrow S_1 + (S_1 + 4) = 2\,046 \Rightarrow 2S_1 = 2\,042 \Rightarrow$ $\Rightarrow S_1 = 1\,021$; $S_3 = 1\,025$; $S_2 = 1\,023$. Notăm cu r_1, r_2 şi, respectiv, cu r_3 resturile primite de fiecare. Din enunţ rezultă: $(r_1 + r_2 + r_3) = (1\,021 + 1\,023 + 1\,025) : 3$ $\Rightarrow r_1 + r_1 + 2 + r_1 + 4 = 1\,023 \Rightarrow r_1 = 339$; $r_2 = 341$; $r_3 = 343$. Câţi lei a cheltuit fiecare? $\mathbf{1\,021 - 339 = 682}$ sau $\mathbf{1\,023 - 341 = 682}$ sau $\mathbf{1\,023 - 343 = 682}$ (lei).

77. (Asemănătoare cu problema anterioară)

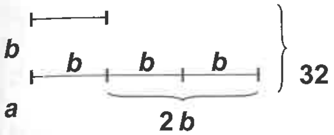
Dacă sumele avute erau reprezentate de patru numere consecutive impare, atunci ele sunt de forma: a; $a + 2$; $a + 4$; $a + 6$; iar $a + 4 + a + 6 = 268$, adică $a = 129$; celelalte sume sunt: **131**; **133**; **135**. Media aritmetică a sumelor este $\mathbf{(129 + 131 + 133 + 135) : 4 = 528 : 4 = 132}$. Dacă resturile sunt reprezentate de patru numere consecutive pare, ele sunt de forma: r; $r + 2$; $r + 4$; $r + 6$, iar $r + r + 2 + r + 4 + r + 6 = 132$, adică $r = 30$.

Deoarece sumele avute erau numere consecutive impare, iar resturile, numere consecutive pare, rezultă că ei au cheltuit sume egale, adică $\mathbf{129 - 30 = 99}$ sau $\mathbf{131 - 32 = 99}$ sau $\mathbf{133 - 34 = 99}$ sau $\mathbf{135 - 36 = 99}$ (lei cheltuiţi).

78. a) Rezolvarea 1

Fie a şi b cele două numere.

Reprezentarea grafică poate fi:



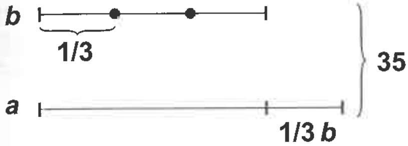
Rezultă: $4b = 32$, iar $b = 8$; $a = 24$.

Rezolvarea 2

$a + b = 32$; $a - b = 2b \Leftrightarrow a = 3b$. Înlocuim în sumă pe a şi obţinem $4b = 32$; $b = 8$; $a = 24$.

b) Rezolvarea 1

O reprezentare grafică poate fi:

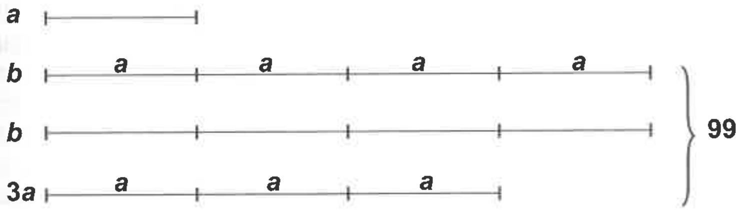


Din desen rezultă că **7** părţi, fiecare egală cu a treia parte din b, reprezintă **35**. Atunci: $b = 35 : 7 \times 3 = 15$; $a = 35 - 15 = 20$.

Rezolvarea 2

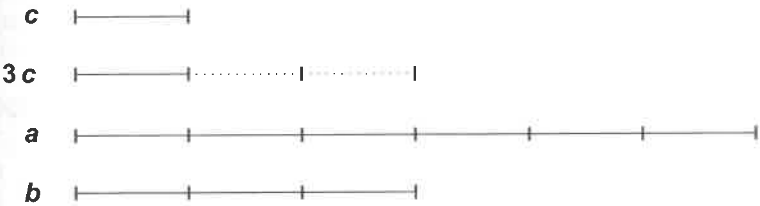
$a + b = 35$; $a - b = \frac{1}{3}b \Rightarrow a = \frac{4}{3}b$. Atunci $\frac{4}{3}b + b = 35 \Rightarrow b = 35 : 7 \times 3 = 15$; $a = 20$.

79. Notăm numerele cu a şi b. O reprezentare grafică poate fi:



Rezultă $11a = 99$, iar $a = 9$; $b = 36$.

80. O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că $10c = 240$; $c = 24$; $a = 6 \times 24 = 144$; $b = 144 : 2 = 72$.

81. Rezolvarea 1

Notăm cu a numărul mai mare, cu b, celălalt număr.

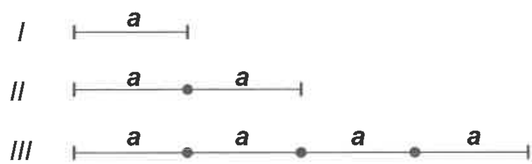
O reprezentare grafică poate fi:

Într-un sfert din **a** sunt **3** părți, fiecare parte fiind egală cu **b**; atunci în **a** sunt $\mathbf{4\times3=12}$ astfel de părți. În suma de **91** sunt $\mathbf{1+12=13}$ asemenea părți. Atunci: $\boldsymbol{b=91:13=7}$; $\boldsymbol{a=91-7=84}$ sau $\mathbf{12\times7=84}$.

Rezolvarea 2

Din enunț rezultă: $\boldsymbol{a+b=91}$; $\boldsymbol{\frac{1}{4}a=3b\,/\times4\Rightarrow a=12b}$. Atunci $\boldsymbol{12b+b=91}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b=7}$; $\boldsymbol{a=84}$.

82. Reprezentăm grafic sumele *cheltuite* de fiecare copil:



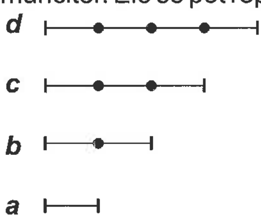
Câte părți (egale între ele) au cheltuit cei trei copii (Câte părți egale reprezintă suma pe care o are *fiecare* după ce au cheltuit)? $\boldsymbol{a+2a+4a=7a}$. Suma pe care *a avut-o fiecare* putea fi organizată astfel:

I: $\boldsymbol{a+7a=8a}$, adică **8** părți;

II: $\boldsymbol{2a+7a=9a}$, adică **9** părți;

III: $\boldsymbol{4a+7a=11a}$, adică **11** părți; deci suma de **8 960** lei reprezintă $\mathbf{8+9+11=28}$ asemenea părți, fiecare parte fiind egală cu suma (**a**) pe care a cheltuit-o primul copil. Câți lei *a avut* primul copil? $\mathbf{8\,960:28\times8=2560}$ (lei). Câți lei a avut al doilea copil? $\mathbf{9\times320=2\,880}$ (lei). Dar al treilea? $\mathbf{11\times320=3\,520}$ (lei). *Sau*: (soluție propusă de *Alex Posmangiu*): Dacă celor **3** copii le-au rămas sume egale, acestea reprezintă **3** părți mari, fiecare egală cu suma cheltuită de cei **3** copii la un loc. Rezultă că suma de **8 960** lei poate fi organizată în **3** părți plus o parte $\Rightarrow$ **4** asemenea părți. Câți lei a cheltuit primul copil? $\mathbf{8\,960:4:7=320}$ (lei); inițial avea $\mathbf{8\times320=2\,560}$ lei, căci o parte mică plus **7** părți mici formează suma inițială etc.

83. Rezolvarea 1 Fie **a**, **b**, **c** și, respectiv, **d** sumele primite de fiecare muncitor. Ele se pot reprezenta grafic, pornind de la **d**, astfel:



$$\boldsymbol{(a+b+c+d):4=20\,000\Rightarrow a+b+c+d=80\,000}$$

Din desen rezultă că **10** părți, fiecare egală cu suma primită de primul muncitor, reprezintă **80 000** lei. Câți lei a încasat primul muncitor? $\mathbf{80\,000:10=8\,000}$ (lei). Câți lei a încasat al doilea? $\mathbf{2\times8\,000=16\,000}$ (lei). Câți lei a încasat al treilea muncitor? $\mathbf{3\times8\,000=24\,000}$ (lei). Dar al patrulea? $\mathbf{4\times8000=32\,000}$ (lei).

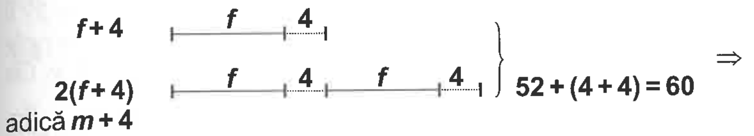
Rezolvarea 2 Păstrăm notațiile de mai sus. Din enunț rezultă: $c = \frac{3}{4}d$; $b = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}d$; $a = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{4}d$. Atunci $d + \frac{3}{4}d + \frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d = 80\,000 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{10}{4}d = 80\,000 \Rightarrow d = 80\,000 : 14 \times 4 = 32\,000; a = 8\,000; b = 16\,000; c = 24000.$

84. Rezolvarea 1

Notăm vârsta pe care o are mama în **1 994** cu ***m***, iar pe cea a fiicei cu ***f***. Din enunț rezultă că în anul **1 994**, $m + f = 52$, iar în anul **1 998**, adică peste **4** ani, $m + 4 = 2(f + 4)$. Care este suma vârstelor mamei şi fiicei în anul **1 998**? $m + f + 4 + 4 = 52 + 8 \Rightarrow m + f + 8 = 60$. Dar **60** reprezintă **3** părți, fiecare parte fiind egală cu vârsta fiicei din anul **1 998**. Ce vârstă are fata în anul **1 998**? $60 : 3 = 20$. Dar în anul **1 993**? $20 - (1\,998 - 1\,993) = 20 - 5 = 15$. Ce vârstă are mama în anul **1 993**? $(52 - 1) - (15 + 1) = 51 - 16 = 35$.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus.



$\Rightarrow 3f = 60 - 12 \Rightarrow f = 16$, iar $m = 36$.

În **1993**, cu un an în urmă, mama avea **35** ani, iar fiica, **15** ani.

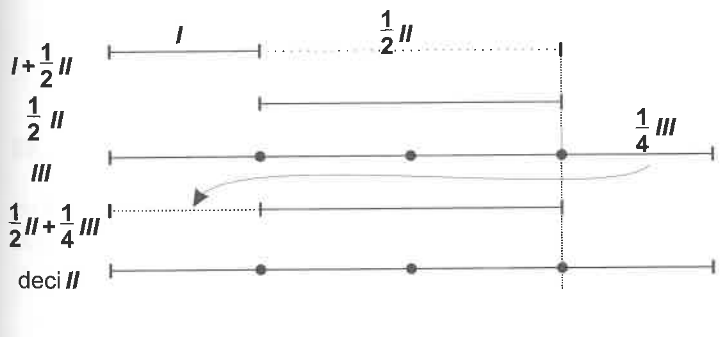
Rezolvarea 3

Dacă $m + f = 52$, iar $m + 4 = 2f + 8 \Rightarrow m = 2f + 4$, iar $2f + 4 + f = 52 \Rightarrow$ $\Rightarrow f = 16$, $m = 36$. În anul **1 993**, mama avea **35** ani, iar fiica, **15** ani.

85. Notăm cu ***I***, ***II*** şi, respectiv, ***III***, numărul inițial de cărți de pe fiecare raft.

Rezolvarea 1. Sugestii pentru reprezentarea grafică:

1) indicăm printr-o linie verticală punctată limitele segmentului ce va reprezenta cele trei numere obținute (egale);
2) reprezentăm printr-un segment I, iar în continuare, până la linia punctată, o jumătate din II;
3) deoarece nu ştim deocamdată cât de mare este segmentul ce reprezintă II, desenăm o jumătate din II (ceea ce a fost transferat la I);
4) reprezentăm segmentul III, din care luăm un sfert şi îl transferăm lângă o jumătate din II; în segmentul III rămân **3** sferturi din III;
5) reprezentăm o jumătate din II, ca la punctul 3; apoi adăugăm (în față) un sfert din III. Obținem **3** segmente egale, adică:



Dacă $\frac{3}{4}\ III = \frac{1}{2}\ II + \frac{1}{4}\ III$, rezultă $\frac{1}{2}II = \frac{2}{4}\ III$, iar $II = III$; dacă $I + \frac{1}{2}\ II = \frac{3}{4}\ II \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\ II = \frac{1}{4}\ III$, iar $II = III = 4I$, rezultă: $I + II + III = 90 \Rightarrow 9I = 90 \Rightarrow I = 10$;

$II = III = 4 \times 10 = 40$.

Rezolvarea 2

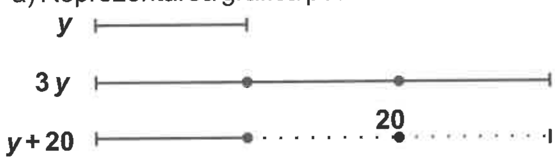
Câte cărți sunt pe fiecare raft după transfer? **90 : 3 = 30**. Dar **30** reprezintă $\frac{3}{4}$ din III, deci $III = 40$. Dacă $II = 30$ plus $\frac{1}{2}$ din II minus un sfert din **40**, rezultă $II = 30 - 10 + \frac{1}{2}\ II$, adică $\frac{1}{2}II = 20 \Rightarrow II = 40$. Dacă $I = 30$ minus o jumătate din **40**, rezultă $I = 30 - 20 = 10$ (cărți).

86. Rezolvarea 1

Notăm cu y numărul căutat.

Observații (pentru clasa a **IV**-a): Ce înseamnă că înmulțim pe y cu **3**? Îl repetăm pe y, ca termen al adunării, de **3** ori. Ce înseamnă că înmulțim pe y cu **1**? Îl luăm în considerare pe y o singură dată, căci $y \times 1 = 1 \times y = y$. Ce înseamnă că înmulțim pe y cu $\frac{2}{3}$? Înseamnă că luăm în considerare numai $\frac{2}{3}$ din y.

a) Reprezentarea grafică poate fi:



Rezultă $2y = 20$, iar $y = 10$.

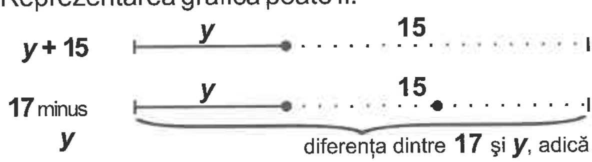
b) Dacă am luat în considerare numai $\frac{2}{3}$ din y, a mai rămas $\frac{1}{3}$ din y. Dacă prin scăderea lui **20** din y obținem tot $\frac{2}{3}$ din y, înseamnă că am scăzut $\frac{1}{3}$ din y, deci $\frac{1}{3}\ y = 20 \Rightarrow y = 60$.

c) Descăzutul **20** este compus din $\frac{2}{3}y + y$, adică $\frac{5}{3}\ y = 20 \Leftrightarrow y = 20 : 5 \times 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 12$.

d) $y : 3 = y - 20$, adică $\frac{2}{3}\ y = 20 \Rightarrow y = 20 : 2 \times 3 \Rightarrow y = 30$.

e) $y : 3 = 20 - y \Rightarrow 20 = y + \frac{1}{3}\ y \Rightarrow y = 20 : 4 \times 3 \Rightarrow y = 15$.

f) Reprezentarea grafică poate fi:



$17 = y + (y + 15) \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$.

Rezolvarea 2

a) $3y = y + 20 / -y \Rightarrow y = 10$;

b) $\frac{2}{3}y = y - 20 / -\frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{1}{3}y = 20 \Rightarrow y = 60$;

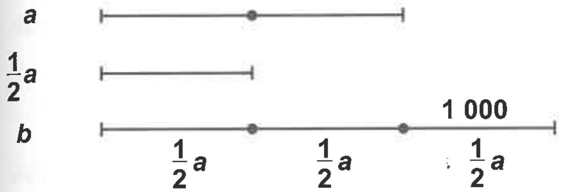
c) $\frac{2}{3}y = 20 - y / +y \Rightarrow \frac{5}{3}y = 20 \Rightarrow y = 12$;

d) $y : 3 = y - 20 / -\frac{1}{3}y \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}y - 20 \Rightarrow y = 30$;

e) $y : 3 = 20 - y / -\frac{1}{3}y \Rightarrow 0 = 20 - \frac{4}{3}y \Rightarrow y = 15$;

f) $y + 15 = 17 - y / +y \Rightarrow 2y + 15 = 17 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$.

87. Notăm primul număr cu a, al doilea cu b.
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că o jumătate din a este **1 000**.
Deci: $a = 2\,000$, iar $b = 3 \times 1\,000 = 3\,000$.

Sau: Din enunț rezultă: $\frac{1}{2}a \cdot 3 = b$, iar $b - a = 1\,000$.

Prin înlocuirea lui b în diferență, obținem: $\frac{3}{2}a - a = 1\,000 \Rightarrow a = 2\,000$, iar $b = 3\,000$.

88. Rezolvarea 1
Fiind acelaşi întreg, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Deci diferența dintre $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{4}$ ale aceluiaşi număr este $\frac{1}{4}$.

Rezultă că $\frac{1}{4}$ din acel număr reprezintă **8**, adică numărul este **32**, deoarece $4 \times 8 = 32$.

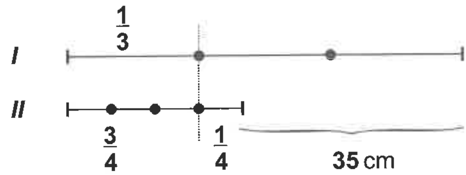
Rezolvarea 2

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a \Rightarrow \frac{1}{4}a = 8 \Rightarrow a = 8 \times 4 \Rightarrow a = 32$.

89. Din enunț rezultă că $\overline{ab} = \frac{3}{8}$ din $\overline{ba} \Rightarrow \overline{ab} = \frac{3}{8}\overline{ba}$. Deci dacă repetăm pe $\overline{ab}$ de **8** ori, obținem de **3** ori $\overline{ba}$ (dacă înmulțim cu **8** fiecare membru al egalității obținem o altă egalitate), adică: $8 \cdot \overline{ab} = 3 \cdot \overline{ba} \Rightarrow 8 \cdot (10a + b) = 3 \cdot (10b + a) \Rightarrow$
$\Rightarrow 77a = 22b / : 11 \Rightarrow 7a = 2b \Rightarrow a = 2, b = 7$, iar $\overline{ab} = 27$.

90. Rezolvarea 1

O reprezentare grafică poate fi:



Dacă $\frac{1}{3}$ din ***I*** reprezintă cât $\frac{3}{4}$ din ***II***, atunci tot întregul ***I*** reprezintă cât **3•3** pătrimi din ***II***, adică ***I*** **= 9** pătrimi din ***II***. Din desen rezultă că **9** pătrimi minus **4** pătrimi = **5** pătrimi din ***II***, care reprezintă **35** cm. Atunci:

$II = 35 : 5 \cdot 4 = 28$ (cm), iar $I = 28 + 35 = 63$ (cm) sau $I = 35 : 5 \times 9 = 63$ (cm).

Rezolvarea 2

$\frac{1}{3}$ din $I = \frac{3}{4}$ din $II / \times 3 \Rightarrow I = \frac{9}{4}$ din II, iar $I - II = 35$.

Obținem: $\frac{9}{4} \cdot II - II = 35 \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot II = 35 \bullet II = 28$; $I = 63$.

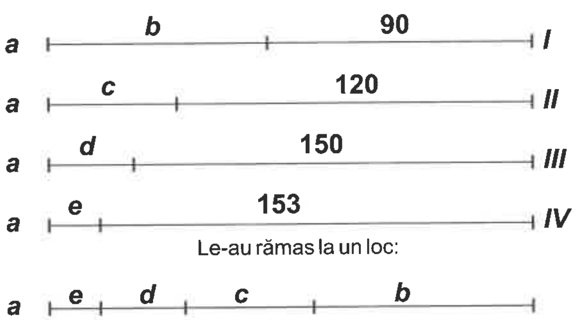
91. Într-o reprezentare grafică avem:

Dacă **1 600** lei reprezintă o jumătate din suma lui George, atunci acesta avea $2 \times 1\,600 = 3\,200$ lei.

92. Rezolvarea 1

Notăm suma inițială a fiecărui copil cu ***a***. În reprezentarea grafică, după delimitarea sumei cheltuite, rămâne în fiecare segment un rest, notat diferit: ***b***, ***c***, ***d*** şi, respectiv, ***e***, adică:

Fiecare la început:

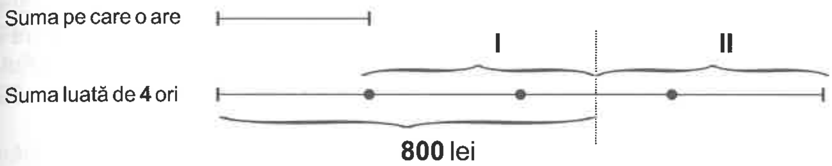


Din sumele rămase s-a putut reprezenta numai o singură parte egală cu suma inițială **a**. Câte părți, fiecare egală cu **a**, au dispărut? **4** părți – **1** parte = **3** părți. Rezultă că **3** părți reprezintă tocmai sumele cheltuite de către cei patru copii. Câți lei reprezintă cele **3** părți? **90 + 120 + 150 + 153 = 513** (lei). Câți lei reprezintă o parte (Câți lei a avut fiecare copil la început)? **513 : 3 = 171** (lei).

Rezolvarea 2

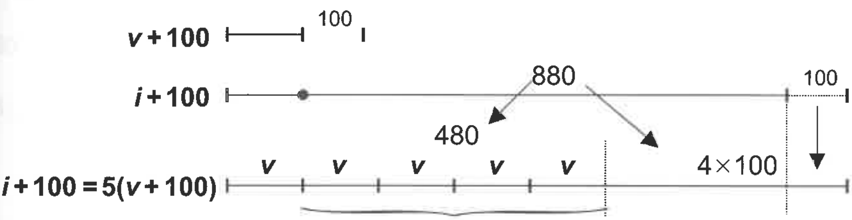
Păstrăm aceleaşi notații. Din enunț rezultă: $a - 90 = b \Rightarrow a = b + 90$; $a - 120 = c \Rightarrow a = 120 + c$; $a - 150 = d \Rightarrow a = 150 + d$; $a - 153 = e \Rightarrow$
$\Rightarrow a = e + 153$. În total cei patru copii au avut **4a** lei, adică
$4a = b + 90 + c + 120 + 150 + d + 153 \Leftrightarrow 4a = 513 + \underbrace{b + c + d + e}_{a} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a = 513 + a\,/-a \Rightarrow 3a = 513 \Rightarrow a = 513 : 3 = 171$.

93. Reprezentarea grafică poate fi:



Când am mărit suma inițială de **4** ori, de fapt i-am adăugat alte **3** părți. Aceste **3** părți reprezintă două numere egale: primul număr este cel care ar mai trebui pentru a fi **800** lei; al doilea este numărul care depăşeşte suma de **800** lei. Deci la partea inițială dacă se adaugă încă o parte şi jumătate se obține suma de **800** lei, adică $2\frac{1}{2}$ părți, fiecare parte fiind egală cu suma inițială, reprezintă **800** lei. Câți lei avea Rada? Dacă **5** jumătăți din sumă reprezintă **800** lei, o jumătate reprezintă **800 : 5 = 160** lei, iar suma este $2 \times 160 = 320$ lei. (Pentru alte soluții, a se vedea problema **46**, din capitolul al **IV**-lea).

94. Notăm cu ***i*** suma Ioanei, cu ***v*** suma Verei. O reprezentare grafică poate fi:

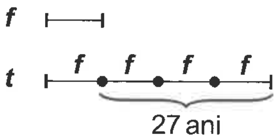


Rezultă $4v = 880 - 400 \Rightarrow v = 120$; $i = 120 + 880 = 1\,000$.

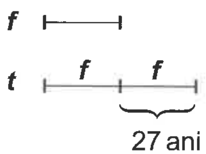
Sau: Păstrăm notațiile de mai sus. Din enunț rezultă: $i = v + 880$, iar $5(v + 100) = i + 100 \Leftrightarrow 4v = 480 \Rightarrow v = 120$; $i = 120 + 880 \Rightarrow i = 1000$.

95. În asemenea probleme diferența de vârstă se păstrează, numai raportul se modifică (a se vedea observația de la problema **2**, capitolul al **IV**-lea).

Care *este* şi *va fi* diferenţa de vârstă dintre tată şi fiu? **46 – 19 = 27** (ani).
a) Ce vârstă avea tatăl când fiul avea **13** ani? **27 + 13 = 40** (ani) *sau*: Cu câţi ani în urmă fiul avea **13** ani? **19 – 13 = 6** (ani). Câţi ani avea tatăl cu **6** ani în urmă? **46 – 6 = 40** (ani).
b) Ce vârstă va avea fiul când tatăl va avea **51** ani? **51 – 27 = 24** (ani) *sau*: peste câţi ani tatăl va avea **51** ani? **51 – 46 = 5** (ani). Ce vârstă va avea fiul peste **5** ani? **19 + 5 = 24** (ani).
c) O reprezentare grafică a raportului dintre vârste poate fi:

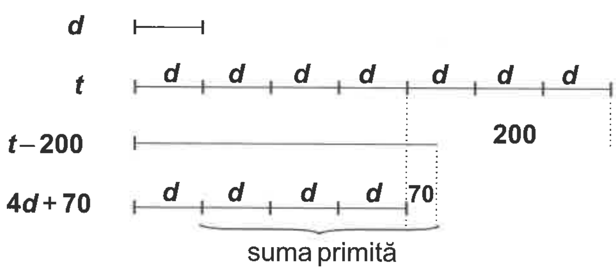


Rezultă că triplul vârstei fiului (când raportul dintre vârste era **4**) reprezintă **27** ani. Ce vârstă *avea* fiul? **27 : 3 = 9** (ani). Cu câţi ani în urmă fiul avea **9** ani? **19 – 9 = 10** (ani). *Răspuns*: cu **10** ani în urmă.
d) O reprezentare grafică a raportului dintre vârste poate fi:



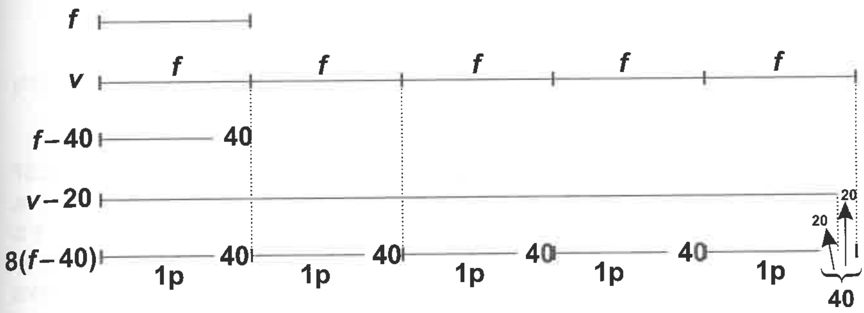
Rezultă că atunci când tatăl va avea de **2** ori vârsta fiului, băiatul va avea **27** de ani (o parte). Peste câţi ani fiul va avea **27** de ani? **27 – 19 = 8** (ani). *Răspuns*: peste **8** ani.

96. Notăm cu ***d*** suma lui Dany, cu ***t*** suma lui Tibi. O reprezentare grafică poate fi:



Din compararea ultimelor două reprezentări cu a doua rezultă:
$3d = 70 + 200 \Rightarrow d = 90$ (lei); $t = 7 \times 90 \Rightarrow t = 630$ (lei).
Sau: $t = 7d$; $t - 200 = 4d + 70 \Rightarrow 7d - 200 = 4d + 70 \Rightarrow 3d = 270 \Rightarrow d = 90$; $t = 7 \times 90 \Rightarrow t = 630$.

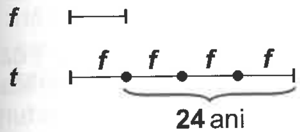
97. Este o problemă de diferenţă şi dublu raport, ca şi problema anterioară (a se vedea şi problema **27**, din capitolul al **IV**-lea). Notăm cu ***f*** suma Florinei, cu ***v*** suma lui Vlad. Grafic, modificările sumelor sunt:



Se observă că din suma rămasă lui Vlad s-au format doar **5** părți din cele **8** ale noului raport. Rezultă că **3** părți, fiecare egală cu suma rămasă Florinei, reprezintă **40 + 40 + 40 + 40 + 20 = 180** lei. Câți lei i-au rămas Florinei? **180 : 3 = 60** (lei). Dar lui Vlad? **8×60 = 480** (lei).

98. <u>Pentru clasele a **II**-a – a **V**-a</u>:

Care este raportul actual dintre vârste? **36 : 12 = 3**. Dacă la fiecare vârstă se adaugă un număr de ani (de exemplu: **(36 + 2) : (12 + 2) = 2,25**), raportul se micşorează, nu se măreşte. Deci nu este posibil ca, peste un număr de ani (în viitor), raportul dintre vârste să fie **4**, ci mai mic decât **3**. Raportul **4** dintre vârste a fost în trecut. Cu câți ani în urmă? Dacă diferența de **36 – 12 = 24** ani se păstrează, rezultă:



Când fiul avea **24 : 3 = 8** ani, iar tatăl **4×8 = 32** ani, raportul dintre vârste era **4**, adică **12 – 8 = 4** ani în urmă.

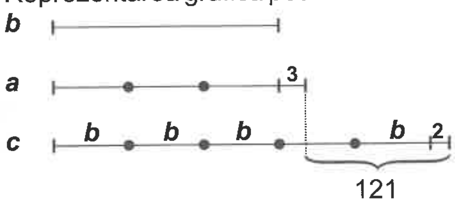
<u>Pentru clasele a **VI**-a – a **VIII**-a</u>:

Notăm cu ***y*** numărul de ani care trec până raportul dintre vârste este **4**. Rezultă: $(12 + y) \cdot 4 = 36 + y \Rightarrow 48 + 4y = 36 + y / - y \Rightarrow 48 + 3y = 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3y = 36 - 48 \Rightarrow y = -4$. Deci raportul dintre vârste a fost în urmă cu **4** ani.

99. <u>Rezolvarea 1</u>

Fie cele trei numere ***a***, ***b*** şi, respectiv, ***c***. Enunțul pe scurt: $a : b = 3$ (rest 3); $a = 3b + 3$; $c : b = 5$ (rest 2) $\Rightarrow c = 5b + 2$; $c - a = 121$.

Reprezentarea grafică poate fi:



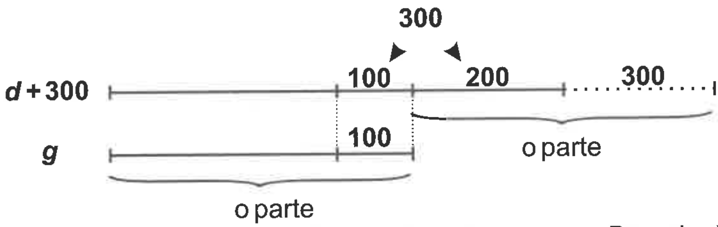
Din desen rezultă: $121 + 3 - 2 = 2b \Rightarrow 2b = 122 \Rightarrow b = 61$; $a = 3 \times 61 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 186$; $c = 5 \times 61 + 2 \;\Rightarrow\; c = 307$.

Sau: $5b + 2 - a = 121 \Rightarrow 5b + 2 - 3b - 3 = 121 \Rightarrow 2b - 1 = 121 \Rightarrow b = 61$ etc.

100. Rezolvarea 1

Notăm cu ***d*** suma lui Dan, cu ***g*** suma lui George.

O reprezentare grafică poate fi:



Rezultă că jumătate din suma pe care ar avea-o Dan, dacă ar mai primi **300** lei, este **300 + (300 – 100) = 500**, tocmai suma pe care o avea George. Câţi lei avea Dan? **500 + 200 = 700** (lei).

Verificare: **(700 + 300) : 500 = 2; 500 – (700 – 300) = 100**.

Rezolvarea 2

Din enunţ rezultă: $d + 300 = 2g$; $d - 300 = g - 100 \Rightarrow d = g + 200$. Atunci: $g + 200 + 300 = 2g \Rightarrow g + 500 = 2g \Rightarrow g = 500$, iar $d = 2 \times 500 - 300 \Rightarrow d = 700$.

101. Cât trebuia să primească fiecare dintre cei **4** copii? **100 : 4 = 25**.

Cât a primit fiecare?

I. **100 : 2 = 50**;

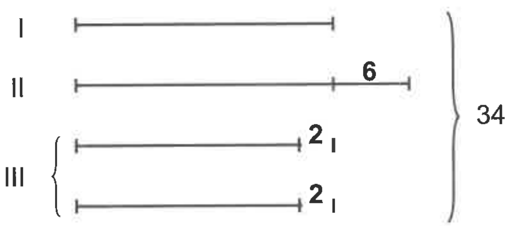
II. **100 : 4 = 25**;

III. **50 : 2 = 25**.

Se observă că **50 = 2×25**. Deci mama ia **25** de lei de la primul şi îi dă mezinului. (*Sau*: O jumătate are două sferturi. Deoarece al doilea şi al treilea au luat câte un sfert rezultă că mezinul şi cel mare împart cele două sferturi pe care le-a luat iniţial cel mare).

102. Rezolvarea 1

Pentru reprezentarea grafică a părţii a treia trebuie să micşorăm cu **6** prima parte, iar ceea ce obţinem trebuie dublat, adică:



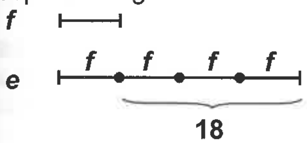
Se observă că dacă din a doua parte luăm **6**, obţinem o parte egală cu prima. Dacă la fiecare parte din a treia mărime adăugăm câte **2**, obţinem alte două părţi, fiecare egală cu prima. Care este suma acestor părţi egale? **34 – 6 + 2 + 2 = 32**. Care este prima parte? **32 : 4 = 8**. Dar a doua? **8 + 6 = 14**. Dar a treia parte? **(8 – 2)•2 = 12**. Într-o altă variantă, dacă din suma **32** scădem **6**, apoi **2** şi încă **2**, obţinem **4** părţi, fiecare egală cu o jumătate din partea a treia, adică **34 – (6 + 2 + 2) = 24**. Atunci partea a treia este **12**, deoarece **24 : 4×2 = 12**. Prima parte este **8**, căci **12 : 2 + 2 = 8**, iar a doua este **14**, căci **8 + 6 = 14**.

Rezolvarea 2

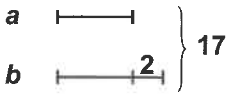
Fie x, y şi, respectiv, z cele trei părţi. Din enunţ rezultă: $x + y + z = 34$; $y = x + 6$; $z = (x - 2) \cdot 2$. Înlocuim prin x în sumă, obţinând:

$x + x + 6 + (x - 2) \cdot 2 = 34 \Leftrightarrow 4x + 2 = 34 \Leftrightarrow 4x = 32 \Leftrightarrow x = 32 : 4 \Leftrightarrow x = 8$ etc.

103. Notăm numerele cu a, b, c, d, e şi respectiv cu f. Scrierea pe scurt este: $a + b + c + d + e + f = 71$; a şi b sunt consecutive impare; rezultă $b = a + 2$; $c + d = 25$, iar $d = 4c$; $e - f = 18$, iar $e = 4f$; $a = ?$; $b = ?$; $c = ?$; $d = ?$; $e = ?$; $f = ?$ Observăm că informaţia despre primele două numere este insuficientă, căci avem numai diferenţa lor. Ne-ar mai trebui ceva. Ce anume? Poate suma lor, poate raportul lor etc. Din prima relaţie rezultă că împreună cu celelalte patru au suma **71**. Dacă am da deoparte suma ultimelor patru numere, nu am putea afla suma lor? Ba da. Ştim însă suma ultimelor patru numere? Nu. O putem afla? Numai dacă aflăm şi ultimele două numere. Din enunţ rezultă $e - f = 18$, iar $e = 4f$. Avem o problemă simplă de diferenţă şi raport. Putem reprezenta grafic astfel:



Din desen rezultă $3f = 18 \Leftrightarrow f = 6$, iar $e = 4 \times 6 = 24$ sau $6 + 18 = 24$. Atunci $e + f = 24 + 6 = 30$. Acum putem afla suma primelor două numere. Din **71** dăm deoparte suma ultimelor **4** numere, adică $71 - 25 - 30 = 46 - 30 = 16$ sau $71 - (25 + 30) = 71 - 55 = 16$. Putem reprezenta grafic relaţiile dintre primele două numere astfel:

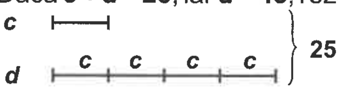


Din desen rezultă că $2a = 16 - 2 \Leftrightarrow a = 14 : 2 \Leftrightarrow a = 7$, iar $b = 7 + 2 \Rightarrow b = 9$.

Trebuie să aflăm şi numerele c şi d.

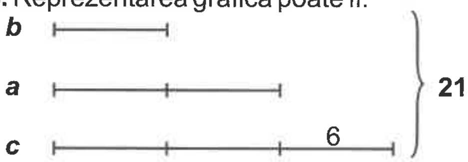
(Se observă că, parcurgând o cale sintetică, le puteam determina întâi pe acestea).

Dacă $c + d = 25$, iar $d = 4c$, rezultă:



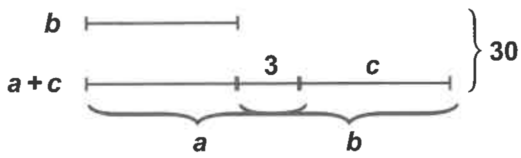
Din desen se observă că $5c = 25 \Rightarrow c = 5$, iar $d = 4 \cdot 5 = 20$.

104. Reprezentarea grafică poate fi:

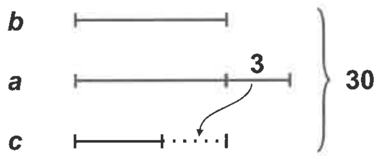


Rezultă că $5b = 21 - 6 \Rightarrow b = 3$, $a = 6$, iar $c = 2 \cdot 3 + 6 \Leftrightarrow c = 12$.

105. Grafic, cele **3** numere se pot reprezenta astfel:

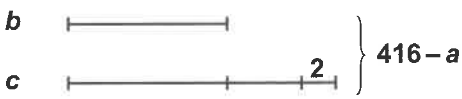


Când adăugăm pe al treilea în continuarea primului, obținem de **2** ori al doilea, adică $\mathbf{3 + c = b}$ sau:



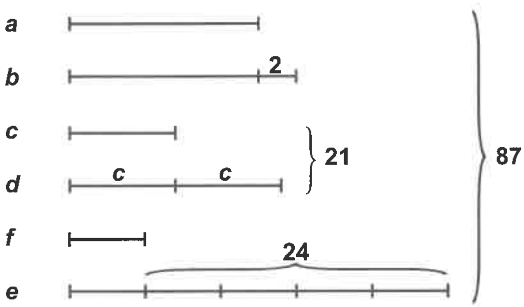
Putem privi suma **30** ca fiind organizată în **3** părți, fiecare egală cu numărul ***b***. Atunci: $b = 30 : 3 \Leftrightarrow b = 10$; $a = 10 + 3 \Leftrightarrow a = 13$; $c = 30 - 10 - 13 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c = 7$ sau $c = 10 - 3 \Leftrightarrow c = 7$.

106. Notăm numerele cu ***a***, ***b*** şi, respectiv, ***c***.
Din enunț rezultă: $a + b + c = 416$; $b + c = 3a$; $c - b = \frac{1}{2}b + 2 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}b + 2$.
Grafic, putem reprezenta astfel:



Deoarece $b + c = 3a$, rezultă că în sumă avem: $a + 3a = 416 \Rightarrow a = 104$, iar $b + c = 416 - 104 \Rightarrow b + c = 312$. Din reprezentarea grafică rezultă că **5** părți, fiecare parte fiind egală cu jumătate din ***b***, reprezintă **312 – 2**, iar $b = 310 : 5 \times 2 \Rightarrow b = 124$; $c = 3 \times 62 + 2 \Rightarrow c = 188$.

107. Scrierea pe scurt a problemei este: $a + b + c + d + e + f = 87$; $b = a + 2$; $c + d = 21$; $d = 2c$; $e - f = 24$; $e = 5f$. $a = ?$; $b = ?$; $c = ?$; $d = ?$; $e = ?$; $f = ?$
Reprezentarea grafică poate fi:



Din $c+d=21$ şi $d=2c$, rezultă $3c=21 \Rightarrow c=7$, iar $d=2 \cdot 7 \Leftrightarrow d=14$.

Din $e-f=24$ şi $e=5f$, rezultă $4f=24 \Rightarrow f=24:4 \Leftrightarrow f=6$, iar $e=6 \times 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e=30$; $e+f=36$.

Scăzând din **87** suma ultimelor **4** numere, obţinem suma primelor două numere, adică: $a+b=87-(21+36) \Leftrightarrow a+b=87-57 \Leftrightarrow a+b=30$; $2a=30-2 \Leftrightarrow 2a=28 \Rightarrow a=28:2 \Leftrightarrow a=14$, $b=14+2 \Leftrightarrow b=16$.

108. Rezolvarea 1

Notăm numerele cu a şi, respectiv, b.

a) Din enunţ rezultă: $3a+3b=150 \Leftrightarrow 3(a+b)=150 \Rightarrow a+b=50$.

$2(3a-3b)=96 \Leftrightarrow 3a-3b=48 \Rightarrow 3(a-b)=48 \Rightarrow a-b=16$.

Dacă $a+b=50$, iar $a-b=16$, rezultă (o problemă simplă, de sumă şi diferenţă): $2b=50-16 \Rightarrow b=17$, iar $a=33$.

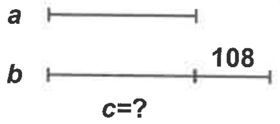
b) Din enunţ rezultă: $3a+3b=150 \Rightarrow a+b=50$; $2(a-b)=40 \Rightarrow$ $\Rightarrow a-b=20$. Atunci $2b=30 \Rightarrow b=15$, iar $a=35$.

Rezolvarea 2

Din $3a+3b=150$ şi $3a-3b=96:2 \Leftrightarrow 3a-3b=48$ rezultă (o problemă simplă, de sumă şi diferenţă): $3a=(150+48):2 \Leftrightarrow 3a=198:2 \Leftrightarrow 3a=99$, iar $a=99:3 \Leftrightarrow a=33$; $3b=(150-48):2 \Leftrightarrow 3b=102:2 \Leftrightarrow 3b=51$, iar $b=51:3$ $\Leftrightarrow b=17$.

109. Notăm numerele cu a, b şi, respectiv, cu c.

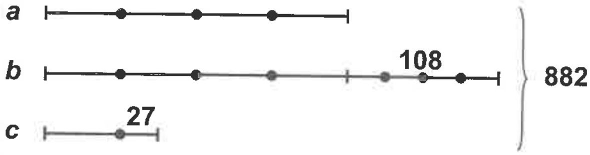
Rezolvarea 1 Din enunţ rezultă:



Pentru reprezentarea grafică a lui c, trebuie să împărţim pe b în **4** părţi la fel de mari, iar pentru a se obţine în sumă **9** părţi, fiecare egală cu **c**, adăugăm **108** la a. Care este suma a **9** părţi fiecare egală cu c? $882+108=990$. Cât este c? $990:9=110$. Care este al doilea număr? $4 \times 110=440$. Care este primul număr? $440-108=332$.

Rezolvarea 2

Deoarece **108** se împarte exact la **4**, putem reprezenta grafic al treilea număr ca un sfert din a plus un sfert din **108**, adică **27**:



Dacă scădem din sumă **108** şi **27**, obtinem **9** părţi, fiecare egală cu un sfert din primul număr, adică $882-(108+27)=882-135=747$.

Deci un sfert din primul număr este **83**, adică $747:9=83$.

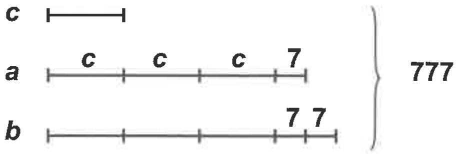
Care este primul număr? $4 \times 83=332$.

Care este al doilea număr? $332+108=440$.

Care este al treilea număr? $440:4=110$ sau $83+27=110$.

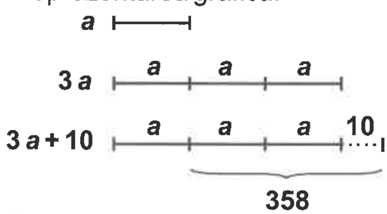
110. Notăm numerele cu a, b şi, respectiv, cu c.
Din enunţ rezultă: $a + b + c = 852$; $3c + 204 = 852$; $a - b = 8$.
Din a doua egalitate rezultă că $c = (852 - 204) : 3 \Leftrightarrow c = 216$.
Atunci $a + b = 852 - 216 \Leftrightarrow a + b = 636$, iar $a - b = 8$.
Rezultă $b = (636 - 8) : 2 \Rightarrow b = 314$, iar $a = 322$.

111. Notăm numerele naturale cu a, b şi, respectiv, cu c.
Din enunţ rezultă: $a + b + c = 777$; $a = 3c + 7$; $b = a + 7$.
Reprezentarea grafică poate fi:



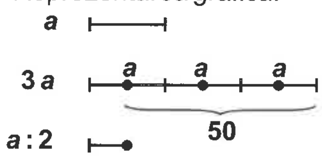
Din reprezentarea grafică rezultă: $7c = 777 - 7 - 2 \cdot 7 \Rightarrow 7c = 756 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 108$; $a = 3 \cdot 108 + 7 \Leftrightarrow a = 331$; $b = 331 + 7 \Leftrightarrow b = 338$.
Sau: deoarece $a = 3c + 7$, iar $b = a + 7$, rezultă $b = 3c + 7 + 7$, iar $a + b + c = (3c + 7) + (3c + 14) + c \Rightarrow 7c + 21 = 777 \Leftrightarrow c = 108$ etc.

112. Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că $a = (358 - 10) : 2 \Leftrightarrow a = 174$.

113. Reprezentarea grafică:



Din desen rezultă că **5** părţi, fiecare egală cu jumătatea numărului, reprezintă **50**. Atunci numărul este **20**, căci $50 : 5 \cdot 2 = 20$.
Sau: $3a - a : 2 = 50 / \times 2 \Leftrightarrow 6a - a = 100 \Leftrightarrow 5a = 100 \Rightarrow a = 20$.

114. Notăm cu a, b, c, r, respectiv deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi restul acestei împărţiri. Atunci: $a : b = c$, $r \neq 0$, adică $a = b \cdot c + r$, iar $c + r = 33$, în care $r = 3c + 1$ şi $r < b$.
Rezolvarea 1. *Grafic*:

$\left.\begin{array}{r} c + r = 33 \\ r = 3c + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

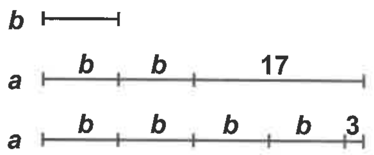
$4c = 33 - 1 \Rightarrow c = 8$, iar $r = 3 \times 8 + 1 \Leftrightarrow r = 25$; $a = b \cdot 8 + 25$, dar $b > 25$. Pentru a minim, $b = 26$; deci $a = 26 \times 8 + 25 \Leftrightarrow a = 233$.

Rezolvarea 2

Din $a = b \cdot c + r$, în care $r = 3c + 1$ şi $r < b$, rezultă: $c + 3c + 1 = 33 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4c = 32 \Rightarrow$ $c = 8$; $a = 8 \cdot b + 3 \cdot 8 + 1 \Leftrightarrow a = 8b + 25$. Pentru a minim, $b = 26$. Deci $a = 26 \cdot 8 + 25 \Leftrightarrow a = 233$.

115. 1) Din enunţ rezultă că $a > b$. Deci $a : b = 4$, rest $3 \Rightarrow a = 4b + 3$ şi $a = 2b + 17$.

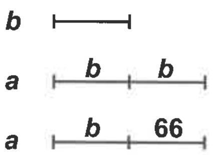
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că $2b + 3 = 17$, adică $2b = 14$. Atunci $b = 7$, iar $a = 2 \cdot 7 + 17 \Leftrightarrow a = 31$ sau $a = 4 \cdot 7 + 3 \Leftrightarrow a = 31$. Într-o altă variantă de rezolvare, putem scrie: $4b + 3 = 2b + 17 / - 2b \Rightarrow 2b + 3 = 17 \Rightarrow 2b = 17 - 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b = 7$; $a = 4 \cdot 7 + 3 \Leftrightarrow a = 31$.

2) $a = 2b$ şi $a = b - 34 + 100 \Leftrightarrow a = b + 100 - 34 \Leftrightarrow a = b + 66$.

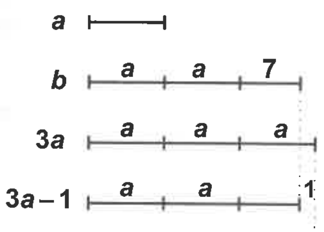
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că $b = 66$, iar $a = 2 \cdot 66 = 132$. Într-o altă variantă de rezolvare, putem scrie: $a = 2b$ şi $a = b - 34 + 100 \Rightarrow 2b = b - 34 + 100 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2b = b + 100 - 34 \Leftrightarrow 2b = b + 66 / - b \Rightarrow b = 66$; $a = 2 \cdot 66 = 132$.

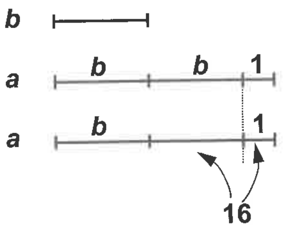
3) Din enunţ rezultă: $b = 2 \cdot (a + 2) + 3 \Leftrightarrow b = 2a + 4 + 3 \Leftrightarrow b = 2a + 7$;

$b = 3a - 1$. Reprezentarea grafică poate fi:



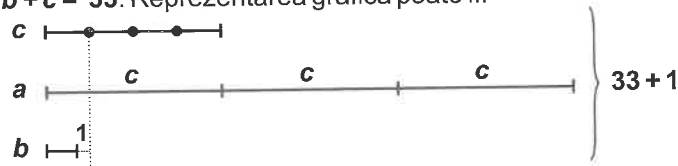
Din desen rezultă că $a = 7 + 1 = 8$, iar $b = 2 \cdot 8 + 7 = 23$ sau $3 \times 8 - 1 = 23$.

116. Fie a suma lui Dinu şi b suma Cameliei. Din enunţ rezultă: $a = b + 16$ şi $a : b = 2$, rest $1 \Rightarrow a = 2b + 1$. Reprezentarea grafică poate fi:



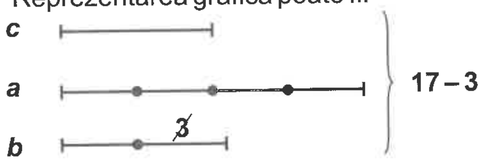
Din desen rezultă că $b + 1 = 16 \Rightarrow b = 15$, iar $a = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \Rightarrow a = 31$ sau $a = 15 + 16 \Rightarrow a = 31$. Într-o altă variantă de rezolvare, putem scrie: $b + 16 = 2b + 1 / - b \Rightarrow 16 = b + 1 \Rightarrow b = 16 - 1 \Leftrightarrow b = 15$; $a = 15 + 16 \Leftrightarrow a = 31$.

117. Fie numerele a, b şi c. Din enunţ rezultă: $a = 3c$, $b + 1 = c : 4$, iar $a + b + c = 33$. Reprezentarea grafică poate fi:



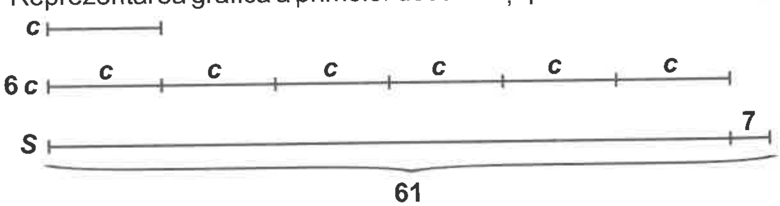
Din desen rezultă că **17** părţi, fiecare egală cu $b + 1$, reprezintă **34**. Atunci $b + 1 = 34 : 17 \Leftrightarrow b + 1 = 2$, iar $b = 2 - 1 = 1$. Rezultă $c = 4 \cdot (1 + 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow c = 8$, iar $a = 3 \cdot 8 \Leftrightarrow a = 24$. Într-o altă variantă de rezolvare (poate fi şi grafică), reţinem că: $c : 4 = b + 1$. Dacă privim pe c ca deîmpărţit, pe $b + 1$ ca rezultat (cât), putem scrie: $c = 4 \cdot (b + 1) \Rightarrow c = 4b + 4$. Luăm apoi şi relaţia $a = 3c$. Vom obţine: $17b = 33 - 4 \times 4 \Rightarrow 17b = 17 \Rightarrow b = 1$ etc.

118. Din enunţ rezultă: $a + b + c = 17$, $a = 2c$, iar $b = a : 4 + 3$.
Reprezentarea grafică poate fi:



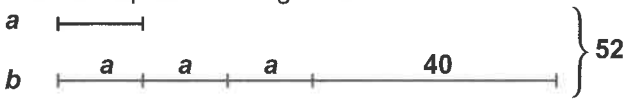
Din desen rezultă că **7** părţi, fiecare egală cu $b - 3$, reprezintă $17 - 3 = 14$. Atunci $b - 3 = 14 : 7 \Rightarrow b - 3 = 2 \Rightarrow b = 5$ şi $c = 2 \cdot 2 = 4$, iar $a = 2 \cdot 4 = 8$. Într-o altă variantă de rezolvare, înlocuiţi în sumă pe a şi b prin c. Veţi obţine: $4c + 2c + c = 28 \Leftrightarrow 7c = 28 \Leftrightarrow c = 4$ etc.

119. Fie numerele a, b, c, iar suma S. Din enunţ rezultă: $a + b + c = 3 \cdot 2c + 7$ $\Leftrightarrow S = 6c + 7 \Leftrightarrow 61 = 6c + 7$; $b = 3a + 40$.
Reprezentarea grafică a primelor două relaţii poate fi:



Din desen rezultă că $\mathbf{6c = 61 - 7 \Leftrightarrow 6c = 54}$, deci $\mathbf{c = 9}$. Pentru primele două numere, avem: $\mathbf{a + b = 61 - 9 \Leftrightarrow a + b = 52}$, iar $\mathbf{b = 3a + 40}$.

Rezultă reprezentarea grafică:



Din desen rezultă: $\mathbf{4a = 52 - 40 \Leftrightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3}$, iar $\mathbf{b = 3 \cdot 3 + 40 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{\Leftrightarrow b = 49}$.

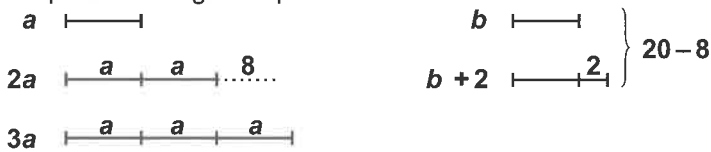
Într-o altă variantă de rezolvare, reținem că: $\mathbf{a + b + c = 6c + 7 \Leftrightarrow}$ $\mathbf{\Leftrightarrow 61 = 6c + 7 \Rightarrow 6c = 61 - 7 \Leftrightarrow 6c = 54 \Rightarrow c = 54 : 6 \Rightarrow c = 9}$.

Dacă $\mathbf{a + b + c = 61 \Rightarrow a + b + 9 = 61 \Rightarrow a + b = 52}$, în care $\mathbf{b = 3a + 40}$.

Deci $\mathbf{a + (3a + 40) = 52 \Rightarrow 4a + 40 = 52 \Leftrightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 12 : 4 \Rightarrow a = 3}$, iar $\mathbf{b = 52 - 3 \Leftrightarrow b = 49}$.

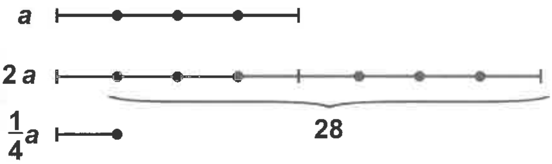
120. Din enunț rezultă $\mathbf{2a + 8 = 3a \Leftrightarrow a = 8}$, iar $\mathbf{8 + b + (b + 2) = 20 \Rightarrow}$ $\mathbf{\Rightarrow 2b = 20 - 10 \Rightarrow b = 10 : 2 \Rightarrow b = 5}$, iar $\mathbf{b + 2 = 5 + 2 = 7}$.

Reprezentările grafice pot fi:



121. Fie acel număr natural $\mathbf{a}$.

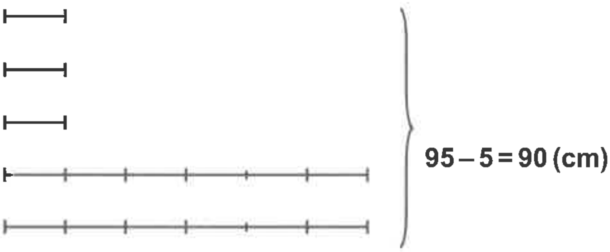
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că **7** părți, fiecare egală cu sfertul lui ***a***, reprezintă **28**. Atunci un sfert este **4**, căci $\mathbf{28 : 4 = 7}$, iar $\mathbf{a = 4 \times 4 = 16}$.

122. Rezolvarea 1

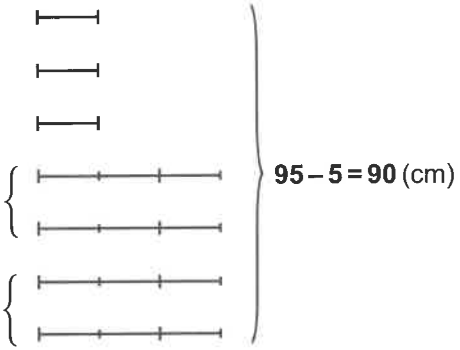
Reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că **15** părți, fiecare egală cu o bucată mai mică, reprezintă **90** cm.

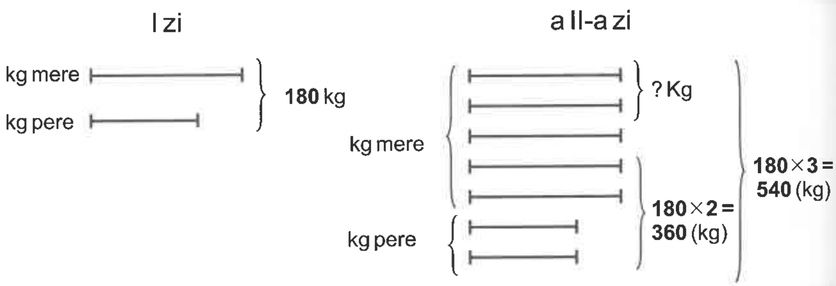
1) Câți cm are fiecare bucată mică? **90 : 15 = 6** (cm).
2) Câți cm are fiecare bucată mai mare? **6 × 3 × 2 = 36** (cm).

Rezolvarea 2



Dacă reprezentarea grafică e cea de mai sus, rezultă că putem privi suma de **90** cm ca fiind organizată în **5** părți, fiecare egală cu o jumătate dintr-o bucată mai mare.
1) Câți cm are fiecare bucată mai mare? **90 : 5 × 2 = 18 × 2 = 36**(cm).
2) Câți cm are fiecare bucată mai mică? **36 : 2 : 3 = 6** (cm).

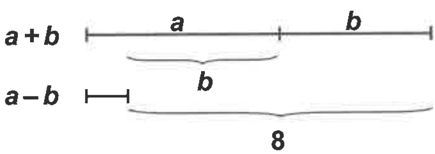
123. Deoarece între cantitățile vândute în prima zi nu avem nici o relație, le putem reprezenta grafic în mod arbitrar:



Din desen rezultă că triplul cantității de mere vândute în prima zi reprezintă **540 – 360 = 180** (kg). Câte kg de mere s-au vândut în prima zi? **180 : 3 = 60** (kg). Dar a doua zi? **5 × 60 = 300** (kg). Câte kg de pere s-au vândut în prima zi? **180 – 60 = 120** (kg). Dar în a doua zi? **2 × 120 = 240** (kg).

124. Pe scurt: ***a* + *b* = *a* – *b* + 8**, iar ***a* × *b* = 20**.

Rezolvarea 1



Din desen rezultă că **2*b* = 8**, iar ***b* = 4**. Atunci ***a* × 4 = 20**, iar ***a* = 5**.

Rezolvarea 2:
$a + b = a - b + 8 \,/ + b \Rightarrow a + 2b = a + 8 \,/ - a \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$.
Dacă $4 \cdot a = 20 \Rightarrow a = 5$.

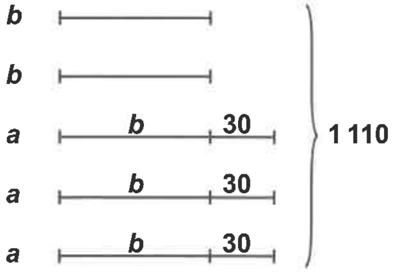
125. Din formularea ultimei părți a enunțului, rezultă că pot exista două soluții: $a > b$ şi $a < b$.

Rezolvarea 1

Varianta 1

Dacă $a > b$, rezultă $3(a - b) = 90 \Rightarrow a - b = 30$.

O reprezentare grafică pentru $3a + 2b$ poate fi:

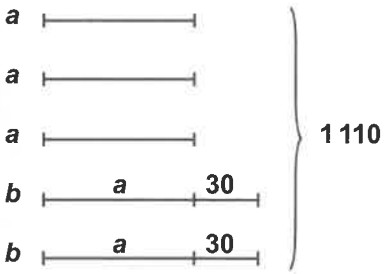


$1\,110 = 3a + 2b = 5b + 90 \Rightarrow 5b = 1110 - 90 \Rightarrow b = 1\,020 : 5 \Rightarrow b = 204$; $a = 234$.

Varianta 2

Dacă $a < b$, rezultă $3(a - b) = 90 \Rightarrow b - a = 30$.

O reprezentare grafică pentru $3a + 2b$ poate fi:



$1\,110 = 3a + 2b = 5a + 60 \Rightarrow 5a = 1110 - 60 \Rightarrow a = 1\,050 : 5 \Rightarrow a = 210$; $b = 240$.

Rezolvarea 2 (*Comparație prin eliminare*)

Varianta 1

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b &= 1\,110 \\ 3a - 3b &= 90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ 5b = 1\,020 \Rightarrow b = 204;\ a = (90 + 3 \cdot 204) : 3 = 234.$$

Varianta 2

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b &= 1\,110 \\ 3b - 3a &= 90 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ 5b = 1\,200 \Rightarrow b = 240;\ a = 210.$$

126. Din formularea condiției referitoare la diferență, rezultă că pot exista două soluții:

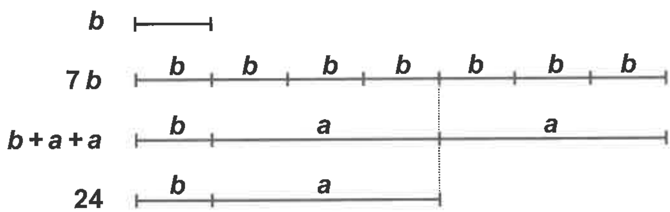
$3a - 2b = 720$ sau $2b - 3a = 720$.

1) $$\left.\begin{aligned} 3a + 2b &= 3\,240 \\ 3a - 2b &= 720 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6a = 3\,960 \Rightarrow a = 660;\ b = (1\,980 - 720) : 2 \Leftrightarrow b = 630.$$

Sau: Se observă că este o problemă de sumă şi diferenţă.
Deci $3a = (3\,240 + 720) : 2 \Leftrightarrow 3a = 3\,960 : 2 \Leftrightarrow 3a = 1\,980 \Leftrightarrow a = 660$;
$b = (3\,240 - 3 \cdot 660) : 2 \Leftrightarrow b = 1\,260 : 2 \Leftrightarrow b = 630$.

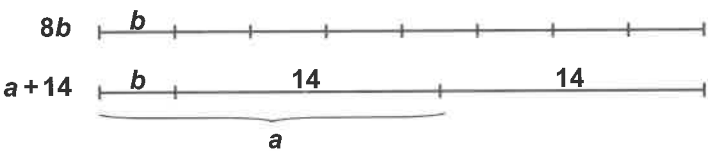
2) $\left.\begin{array}{l} 2b + 3a = 3\,240 \\ 2b - 3a = 720 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b = 3\,960 \Rightarrow b = 990;\ a = (3240 - 2 \cdot 990) : 3 \Leftrightarrow a = 420.$
Sau: $2b = (3\,240 + 720) : 2 \Leftrightarrow 2b = 3\,960 : 2 \Leftrightarrow 2b = 1\,980 \Leftrightarrow b = 990$;
$3a = 990 \cdot 2 - 720 \Leftrightarrow 3a = 1\,260 \Rightarrow a = 1260 : 3 \Leftrightarrow a = 420$.

127. Rezolvarea 1
Notăm primul număr cu a, al doilea cu b. După reprezentarea grafică a lui $7\,b$, reprezentăm un b, apoi în continuare $a + a$, adică $a + (a + b)$:



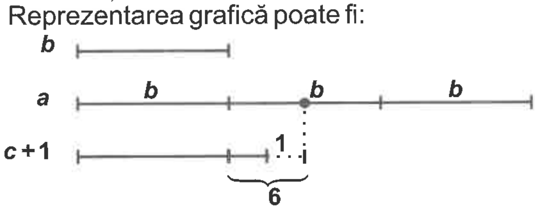
Din desen rezultă $b + 3b = 24$, adică $b = 6$, iar $a = 3 \times 6 \Leftrightarrow a = 18$.
Rezolvarea 2
Pe scurt, relaţiile din enunţ: $a + b = 24$, iar $a + a + b = 7b \Leftrightarrow 2a = 6b \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 3b$. Deci $3b + b = 24$, adică $b = 6$, iar $a = 18$.

128. Rezolvarea 1
Notăm primul număr cu a, al doilea cu b. Reprezentăm grafic $8\,b$, iar apoi, ţinând cont de faptul că $a - b = 14$, adică $a = b + 14$, pe $b + 14$ (sau a).



Din desen rezultă că $8b = b + 14 + 14 \Leftrightarrow 7b = 28$, adică $b = 4$, iar
$a = 4 + 14 \Leftrightarrow a = 18$.
Rezolvarea 2
Dacă $a - b = 14$, iar $a + 14 = 8b$, rezultă $a = b + 14$, iar $b + 14 + 14 = 8b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 28 = 7b \Rightarrow b = 4$; $a = 18$.

129. Rezolvarea 1
Din enunţ rezultă: $a : b = 3 \Rightarrow a = 3b$, deci $a > b$; $c + 1 = a : 2$ şi $c + 1 = b + 6$.
Reprezentarea grafică poate fi:



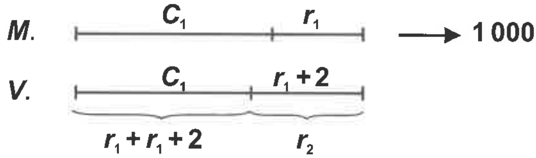
Din desen rezultă că o jumătate din a este b plus o jumătate din b, iar **6** reprezintă jumătate din b. Atunci: $b = ?$ $b = 2\times6 = 12$; $a = 3\times12 = 36$; $c = 36 : 2 - 1 = 17$ sau $12 + (6 - 1) = 17$; $a + c = ?$ $36 + 17 = 53$.

Sau: **6** reprezintă a şasea parte din a, fiind o jumătate dintr-o treime din a. Atunci $a = 6\times6 = 36$; $b = 36 : 3 \Leftrightarrow b = 12$, iar $c = 36 : 2 - 1 = 17$; $a + c = 36 + 17 = 53$.

<u>Rezolvarea 2</u>

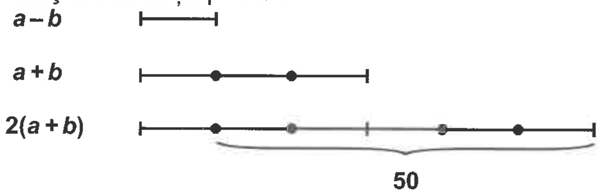
Dacă $a = 3b$, iar $c + 1 = a : 2$, rezultă $c + 1 = 3b : 2$. Dacă $c + 1 = b + 6$, rezultă $3b : 2 = b + 6 \Leftrightarrow 3b = 2(b + 6) \Leftrightarrow 3b = 2b + 12 \Rightarrow b = 12$; $a = 3\times12 \Leftrightarrow a = 36$; $c = 36 : 2 - 1 = 17$.

130. O reprezentare grafică pentru sumele cheltuite şi pentru cele primite ca rest poate fi:



Din desen rezultă că suma pe care a avut-o Viorica poate fi organizată în **3** părţi, fiecare egală cu suma rămasă lui Mihai, plus **4** lei, adică: $3r_1 + 4 = 1\,000$. Câţi lei i-au rămas lui Mihai? $(1\,000 - 4) : 3 = 332$ (lei). Câţi lei a cheltuit Mihai? $1\,000 - 332 = 668$ (lei). Câţi lei a cheltuit Viorica? Dacă i-au rămas mai mult cu **2** lei decât lui Mihai, rezultă că a cheltuit cu **2** lei mai puţin, adică $668 - 2 = 666$ (lei) sau $1\,000 - (332 + 2) = 666$ (lei).

131. Notăm cu a primul număr, cu b al doilea număr. Reprezentarea grafică a sumei şi a diferenţei poate fi:

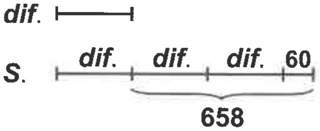


Din desen rezultă că **5** părţi, fiecare fiind egală cu $a - b$, reprezintă **50**. Care este diferenţa? $50 : 5 = 10$. Care este suma? $3\times10 = 30$.

Rezultă $b = (30 - 10) : 2 = 10$; $a = 30 - 10 = 20$.

132. Fie a şi b cele două numere, $a + b = S$, iar $a - b = dif.$ Din enunţ rezultă: $S = dif. + 658$, iar $S = 3dif. + 60$.

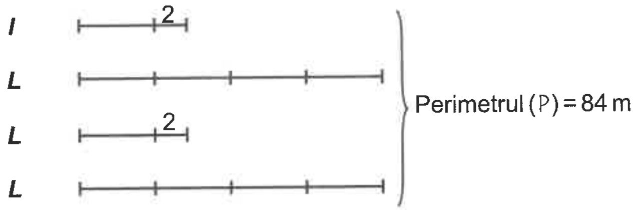
O reprezentare grafică poate fi:



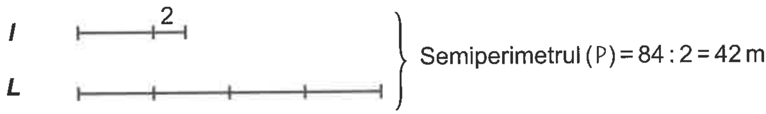
Din desen rezultă că diferenţa este $(658 - 60) : 2 = 299$, iar suma este $299 + 658 = 957$ sau $3\times299 + 60 = 957$.

După o nouă posibilă reprezentare grafică a numerelor ***a*** şi ***b***, obțineți ***b* = 329**, iar ***a* = 628**.

133. Reprezentarea grafică a dimensiunilor dreptunghiului poate fi:



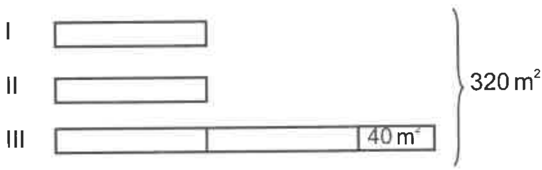
sau:



Din desene rezultă că $\mathbf{10(\mathit{l}-2)=84-(2+2)} \Rightarrow \mathbf{\mathit{l}-2=8}$ (m) sau $\mathbf{5(\mathit{l}-2)=}$ $\mathbf{=42-2} \Rightarrow \mathbf{\mathit{l}-2=8}$, iar $\mathbf{\mathit{L}=4\times8=32}$ (m).

Aria dreptunghiului este $\mathbf{32\times10=320}$ (m^2).

Reprezentarea grafică a suprafeței fiecărei parcele poate fi:



Din desen rezultă că **4** suprafețe, fiecare având aria egală cu una dintre parcelele mici, au aria de $\mathbf{320-40=280}$ m^2.

Care este aria fiecărei parcele dintre cele mici?

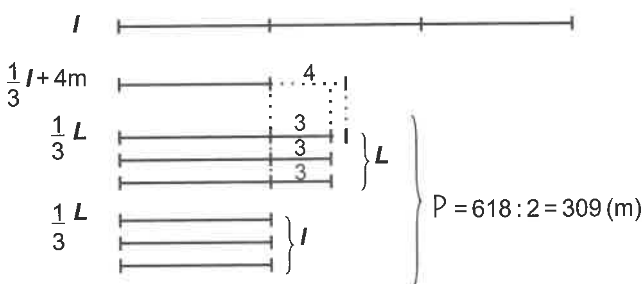
$\mathbf{280:4=70}$ (m^2).

Care este aria parcelei mari?

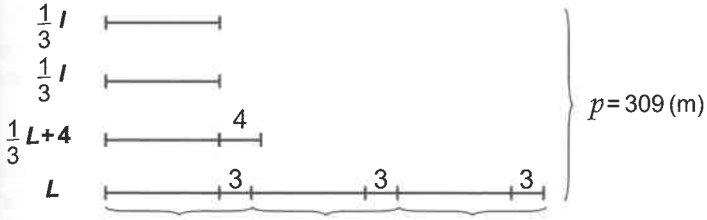
$\mathbf{2\times70+40=180}$ (m^2).

134. Rezolvarea 1

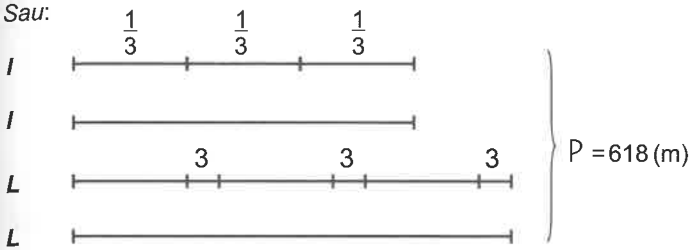
Reprezentarea grafică a dimensiunilor dreptunghiului poate fi:



sau:



Sau:



Din desen rezultă că **6** părți, fiecare parte fiind egală cu o treime din lățime, reprezintă **309 – (3 + 3 + 3) = 300** (m); **l = 300 : 6×3 = 150** (m); **L = (50 + 3)×3 = 53×3 = 159** (m); aria = **150×159 = 23 850** (m^2).

Sau: **12** părți, fiecare parte fiind egală cu o treime din lățime, reprezintă **618 – 6×3 = 600** (m); **l = 600 : 12×3 = 150** (m); **L = (50×3)×3 = 159** (m); aria = **159×150 = 23 850** (m^2).

Rezolvarea 2

Dacă prin adăugarea a **4** m la o treime din lățime se obține cu **1** m mai mult decât o treime din lungime, rezultă că o treime din lățime este cu **4 – 1 = 3** m mai mică decât o treime din lungime, iar toată lățimea (**3** treimi) este cu **3×3 = 9** m mai mică decât toată lungimea (**3** treimi).

De aici, avem o problemă de sumă şi diferență, adică:
$l + L = 618 : 2 = 309$, iar **$L = l + 9$**, de unde rezultă că **$2 \cdot l = 300$**, iar **$l = 150$** m; **$L = 159$** m; aria = **23 850** m^2.

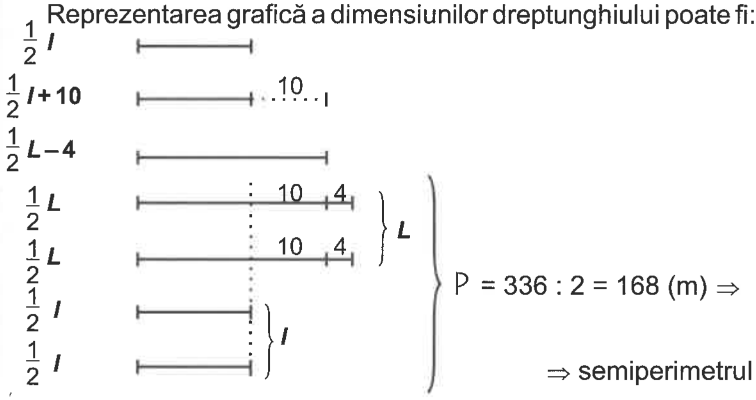
Rezolvarea 3

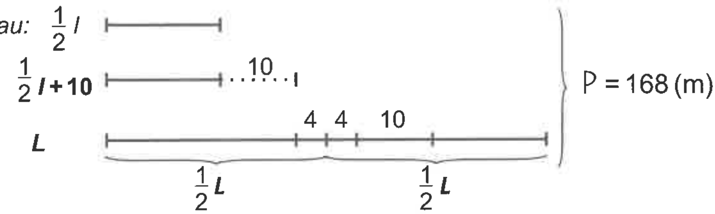
Din enunț rezultă: $\frac{1}{3}L + 4 = \frac{1}{3}L + 1 \,/-1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}l + 3 = \frac{1}{3}L \,/\times 3 \Leftrightarrow l + 9 = L$;

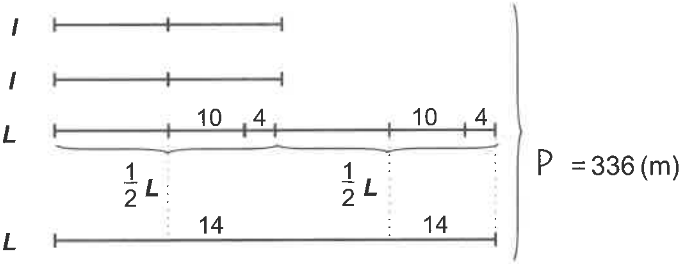
atunci **$2(L + l) = 618 \Rightarrow 2(2l + 9) = 618 \Rightarrow 2l + 9 = 309 \Rightarrow l = 150$**, iar **$L = 159$**; aria = **23 850** m^2.

135. Rezolvarea 1

Reprezentarea grafică a dimensiunilor dreptunghiului poate fi:



Sau:


Sau:


Din desen rezultă că **4** părți, fiecare parte fiind egală cu o jumătate din lățime, reprezintă **168 – (10 + 10 + 4 + 4) = 140** m; $\boldsymbol{l}$ **= 140 : 4×2 = 70** m; $\boldsymbol{L}$ **= (35 + 14)×2 = 98** m; *sau*: **4** părți, fiecare parte fiind egală cu o jumătate din lățime, reprezintă **336 – (10 + 4 + 10 + 4 + 14 + 14) = 280** m; $\boldsymbol{l}$ **= 280 : 8×2 = 70** (m); $\boldsymbol{L}$ **= (35 + 14)×2 = 98** (m); aria = **70×98 = 6 860** (m^2).

Rezolvarea 2

Dacă prin adăugarea a **10** m la o jumătate din lățime se obțin cu **4** m mai puțin decât o jumătate din lungime, rezultă că o jumătate din lățime este cu **10 + 4 = 14** m mai mică decât o jumătate din lungime; deci lățimea este cu **14 + 14 = 28** m mai mică decât lungimea. De aici, avem o problemă simplă de sumă şi diferență, adică: $\boldsymbol{l + L = 336 : 2 = 168}$ (m), iar $\boldsymbol{L = l + 28}$, de unde rezultă că $\boldsymbol{2l = 140}$, $\boldsymbol{l = 70}$ m, iar $\boldsymbol{L = 168 - 70 = 98}$ (m) sau $\boldsymbol{L = 70 + 28 = 98}$ (m); aria **= 98×70 = 6 860** (m^2).

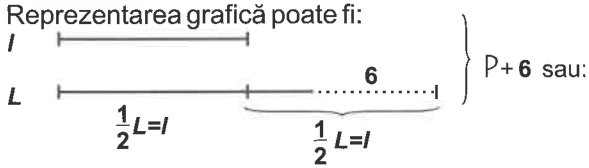
Rezolvarea 3

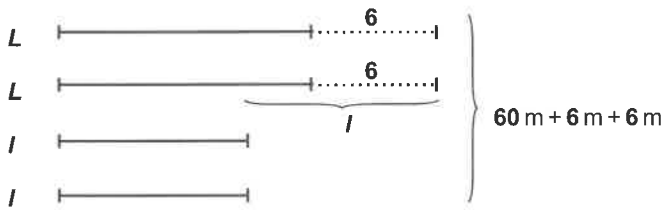
Din enunț rezultă că: $\frac{1}{2}l + 10 = \frac{1}{2}L - 4 \ / +4 \Rightarrow \frac{1}{2}l + 14 = \frac{1}{2}L \ / \times 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l + 28 = L$; atunci $2(L + l) = 336 \Leftrightarrow 2(2l + 28) = 336 \Rightarrow 2l + 28 = 168 \Rightarrow l = 70$ m; $L = 98$ m; aria = **6 860** m^2.

136. Rezolvarea 1

Reprezentarea grafică poate fi:

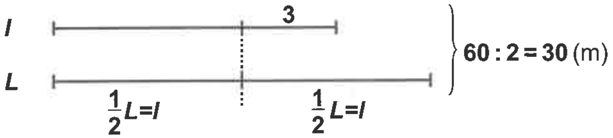




Din desen rezultă că $3l = 36$ m, căci $p + 6 = (60 + 12) : 3 = 36$ (m), $l = 12$ m, iar $L = 2 \times 12 - 6 = 18$ (m) *sau* $L = 36 - 6 - 12 = 18$ (m) *sau* $6l = 60 + 12 = 72$ (m), $l = 12$ m, iar $L = (60 - 2 \times 12) : 2 = 18$ (m) *sau* $2 \times 12 - 6 = 18$ (m); aria = 216 m^2.

Rezolvarea 2

Atunci când s-ar mări lungimea dreptunghiului cu **6** m, jumătate din ea s-ar mări cu **3** m. Dacă lățimea este cât jumătate din *lungimea mărită cu* **3** *m*, rezultă că lățimea este mai mare cu **3** m decât jumătate din lungime. De aici, reprezentarea grafică poate fi:



Din desen rezultă că $l = (30 - 3) : 3 + 3 = 12$ (m), iar $L = 30 - 12 = 18$ (m) *sau* $L = (30 - 3) : 3 \times 2 = 18$ (m); aria = 216 m^2.

Rezolvarea 3

Din enunț rezultă: $(L + 6) : 2 = l \Rightarrow L + 6 = 2l \Rightarrow L = 2l - 6$; $(L + l) = 60 : 2 = 30$; înlocuind pe L în semiperimetru, rezultă că $2l - 6 + l = 30 \Rightarrow 3l = 36 \Rightarrow l = 12$ (m); $L = 2 \times 12 - 6 \Rightarrow L = 18$ (m); aria = 216 m^2.

137. a) Dacă numărul monedelor de **20** lei era egal cu cel al monedelor de **50** lei, rezultă că o grupă de **2** monede diferite valora $20 + 50 = 70$ lei, iar în suma de **1 400** lei, erau **20** monede de fiecare fel, căci $1\,400 : 70 = 20$.

Verificare: $20 = 20$; $20 \times 20 + 20 \times 50 = 400 + 1\,000 = 1\,400$.

b) Dacă cele două sume erau egale rezultă că suma plătită cu monede de un singur fel era de **700** lei, căci $1\,400 : 2 = 700$. Erau **35** monede de **20** lei, deoarece $700 : 20 = 35$; erau **14** monede de **50** lei, căci $700 : 50 = 14$.

Verificare: $14 \times 50 + 35 \times 20 = 700 + 700 = 1\,400$; $700 = 700$.

c) Notăm numărul monedelor de **20** lei cu y, iar al celor de **50** lei cu z. Suma obținută din monedele de **20** lei va fi $20y$, iar cea obținută din monedele de **50** lei va fi $50z$. Din enunț rezultă: $20y + 50z = 1\,400 \ / : 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2y + 5z = 140$. Deoarece există cel puțin o monedă de fiecare fel, iar $2y$ şi **140** sunt numere pare, rezultă că şi celălalt termen al sumei este un număr par. Dar ce valoare are z, pentru ca $5z$ să fie număr par? Numai un număr par, căci **5** este un număr impar. Deoarece $5z$ este un termen al sumei, rezultă $5z \in \{10; 20; 30; 40; 50; ...; 130\}$. Dacă $5z = 10 \Rightarrow z = 2$, iar $y = (140 - 10):2$ $\Leftrightarrow y = 65$; dacă $5z = 20 \Rightarrow z = 4$, iar $y = (140 - 20) : 2 \Leftrightarrow y = 60$; dacă $5z = 30 \Rightarrow$ $\Rightarrow z = 6$, iar $y = 55$; celelalte soluții sunt:

$(z, y) \in \{(8, 50), (10, 45), (12, 40), (14, 35), (16, 30), (18, 25)\}$. Deoarece $z \neq y$, $z \neq 20$. Alte soluții: $(z, y) \in \{(22, 15), (24, 10), (26, 5)\}$.

Rezolvarea 2

Din $2y + 5z = 140 \Rightarrow y = (140 - 5z) : 2 \Rightarrow y = 70 - 5z : 2$, în care $z \neq y \neq 0$, $5z : 2 < 70$ şi $5z : 2 \in \mathbb{N}^*$, deci z este un număr par diferit de **0**. Obținem soluțiile de mai sus.

138. Pentru a afla câte kg de fructe s-au vândut din ultimele două calități, având prețul unitar, trebuie să aflăm câți lei s-au încasat în total pe aceste două calități. Dacă scădem din totalul de **139 200** lei suma încasată pentru

52 kg, obținem suma căutată, adică: $\mathbf{139\,200 - 52 \times 1\,400 = 66\,400}$ (lei).

Pentru câte kg de fructe s-au încasat **66 400**lei? $\mathbf{113 - 52 = 61}$ kg. Parcurgem o cale tipică acestor probleme (de falsă ipoteză, a se vedea problemele **1.–13.**, din capitolul al **VI** – lea) şi obţinem exerciţiul:

$\mathbf{(66\,400 - 61 \times 1\,000) : (1\,200 - 1\,000) = 27}$ (kg fructe de calitatea a II–a); $\mathbf{61 - 27 = 34}$ (kg, calitatea a III–a) sau $\mathbf{(61 \times 1\,200 - 66\,400) : (1\,200 - 1\,000) = 34}$.

139. Rezolvarea 1. *Comparație prin scădere*:

Fie a şi b cele două numere.

Din enunț rezultă: $a + b = 56$ şi $a : 4 + a : 2 = 19$, adică suma dintre sfertul lui a şi doimea lui b este **19**. Pentru a compara relația a doua cu prima, înmulțim ambii membri ai egalității a doua cu **4** (se mai poate înmulți cu **2** sau se pot împărți ambii membri ai egalității cu **4** sau cu **2**), adică:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=56 \\ a:4+b:2=19/\times 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=56 \\ a+2b=76 \end{array}\right\} \Rightarrow b=76-56 \Rightarrow b=20,$$

iar $a = 56 - 20 \Rightarrow a = 36$.

Rezolvarea 2. *Falsă ipoteză*

Presupunem că ambele numere se împart la **2**, atunci şi suma va fi $\mathbf{56 : 2 = 28}$, cu $\mathbf{28 - 19 = 9}$ mai mare decât suma dată prin împărțirea primului număr la **4**, nu la **2**. Deci diferența dintre jumătatea şi sfertul primului număr este **9**, adică sfertul primului număr este **9**. Atunci primul număr este **36**, căci $\mathbf{4 \times 9 = 36}$, iar al doilea este **20**, deoarece $\mathbf{56 - 36 = 20}$.

140. Rezolvarea 1

Dacă **5** cai consumă **170** q de fân, atunci **1** cal consumă $\mathbf{170 : 5 = 34}$ q de fân, iar **3** cai consumă $\mathbf{3 \times 34 = 102}$ q de fân. Dacă **17** q de fân ajung pentru o vacă, atunci **102** q de fân ajung pentru $\mathbf{102 : 17 = 6}$ vaci.

Rezolvarea 2

Câte q de fân consumă un cal într-un an? $\mathbf{170 : 5 = 34}$ q. De câte ori consumă mai mult un cal decât o vacă? $\mathbf{34 : 17 = 2}$ (ori). Rezultă că fânul consumat de **3** cai va ajunge pentru **6** vaci, deoarece $\mathbf{2 \times 3 = 6}$.

141. Rezolvarea 1

Dacă pentru **2** kg de smântână trebuie **20** l lapte, atunci pentru **1** kg smântână trebuie $\mathbf{20 : 2 = 10}$ l lapte, iar pentru **10** kg smântână trebuie $\mathbf{10 \times 10 = 100}$ l lapte.

Deci pentru **3** kg de unt trebuie **100** l lapte, iar pentru **1** kg de unt trebuie **100 : 3** (l lapte); pentru **60** kg de unt trebuie $\mathbf{100 : 3 \times 60 = 2\,000}$ l lapte.

Rezolvarea 2

Scriem pe scurt astfel: **20** l lapte $\longrightarrow$ **2** kg smântână;

10 kg smântână $\longrightarrow$ **3** kg de unt.

Egalăm datele pentru cantitatea de smântână, înmulțind fiecare membru al primei relații cu **5**. Deci:

$\mathbf{5 \times 20}$ l lapte $\longrightarrow$ $\mathbf{5 \times 2}$ kg smântână $\Rightarrow$ **100** l lapte $\longrightarrow$ **10** kg smântână $\Rightarrow$

100 l lapte $\longrightarrow$ **3** kg de unt $/\times$ **20** $\Rightarrow$ **2 000** l lapte $\longrightarrow$ **60** kg unt.

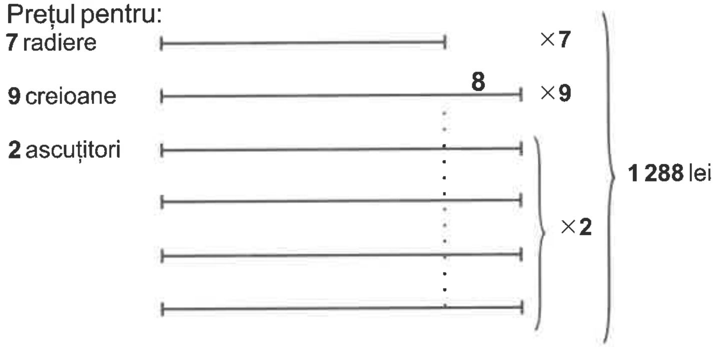
142. Dacă prima brigadă ar fi terminat lucrarea în **4** zile, atunci a şasea parte

$(\frac{1}{6})$ din efectivul ei va termina lucrarea în $\mathbf{6 \cdot 4 = 24}$ zile, căci, numărul muncitorilor fiind de **6** ori mai mic, timpul necesar va fi de **6** ori mai mare. Analog, un sfert ($\frac{1}{4}$) din efectivul brigăzii a doua va termina lucrarea în $4 \times 6 = 24$ zile, iar a treia parte ($\frac{1}{3}$) din efectivul brigăzii a treia va termina lucrarea în $3 \times 8 = 24$ zile. Rezultă că fiecare grup din noua echipă ar lucra într-o singură zi a **24**-a parte ($\frac{1}{4}$) din lucrare, iar împreună, cele **3** grupuri, ar lucra într-o zi **3** asemenea părți, adică $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ din lucrare. Pentru toată lucrarea, vor fi necesare **8** zile.

143. Pe scurt, relațiile sunt: **6** pixuri şi **36** creioane costă **3 000** lei, **6** pixuri şi **1** stilou costă **3 000** lei, **1** pix, **1** stilou şi **20** creioane costă **3 000** lei. Din comparația primelor două relații rezultă că **1** stilou costă cât **36** de creioane. Înlocuind în ultima relație şi comparând-o cu prima obținem:

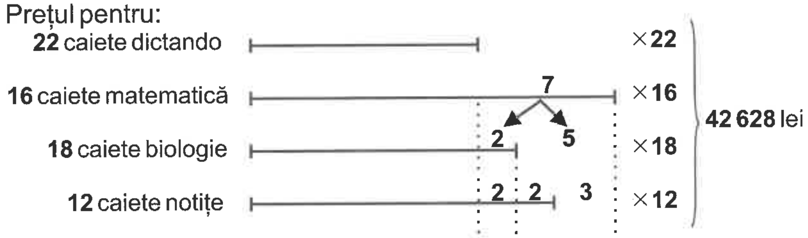
I: **1** pix şi **56** creioane costă **3 000** lei, iar **II**: **6** pixuri şi **36** creioane costă **3 000** lei /: **6** $\Rightarrow$ **1** pix şi **6** creioane costă **500** lei, iar $56 - 6 = 50$ creioane costă $3\,000 - 500 = 2\,500$ lei, adică **1** creion costă $2\,500 : 50 = 50$ lei. Un pix costă $500 - 6 \times 50 = 200$ lei. Un stilou costă $3\,000 - 6 \times 200 = 1\,800$ lei. Încercați şi alte moduri de rezolvare: din comparația ultimelor două relații, rezultă că **5** pixuri costă cât **20** creioane, adică **1** pix costă cât **4** creioane etc.

144. Reprezentarea grafică poate fi:



Într-o variantă de rezolvare, din desen rezultă că $1\,288 + 7 \times 8 = 1\,344$ lei reprezintă suma pentru $7 + 9 + 2 \times 4 = 24$ părți, fiecare parte fiind egală cu prețul unui creion. Cât costă un creion? $1\,344 : 24 = 56$ (lei). Cât costă o radieră? $56 - 8 = 48$ (lei). Dar o ascuțitoare? $4 \times 56 = 224$ (lei).

145. Reprezentarea grafică poate fi:



Câte caiete au cumpărat în total? **22 + 16 + 18 + 12 = 68** (caiete). Câți lei ar fi costat **68** de caiete dictando (cele mai ieftine)? **42 628 – (16×7 + 18×2 + + 12×4) = 42 432** (lei). Câți lei a costat un caiet de dictando? **42 432 : 68 = = 624** (lei). Câți lei a cheltuit fiecare copil? Primul: **624×22 = 13 728** (lei); al doilea: **(624 + 7)×16 = 10 096** (lei); al treilea: **(624 + 2)×18 = 11 268** (lei); al patrulea: **(624 + 4)×12 = 7 536** (lei).

146. Dacă **5** kg de mere costă cât **9 600** lei plus o cincime din prețul unui kg, rezultă că **24** cincimi kg mere costă **9 600** lei. De ce? Un kg de mere (un întreg) are **5** cincimi, iar **5** kg au **5×5** cincimi = **25** cincimi kg de mere. Atunci **25** cincimi kg de mere ⟶ **9 600** lei plus o cincime kg de mere, adică **24** cincimi kg de mere ⟶ **9 600** lei; o cincime kg de mere costă **9600 : 24 = 400** (lei), iar un kg de mere costă **5×400 = 2 000** lei.

147. $P = (L + l)\times 2$, pentru perimetrul dreptunghiului, iar pentru cel al pătratului, $4l$, unde L este lungimea dreptunghiului, iar l este lățimea dreptunghiului sau latura pătratului. Deoarece $L = 3l$, atunci $P_{dr} = (3l + l)\times 2 = 8l$, iar $P_{pătrat} = 4l$.

Rezultă că perimetrul dreptunghiului este mai mare decât perimetrul pătratului de **2** ori, căci $8l : 4l = 2$. *Particularizarea*: Fie $L = 9$ m (un număr divizibil cu **3**).

Perimetrul dreptunghiului ar fi **24** m, căci **(9 + 9 : 3)×2 = (9 + 3)×2 = 24**, iar perimetrul pătratului ar fi de **12** m, căci $l = 9 : 3 = 3$, iar $4l = 12$m. Atunci **24**m : **12**m = **2** (ori).

148. a) Deoarece $a = 16$, rezultă $e = 21$, iar $f = 46 - 21 \Rightarrow f = 25$.
b) Deoarece $a = 99$, rezultă $e = 25$, iar $f = 25 + 102 \Rightarrow f = 127$.

149. Fie a numărul căutat. Din enunț rezultă: $a + 117 - 9 = 203 - 18$; $a = 77$.

150. $a - 7\times 7 = 7 + 7$; $a = 63$.

151. $a : 2 + 1\,004 : 4 = 1\,007 \Rightarrow a : 2 + 251 = 1\,007$; $a = 1\,512$.

152. $a : 2 + a : 4 + 230 = a + 8 \Rightarrow \frac{3}{4}\,a + 222 = a \Rightarrow \frac{1}{4}\,a = 222$, iar $a = 222\times 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 888$.

153. $a - 16 = 37 - 20 \Rightarrow a - 16 = 17 \Rightarrow a = 33$.

154. $100 - a = 29 + 18 \Rightarrow 100 - a = 47 \Rightarrow a = 53$.

155. Fie numerele naturale a și b. Din enunț rezultă: $a + b = 708$; $a - 108 = 97$ $\Rightarrow a = 205$, iar $205 + b = 708$, deci $b = 503$. Restul al doilea este **395**, căci **503 – 108 = 395**. Sau: **708 – 2×108 = 492; 492 – 97 = 395**.

156. Fie numerele naturale a și b. Din enunț rezultă: $a - b = 999$.
Dacă $a = 1\,000$, rezultă $1\,000 - b = 999 \Rightarrow b = 1$. Dacă $b = 1\,000$, rezultă $a - 1\,000 = 999 \Rightarrow a = 1\,999$.

157. $(266 + 198) : (103 - a) = 77$ (rest 2) $\Leftrightarrow (266 + 198 - 2) : 77 = 103 - a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 462 : 77 = 103 - a \Rightarrow 6 = 103 - a \Rightarrow a = 97$. Dacă avem $a - 103$, atunci $a = 109$.

158. $81 : 9 \times 2 - (3 \cdot 3 - 2) - 10 = 18 - 7 - 10 = 1$.

159. a) $24 - 2y = y \cdot y \Rightarrow 24 = 2y + y \cdot y \Rightarrow 24 = y(y + 2)$. Descompunem pe **24** în două numere consecutive pare (căci au produsul par).

Deoarece $24 = 4 \times 6 \Rightarrow y = 4$.

Verificare: $(24 - 4 - 4) : 4 = 16 : 4 = 4$.

b) $(48 - y) : y = 4y + y \Rightarrow 48 - y = 5y \cdot y \Rightarrow 48 = 5y \cdot y + y \Rightarrow 48 = y(5y + 1)$. Descompunem pe **48** în doi factori, dintre care unul să fie cu **1** mai mare decât produsul dintre celălalt factor şi **5**.

Deoarece $48 = 3(15 + 1)$, rezultă $y = 3$; sau $48 : y - y : y = 5y \Rightarrow$
$\Rightarrow 48 : y - 1 = 5y \Rightarrow 48 : y = 5y + 1 \Rightarrow 48 = y(5y + 1) \Rightarrow y = 3$.

c) $24 : y + 4 + 1 = 11 \Rightarrow 24 : y = 11 - 5 \Rightarrow 24 : y = 6 \Rightarrow y = 4$.

d) $17 : y + y - 1 = 17 \Rightarrow 17 : y + y = 18 \Rightarrow 17 : y = 18 - y \Rightarrow 17 = (18 - y) \cdot y$. Descompunem pe **17** în doi factori, adică $17 = 1 \cdot 17 \Rightarrow y = 17$ sau $y = 1$.

e) $2(y \times 23 : 4) = 184 \Rightarrow y \times 23 : 4 = 92 \Rightarrow y \times 23 = 368 \Rightarrow y = 368 : 23 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 16$.

f) $5(y : 2 \times 4) = 60 \Rightarrow y : 2 \times 4 = 12 \Rightarrow y : 2 = 3 \Rightarrow y = 6$; sau $5 \cdot (2y) = 60$ etc.

160. $\{16\,000 - [(6x + 3\,708) : x + 1\,008 \cdot 13 - 60\} : 80 = 2 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16\,000 - [(6x + 3\,708) : x + 1\,008] \cdot 13 - 60 = 1 \times 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16\,000 - [(6x + 3\,708) : x + 1\,008] \cdot 13 = 60 + 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow [(6x + 3\,708) : x + 1\,008] \cdot 13 = 16\,000 - 140 \Rightarrow$
$\Rightarrow (6x + 3\,708) : x + 1\,008 = 15\,860 : 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow (6x + 3\,708) : x = 1\,220 - 1\,008 \Rightarrow (6x + 3\,708) : x = 212$.

Deoarece deîmpărţitul este egal cu împărţitorul înmulţit cu câtul, rezultă $6x + 3\,708 = 212x$. Deoarece un termen este egal cu diferenţa dintre sumă şi celălalt termen, rezultă $3\,708 = 212x - 6x \Rightarrow x = 3\,708 : 206 \Rightarrow x = 18$.

161. $42 : 6 = 7$ sau $7 \times 6 : 6 = 7$; $9 \times 8 = 72$ sau $18 \times 8 : 2 = 72$ sau $18 \times (8 : 2) =$
$= 72$; $72 : 3 = 24$ sau $9 : 3 \times 8 = 24$ sau $8 \times (9 : 3) = 24$; $12 \cdot (2 + 4) = 72$ sau $12 \cdot 6 : 3 + 12 \cdot 4 = 72$; $10 \times 8 = 80$ sau $20 : 4 \times 8 + 5 \times 8 = 20 \times (8 : 4) + 40 = 80$.

$a : 3 \times 9 + 9a = a \cdot (9 : 3) + 9a = 3a + 9a = 12a$ sau $9(a : 3 + a) = 9 \cdot (\frac{1}{3}a + a) =$
$= 9 \cdot \frac{4}{3}\ a = 12a$.

1) $4 \cdot \{3 + 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2)] : 6\} : 31 = 12 - 8 \Rightarrow 4 \cdot \{3 + 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2)] : 6\} =$
$= 31 \times 4 \Rightarrow 3 + 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2)] : 6 = 31 \times 4 : 4 \Rightarrow 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2)] : 6 =$
$= 31 - 3 \Rightarrow 3 \cdot [a + 4 \cdot (a : 2 + 2)] = 28 \times 6 \Rightarrow a + 4 \cdot (a : 2 + 2) = 28 \times 6 : 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + a : 2 \times 4 + 8 = 28 \times 6 : 3 \Rightarrow a + a : 2 \times 4 + 8 = 56 \Rightarrow a + 2a = 48 \Rightarrow a = 48 : 3$
$\Rightarrow a = 16$.

2) $128 - \{46 + [a - 4 \cdot (a : 8 + 6) + 90] : 5\} : 4 = 110 - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{46 + [a - 4 \cdot (a : 8 + 6) + 90] : 5\} : 4 = 128 - 103 \Rightarrow$

$\Rightarrow 46+[a-4\cdot(a:8+6)+90]:5=4\times 25\Rightarrow$
$\Rightarrow [a-4\cdot(a:8+6)+90]:5=100-46\Rightarrow a-4\cdot(a:8+6)+90=54\times 5\Rightarrow$

$\Rightarrow a-4\cdot(a:8+6)=270-90\Rightarrow a-4\cdot(a:8+6)=180\Rightarrow a-(a:8\cdot 4+6\cdot 4)=$

$=180\Rightarrow a-(a:2+24)=180\Rightarrow a=180+a:2+24\Rightarrow a=204+a:2.$
Rezultă $a:2=204$, iar $a=408$.
3) Aducem exercițiul la forma cea mai simplă: $13\,230:(a\cdot a-32)-8\,080:$
$:(7\times 86-18\times 29)=169\Rightarrow 13\,230:(a\cdot a-32)-8\,080:80=169\Rightarrow$
$\Rightarrow 13\,230:(a\cdot a-32)-101=169$. Rezultă: $13\,230:(a\cdot a-32)=169+101\Rightarrow$
$\Rightarrow a\cdot a-32=13\,230:270\Rightarrow a\cdot a=49+32\Rightarrow a\cdot a=81\Rightarrow a=9$.

162. a) Aducem exercițiul la forma cea mai simplă. Se pot parcurge mai multe căi, lucrând cu fracții, cu fracții zecimale sau cu numere naturale.

Rezolvarea 1

Deoarece $0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, iar $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, egalitatea devine:

$$28+8\cdot[x-8:(1\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+1\tfrac{2}{4}):(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{2}{4})]=100\Leftrightarrow 28+8\cdot(x-8:2\tfrac{8}{4}:\tfrac{8}{4})=$$

$=100\Leftrightarrow 28+8\cdot(x-8:4:2)=100\Leftrightarrow 28+8\cdot(x-1)=100\Leftrightarrow 8\cdot(x-1)=$
$=100-28\Leftrightarrow x-1=72:8\Leftrightarrow x-1=9\Rightarrow x=10.$

Rezolvarea 2

Deoarece $1\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}=1{,}75$, iar $\frac{1}{2}=0{,}50$, egalitatea devine:

$$28+8\cdot[x-8:(1{,}75+0{,}75+1{,}50):(0{,}75+0{,}75+0{,}50)]=100\Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 28+8\cdot(x-8:4:2)=100\Leftrightarrow 8\cdot(x-1)=72\Rightarrow x=10.$

Rezolvarea 3

Înlocuind unele fracții date cu altele echivalente, pentru a avea acelaşi numitor (pentru clasa a **V**-a, se poate folosi algoritmul de aducere a fracțiilor la acelaşi numitor), egalitatea devine:

$$28+8\cdot[x-8:(\tfrac{4}{4}+\tfrac{3}{4}+1\tfrac{2}{4}):(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{2}{4})]=100.$$

Se observă că numărătorii din paranteza mică au fost împărțiți pe rând la **4**, ceea ce se poate scrie şi astfel:

$$28+8\cdot\{x-8:[(4+3+3+4+2):4]:[(3+3+2):4]\}=100\Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 28+8\cdot[x-8:(16:4):(8:4)]=100\Leftrightarrow 28+8\cdot(x-8:4:2)=100\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8\cdot(x-1)=72\Rightarrow x=10.$

b) Scrierea **1 : 3** este echivalentă cu $\frac{1}{3}$. Rezultă:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+2}{x+\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}\right)}=4-\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\right)\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{3}{3}+1\right)\cdot\frac{3}{3}+2}{x+\frac{14}{7}}=4-\frac{10}{5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cdot 1+2}{x+2}=4-2\Leftrightarrow\frac{4}{x+2}=2\Leftrightarrow x+2=4:2\Leftrightarrow x+2=2\Leftrightarrow x=2-2\Rightarrow x=0.$$

Sau: Se observă că numerele **1** şi **2** sunt împărțite la **3**; la numitor, împărțitorul este **7**, iar în membrul al doilea, **5**, ceea ce se poate scrie:

$$\frac{[(1+2):3+1]\times[(1+2):3]+2}{x+(1+3+4+6):7}=4-(2+8):5\Leftrightarrow\frac{(3:3+1)\bullet(3:3)+2}{x+14:7}=$$

$$=4-10:5\Leftrightarrow\frac{2\bullet1+2}{x+2}=2\Leftrightarrow x+2=4:2\Rightarrow x=0.$$

163. Din cei **30** elevi ai clasei, **29** au primit câte **2** bomboane (Diana nu este colega cu ea însăşi).

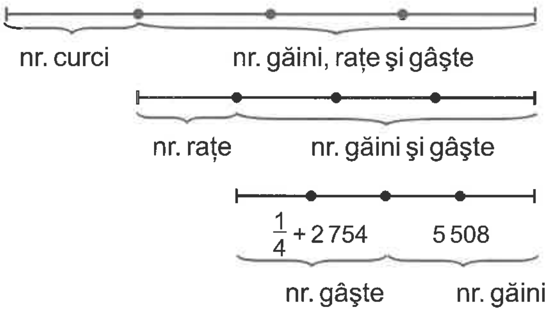
Diana a primit **4** bomboane, ca fiecare dintre cele **3** surori ale sale.

Deci restul a fost împărțit în **4** părți, iar **4** bomboane reprezintă un sfert din acel rest.

Câte bomboane a împărțit Diana cu surorile sale? **4×4 = 16** (bomboane).

Câți colegi au primit bomboane? **30 – 1 = 29** (elevi).
Câte bomboane a împărțit Diana colegilor? **29×2 = 58** (bomboane).
Câte bomboane a avut Diana la început? **58 + 16 = 74** (bomboane).

164. Reprezentarea grafică poate fi:



Câte gâşte erau? **(5 508 + 2 754) : 3 + 2 754 = 5 508**.
Câte găini şi gâşte erau? **5 508 + 5 508 = 11 016** sau **(5 508 + 2 754) : 3×4 = 11 016**.
Câte rațe erau? **1 016 : 3 = 3 672**.
Câte curci erau? **3 672×4 : 3 = 14 688 : 3 = 4 896**.

165. După a treia operație, în fiecare grămadă sunt câte **48 : 3 = 16** mere, adică:

I	a II - a	a III - a
16	**16**	**16**

În **I** s-au obținut **16** mere prin dublarea unui număr, adică **2×*a* = 16**. Rezultă că înainte de ultima operație, în prima grămadă erau **16 : 2 = 8** mere. Acele **8** mere au fost luate din a treia grămadă. Câte mere erau în fiecare grămadă înainte de a treia operație?

16 – 8 = 8	**16**	**16 + 8 = 24**

Cele **24** de mere din a treia grămadă au fost obținute prin dublarea unui număr, adică **2×*b* = 24**. Înainte de a doua operație, în a treia grămadă erau

24 : 2 = 12. Aceste **12** mere au fost luate din a doua grămadă. Câte mere erau în fiecare grămadă înainte de a doua operație?

8 **16 + 12 = 28** **24 – 12 = 12**

Cele **28** de mere din a doua grămadă au fost obținute prin dublarea unui număr, adică $\mathbf{2 \times c = 28}$. Câte mere erau inițial în fiecare grămadă?

8 + 14 = 22 **28 – 14 = 14** **12**

Răspuns:

22; **14**; **12**.

Rezolvarea 2

Notăm cu ***a***, ***b*** şi, respectiv, ***c***, numărul inițial de mere din fiecare grămadă. Operațiile şi resturile sunt:

1) Pune din ***a*** în ***b*** atât cât conține ***b***. Dar ***b*** conține ***b***, deci dublează numărul ***b***. Vor fi:

$\mathbf{a - b}$ $\mathbf{2b}$ $\mathbf{c}$

2) Pune din **2b** în ***c*** atât cât conține ***c***, adică dublează ***c***. Vor fi:

$\mathbf{a - b}$ $\mathbf{2b - c}$ $\mathbf{2c}$

3) Ia din **2*c*** pentru a dubla $\mathbf{a - b}$. Vor fi:

$\mathbf{2(a - b) = 16}$ $\mathbf{2b - c = 16}$ $\mathbf{2c - (a - b) = 16}$.

Rezultă: $\mathbf{48 : 3 = 16}$; $\mathbf{2(a - b) = 16 \Rightarrow a - b = 8}$; $\mathbf{2c - 8 = 16 \Rightarrow 2c = 24 \Rightarrow}$ $\mathbf{\Rightarrow c = 12}$; $\mathbf{2b - 12 = 16 \Rightarrow 2b = 28 \Rightarrow b = 14}$; $\mathbf{a - 14 = 8 \Rightarrow a = 22}$.

166. Câte nuci *vor fi* în fiecare grămadă? **(7 + 11 + 6) : 3 = 8**. Potrivit enunțului, trebuie realizate numai **3** mutări, de fiecare dată *dublând* numărul din grămada *la care punem* nuci. În acelaşi timp, trebuie să transferăm nuci *de la fiecare* grămadă. Cum realizăm transferul? Dacă am transfera nuci din prima în a treia grămadă, dublându-l pe **6**, în prima ar rămâne *o nucă* care, printr-o dublare, nu formează **8** nuci. Dacă din **11** nuci am lua **6**, dublând numărul din a treia grămadă, în a doua ar rămâne **5** nuci care, prin dublare, nu formează **8**. *Numărul care, prin dublare, dă **8** este numărul **4***. În care grămadă pot rămâne **4** nuci? Dacă în prima grămadă sunt **7** nuci, număr care trebuie dublat, înseamnă că din a doua grămadă transferăm **7** nuci în prima grămadă, adică:

	I	**II**	**III**
	7	**11**	**6**
1)	**7 + 7 = 14**	**11 – 7 = 4**	**6**

Apoi, analizând situația obținută, rezultă că singura mutare convenabilă este:

2)	**14 – 6 = 8**	**4**	**6 + 6 = 12**

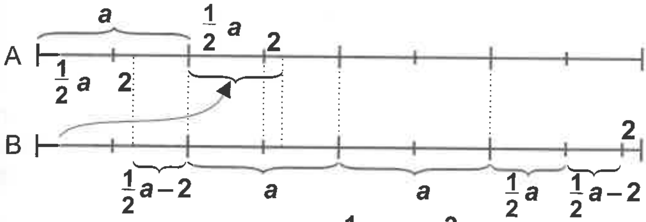
În final:

3)	**8**	**4 + 4 = 8**	**12 – 4 = 8**

Răspuns: Punem din a doua în prima grămadă **7** nuci. Apoi, din prima în a treia grămadă, transferăm **6** nuci. În final, transferăm **4** nuci din a treia în a doua grămadă.

167. Rezolvarea 1

Notăm cu **A** şi **B** capacităţile celor două bidoane, iar cu ***a*** şi, respectiv, cu ***b***, cantităţile existente în fiecare bidon. Grafic, situaţia este următoarea:



Ce obţinem în vasul A? $a+\frac{1}{2}a+2=\frac{3}{2}a+2.$

Ce rămâne în vasul B? $\frac{1}{2}a-2+a+a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a-2=\frac{3}{2}a+2a-4=\frac{7}{2}a-4.$

Din enunţ rezultă:

$$\frac{7}{2}a-4>\frac{3}{2}a+2\Rightarrow\frac{7}{2}a-4=\frac{3}{2}a+2+6\Rightarrow\frac{7}{2}a-4=\frac{3}{2}a+8/-\frac{3}{2}a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4}{2}a-4=8\Rightarrow 2a=12\Rightarrow a=6;\ b=4\times 6-2\Rightarrow b=22.$$

Rezolvarea 2

Păstrăm notaţiile de mai sus:

	A	B
1)	$a=\text{A}-\frac{3}{4}\text{A}=\frac{1}{4}\text{A}$	$\text{A}=\text{B}$, iar $b=\text{A}-2$

$$\frac{1}{4}\text{A}:2+2=\frac{1}{8}\text{A}+2$$

Obţinem:

2) $\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}A+2=\frac{3}{8}A+2$; $A-2-\frac{1}{8}A-2=\frac{7}{8}A-4.$

Din enunţ, rezultă:

$$\frac{3}{8}A+2+6=\frac{7}{8}A-4\Leftrightarrow\frac{3}{8}A+8=\frac{7}{8}A-4\Leftrightarrow\frac{1}{2}A=12\Rightarrow A=24,$$

iar $a=24:4=6;\ b=24-2\Rightarrow b=22.$

168. Rezolvarea 1

Pe scurt, modificările în numărul merelor sunt: la sfârşit, fiecare dintre cei trei copii are câte **8** mere, căci **24 : 3 = 8**.

Înainte de ultimul transfer, al treilea copil avea **16** mere, căci jumătatea lui **16** este numărul **8**, iar primii doi copii aveau câte **4** mere, deoarece **8** a fost obţinut prin adunarea numărului **4**, adică **4 + ? = 8**.

Înainte de al doilea transfer, al doilea copil avea **8** mere, al treilea copil avea **14** mere (căci **4 : 2 = 2**, iar **2 + 14 = 16**), iar primul copil avea **2** mere (deoarece **2 + 2 = 4**).

Iniţial, primul copil avea **4** mere (căci **4 : 2 = 2**), al doilea avea **7** mere (căci **2 : 2 = 1**, iar **7 + 1 = 8**); al treilea copil avea **13** mere (căci **13 + 1 = 14**). Vârsta fiecăruia era: **7** ani; **10** ani; **16** ani.

Rezolvarea 2 (Mai explicit)

După ultima operație, fiecare a rămas cu câte **8** mere, deoarece suma **24**, care nu se modifică, se organizează în **3** părți egale ca număr, adică:

Al III-lea copil	al doilea copil	primul copil
8	**8**	**8**

Pentru al treilea copil (cel mare) numărul **8** reprezintă *jumătatea* numărului de mere pe care le avea înainte de *a da*, adică jumătatea numărului **16**, cealaltă jumătate fiind împărțită în mod egal, câte **4** (căci **8 : 2 = 4**), celorlalți doi copii.

1) *Înainte de această operație*, câte mere avea fiecare?

? : 2 = 8	**? + 4 = 8**	**? + 4 = 8**
8 × 2 = 16	**8 − 4 = 4**	**8 − 4 = 4**

Pentru al doilea copil, numărul **4** reprezintă jumătatea numărului de mere pe care le avea înainte de a da şi el, adică jumătatea numărului **8**, cealaltă jumătate fiind împărțită în mod egal, câte **2** (căci **4 : 2 = 2**), celorlalți doi.

2) *Înainte de această operație*, câte mere avea fiecare?

? + 2 = 16	**? : 2 = 4**	**? + 2 = 4**
16 − 2 = 14	**4 × 2 = 8**	**4 − 2 = 2**

Pentru primul copil (cel mic), numărul **2** reprezintă jumătatea numărului de mere pe care le avea inițial, adică jumătatea numărului **4**, cealaltă jumătate fiind împărțită în mod egal, câte **1** (căci **2 : 2 = 1**), celorlalți doi copii.

3) Câte mere avea fiecare *inițial*?

? + 1 = 14	**? + 1 = 8**	**? : 2 = 2**
14 − 1 = 13	**8 − 1 = 7**	**2 × 2 = 4**

Câți ani are fiecare? Cel mic: **4 + 3 = 7** (ani); mijlociul: **7 + 3 = 10** (ani); cel mare: **13 + 3 = 16** (ani). O reprezentare grafică a transferului de mere poate fi:

	Al III-lea copil (cel mare)	Al doilea	Primul copil
La sfârşit:	**8** mere	**8** mere	**8** mere
3)	**? : 2 = 8**	**4 + ? = 8**	**4 + ? = 8**
	16 → 8 → 4, 4	**8 − 4 = 4**	**8 − 4 = 4**

2) 16 $\qquad$ 8 $\qquad$ $? : 2 = 4$ $\qquad$ 4

$16 = ? + 2$ $\qquad$ $2 + ? = 4$

$16 - 2 = 14$ $\qquad$ 4, 2, 2 $\qquad$ $4 - 2 = 2$

1) 14 $\qquad$ 8 $\qquad$ $? : 2 = 2$

$14 = ? + 1$ $\qquad$ $8 = ? + 1$ $\qquad$ 1, 1, 2, 2, 4

$14 - 1 = 13$ $\qquad$ $8 - 1 = 7$ $\qquad$ 4

Vârstele: **13 + 3 = 16** (ani) $\qquad$ **7 + 3 = 10** (ani) $\qquad$ **4 + 3 = 7** (ani)

169. Rezolvarea 1

Înainte de transferul realizat de Cristian, pe raftul al treilea erau **32** cărți (căci **16** este jumătatea lui **32**), iar pe celelalte două rafturi erau câte **8** cărți (căci **8 + 32 : 2 : 2 = 8 + 8 = 16**). Înainte de transferul realizat de Bogdan, pe raftul al doilea erau **16** cărți (căci **8** este jumătatea lui **16**), pe primul raft erau **4** cărți (căci **4 + 16 : 2 : 2 = 4 + 4 = 8**), iar pe al treilea raft erau **28** cărți (căci **28 + 16 : 2 : 2 = 32**). Inițial (înainte de transferul realizat de Alex), pe primul raft erau **8** cărți (căci **4** este jumătatea lui **8**), pe al doilea raft erau **14** cărți (căci **14 + 8 : 2 : 2 = 16**), iar pe al treilea raft erau **26** cărți (căci **26 + 8 : 2 : 2 = 28**).

Rezolvarea 2

Notăm cu ***a***, ***b*** şi, respectiv, cu ***c***, numărul cărților din cele trei rafturi. Modificările sunt:

	a	b	c
1)	$a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$	$b+\frac{1}{2}a:2=b+\frac{1}{4}a$	$c+\frac{1}{4}a$
2)		$(b+\frac{1}{4}a):2=\frac{1}{2}b+\frac{1}{8}a$	
	$\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{16}a=\frac{9}{16}a+\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b$	$\frac{5}{16}a+\frac{1}{4}b+c$
3)			$(\frac{5}{16}a+\frac{1}{4}b+c):2=\underbrace{\frac{5}{32}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{2}c}_{:2}$
	$\frac{41}{64}a+\frac{5}{16}b+\frac{1}{4}c=16$	$\frac{13}{64}a+\frac{9}{16}b+\frac{1}{4}c=16$	$\frac{5}{32}a+\frac{1}{8}b+\frac{1}{2}c=16$

Din ultimele două relații, rezultă:

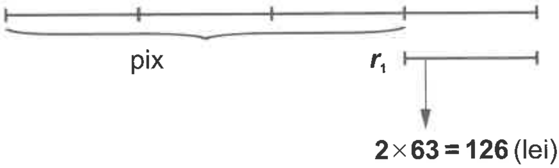
$\frac{41}{64}a+\frac{5}{16}b=\frac{13}{64}b+\frac{9}{16}b/-\frac{15}{16}b \Leftrightarrow \frac{41}{64}a=\frac{13}{64}a+\frac{4}{64}b/-\frac{13}{64}a \Rightarrow \frac{28}{64}a=$ $=\frac{4}{16}b \Leftrightarrow \frac{7}{16}a=\frac{4}{16}b \Rightarrow 7a=4b \Rightarrow a=\frac{4}{7}b$. Atunci: $\frac{8}{64}a+\frac{8}{16}b=16 \Rightarrow \frac{1}{8}a+\frac{4}{8}b=$ $=8 \Rightarrow a+4b=64$, iar $\frac{4}{7}b+4b=64 \Rightarrow 32b=448 \Rightarrow b=14; a=8; c=26$.

170. a) $\{[(3y+5)\cdot 3+5]\cdot 3+5\}\cdot 3=281-5 \Rightarrow [(3y+5)\cdot 3+5]\cdot 3+5=276:3 \Rightarrow$
$\Rightarrow [(3y+5)\cdot 3+5]\cdot 3=92-5 \Rightarrow (3y+5)\cdot 3+5=87:3 \Rightarrow (3y+5)\cdot 3=29-5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3y+5=24:3 \Rightarrow 3y=8-5 \Rightarrow y=3:3 \Rightarrow y=1$.

b) $2\cdot\{2+2\cdot[2+2\cdot(2-2:y)]\}=22-2 \Rightarrow 2+2\cdot[2+2\cdot(2-2:y)]=20:2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot[2+2\cdot(2-2:y)]=10-2 \Rightarrow 2+2\cdot(2-2:y)=8:2 \Rightarrow 2\cdot(2-2:y)=4-2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2-2:y=2:2 \Rightarrow 2:y=2-1 \Rightarrow 2:y=1 \Leftrightarrow y=2:1 \Leftrightarrow y=2$.

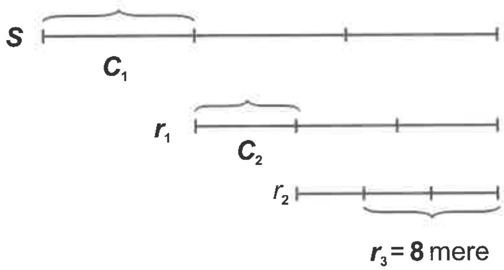
c) $\{2\cdot[3+(y-4)\cdot 5]:6\}\cdot 7=8-1 \Rightarrow 2\cdot[3+(y-4)\cdot 5]:6=7:7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot[3+(y-4)\cdot 5]=6\cdot 1 \Rightarrow 3+(y-4)\cdot 5=6:2 \Rightarrow (y-4)\cdot 5=3-3 \Rightarrow y-4=0:5$
$\Rightarrow y-4=0 \Rightarrow y=4+0 \Rightarrow y=4$.

171. Suma inițială şi cheltuielile pot fi reprezentate grafic astfel:



Câți lei a costat pixul? $3\times 126\times 3=378\times 3=1\,134$ (lei).

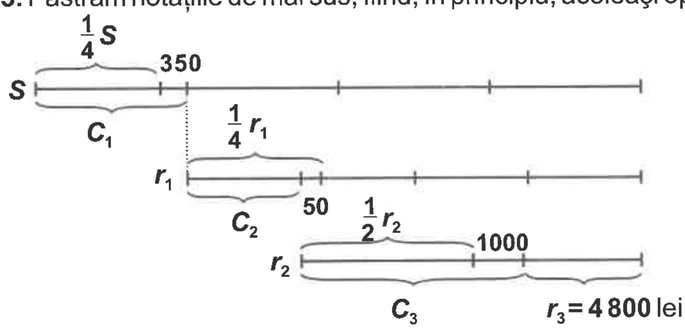
172. Pentru mai multe soluții la asemenea probleme, a se vedea rezolvările de la problemele **1 – 8**, din capitolul al **VIII**-lea. Notăm cu S numărul inițial de mere, cu C_1, C_2, C_3 numărul de mere luate de fiecare copil, cu r_1, r_2, r_3, resturile corespunzătoare.



Relația esențială este cea din care aflăm că fiecare copil se crede "primul sosit", deci fiecare împarte numărul de mere pe care le găseşte pe masă când îi vine rândul în **3** părți la fel de mari (egale ca număr).

Din desen rezultă că **2** treimi din r_2 reprezintă **8** mere. Atunci:
$r_2=8:2\times 3=12$ (mere); $r_1=12:2\times 3 \Rightarrow r_1=18$; $S=18:2\cdot 3 \Rightarrow S=27$ mere.

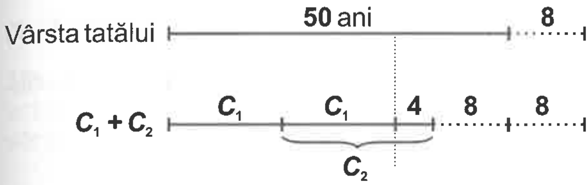
173. Păstrăm notațiile de mai sus, fiind, în principiu, aceleaşi operații:



$r_2 = ?$ **(4 800 + 1 000)•2 = 5 800•2 = 11 600** (lei).
C_3**=5 800 + 1 000=6 800** (lei); r_1=? **(11 600 – 50) : 3×4=15 400** (lei);
C_2**=15 400 : 4 – 50=3 800** (lei). ***S***=? **(15 400 + 350) : 3×4=5 250×4=**
= 21 000 (lei). C_1 **= 21 000 : 4 + 350 = 5 600** (lei).

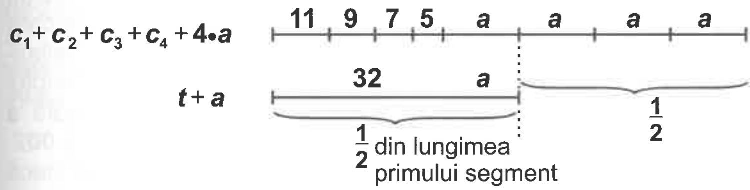
174. Ce sumă au cei doi împreună după ce au primit **1 000** lei?
1 000 + 1 060 + 1 000 = 3 060 (lei).
Ce sumă are fiecare după ce şi-au împărţit banii primiţi?
3 060 : 2 = 1 530 (lei).
Ce sumă a luat Andrei? **1 530 – 1 000 = 530** (lei).
Ce sumă a luat Alexandra? **1 530 – 1 060 = 470** (lei).

175. O reprezentare grafică poate fi:



Din desen rezultă că dublul vârstei copilului mic (C_1) este **50 – 4 – 8 = 38** (ani). Ce vârstă are copilul mic, adică C_1 = ? **38 : 2 = 19** (ani). Dar celălalt? **19 + 4 = 23** (ani). *Sau*: Ce vârstă *va avea* copilul mai mic *peste **8** ani*? **(50 + 8 – 4) : 2 = 27** (ani). Câţi ani are acum? **27 – 8 = 19** (ani). Dar celălalt? **19 + 4 = 23** (ani). (Pentru mai multe soluţii, a se vedea problemele **12** şi **13** din capitolul al **IV**-lea).

176. a) Notăm cu ***a*** perioada care trece atât pentru tatăl, cât şi pentru *fiecare* copil; cu ***t***, c_1, c_2, c_3 şi c_4, vârstele tatălui şi respectiv ale celor **4** copii. O reprezentare grafică se poate obţine uşor dacă transformăm ultima relaţie din enunţ, obţinând: “suma vârstelor copiilor va fi de **2** ori mai mare decât vârsta pe care o avea tatăl lor”, adică:



Rezultă: **11 + 9 + 7 + 5 + *a* = *a* + *a* + *a* ⇒ 32 + *a* = 3*a* ⇒ 2*a* = 32 ⇒ *a* = 16.** Peste **16** ani tatăl va avea **48** ani, iar suma vârstelor celor patru copii va fi: **32 + 4•16 = 96** (ani), iar **96 : 48 = 2**. (Rezolvarea algebrică este mult mai economicoasă).

b) Într-o eventuală reprezentare grafică, segmentul ce reprezintă vârsta Monicăi de acum **4** ani trebuie să se împartă în mod convenabil în **4** părţi (căci diferenţa se cuprinde de **4** ori), iar segmentul ce reprezintă vârsta Irinei din acelaşi moment, în **3** asemenea părţi. Dacă la fiecare segment adăugăm câte **4** (ani) obţinem vârstele actuale. Dacă mai adăugăm câte **4** ani, obținem vârstele de peste **4** ani. Din desen şi din enunț, va rezulta: **7** părți plus **16** ani = **2**(**3** părți plus **4** ani) + **12** ani.

Răspuns: Monica are **20** ani, căci $4\times4+4=20$; Irina are **16** ani, deoarece $3\times4+4=16$.

177. a) Aducem exercițiul la forma cea mai simplă şi apoi parcurgem "drumul invers": $[3(11+2y)-(12+5y)]:7=5 \Leftrightarrow [33+6y-(12+5y)]=7\times5 \Leftrightarrow 33+6y-(12+5y)=35$.
În loc să scădem suma din paranteza rotundă, putem scădea fiecare termen al sumei, adică: $33+6y-12-5y=35 \Leftrightarrow 21+y=35 \Leftrightarrow y=35-21 \Leftrightarrow y=14$;

b) $\dfrac{y+1}{y}=\dfrac{2[2+2(2+2\times6)]}{3(3\times4-3)+3} \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y}=\dfrac{2(2+2\times14)}{3\times9+3} \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y}=\dfrac{60}{30}$.
Având în vedere faptul că scrierea $\dfrac{y+1}{y}$ este echivalentă cu $(y+1):y$, egalitatea devine: $(y+1):y=2$.
Pe baza definiției împărțirii, obținem $y+1=2y$. Scăzând y din fiecare membru al egalității, rezultă $y=1$.

c) $0{,}999\times10-y=1{,}1+0{,}89 \Leftrightarrow 9{,}99-y=1{,}99 \Leftrightarrow y=8$.

d) $(199^2-199)-198=198y \Leftrightarrow 199(199-1)-198=198y \Leftrightarrow$
$199\times198-198=198y \Leftrightarrow 198(199-1)=198y \Leftrightarrow 198\times198=198y$.
Rezultă $198=y$.

e) $3y+6>2+5y$. Scădem $3y$ din fiecare membru al egalității şi obținem: $6>2+5y$. Scădem **2** din fiecare membru şi rezultă: $4>2y$.
Pentru că y este un număr natural, rezultă soluțiile: $y\in\{0,1\}$.

f) $15y\le30 \Leftrightarrow y\le\dfrac{30}{15} \Leftrightarrow y\le2$. Rezultă $y\in\{0,1,2\}$.

178. În exercițiu:
$(211\,407:7\times3+9\,397:2\times2):z=100 \Leftrightarrow (30\,201\times3+9\,397):z=100 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (90\,603+9\,397):z=100 \Leftrightarrow 100\,000:z=100 \Leftrightarrow z=1\,000$.

179. Încercați un desen, începând cu reprezentarea grafică, printr-un segment, a vârstei actuale a tatălui şi, în continuare, punctat, perioada care trece până în anul **2 002**. Pentru reprezentarea vârstei băiatului, se delimitează, printr-un punct, pe primul segment, anul naşterii băiatului; din dreptul acelui punct, desenăm alt segment ce va reprezenta vârsta actuală a băiatului şi, în continuare, punctat, perioada care trece până în anul **2 002**. Se constată că se poate gândi ca la o problemă de sumă şi diferență: dacă din **50** de ani scădem **4** ani, obținem dublul vârstei pe care o va avea băiatul în anul **2 002**.

Ce vârstă va avea băiatul în anul **2 002**? $(50-4):2=23$ (ani)

În ce an s-a născut băiatul? $2\,002-23=1\,979$.

Sau:

Dacă la **50** de ani *adăugăm* **4** ani, obținem dublul vârstei pe care o avea tatăl la naşterea băiatului.

Care era acea vârstă? $(50+4):2=27$ (ani).

Ce vârstă va avea băiatul în anul **2 002**? Cu **4** ani mai puțin decât **27** ani, adică $27-4=23$ (ani).

În ce an s-a născut băiatul? **2 002 – 23 = 1 979**.

180. (Pentru mai multe soluții, a se vedea problema **26**, din capitolul al **III**-lea)

Dacă viteza la dus este de $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ ori mai mare decât viteza la întoarcere (căci $\mathbf{10 : 8 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}}$), înseamnă că timpul necesar la dus este mai mic de $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ ori decât timpul necesar întoarcerii, deoarece este aceeaşi distanță. Rezultă că timpul de **9** ore poate fi împărțit în **9** părți egale: **4** părți reprezintă timpul la dus, iar **5** părți, timpul necesar la întoarcere.

Timpul necesar la dus este **4** ore, căci **9 : (5 + 4) = 1**, iar **4** × **1** = **4** (timpul necesar la întoarcere este **5** ore, căci **5** × **1** = **5**).

Care este distanța de la sat la oraş?

10 × **4** = **40** (km) sau **8** × **5** = **40** (km).

181. (Într-o eventuală reprezentare grafică se poate începe cu vârsta actuală – un segment, apoi, alt segment cu **5** mai mic decât primul; pentru vârsta de peste **7** ani, se repetă segmentul al doilea de **3** ori).

Dacă peste **7** ani Eliza va avea de **3** ori vârsta pe care a avut-o cu **5** ani în urmă, rezultă că **5 + 7 = 12** (ani) reprezintă **2** treimi din vârsta ce o va avea peste **7** ani.

Deci, Eliza are **11** ani, deoarece **12 : 2** × **3 – 7 = 11** sau **6 + 5 = 11**.

182. (Realizați un desen, începând cu reprezentarea grafică a vârstelor actuale: ***B*** cât un segment, ***A*** cât ***B*** plus **6**; în ***A*** plus **6** vor fi $\mathbf{2\frac{1}{2}}$ ***B***).

Din analiza reprezentării grafice, va rezulta că **12** ani reprezintă **3** doimi din vârsta actuală a lui ***B***.

Ce vârstă are ***B***? **12 : 3** × **2 = 8** (ani). Ce vârstă are ***A***? **8 + 6 = 14** (ani).

183. (Într-o eventuală reprezentare grafică, primului număr i-ar corespunde **2** părți, iar celui de-al doilea, **3** asemenea părți).

Se constată că **5 + (5 – 1) = 9** salariați reprezintă o treime din numărul salariaților din al doilea atelier sau o doime din numărul salariaților (existenți inițial) din primul atelier.

Câți salariați erau în al doilea atelier? **3** × **9 = 27**.

Dar în primul atelier? **2** × **9 = 18** sau **27 : 3** × **2 = 18**.

184. Dacă al doilea trebuie să primească pe zi cu **5** lei mai mult decât primul, rezultă că în **9** zile va primi cu **45** lei mai mult decât ar primi primul în **9** zile, iar al treilea trebuie să primească cu **22** lei mai puțin decât ar primi primul în **11** zile.

Suma de **19 058 – 45 + 22 = 19 035** lei poate fi organizată în **27** de părți, fiecare egală cu suma cuvenită primului muncitor într-o zi. Câți lei se cuvin primului muncitor? **19 035 : 27** × **7 = 4 935** (lei). Câți lei se cuvin celui de-al doilea muncitor? **(19 035 : 27 + 5)** × **9 = 6 390** (lei). Dar celui de-al treilea muncitor? **(19 035 : 27 – 2)** × **11 = 7 733** (lei).

185. Din enunț rezultă că suma rămâne nemodificată, căci **294 – (32 + 25 + + 13) + (32 + 25 + 13) = 294**.

Care este numărul ce s-ar obține după modificările date? **294 : 6 = 49**. Primul număr este **81**, căci **49 + 32 = 81**. Celelalte numere sunt: **74**; **62**; **17**; **24**; **36**.

186. Care este diferența de preț dintre două caiete care au ca preț sume distincte? **65 – 49 = 16** (lei). Dacă pentru un caiet mai scump Irina a plătit cu **16** lei mai mult decât pentru un caiet de **49** lei, pentru câte caiete mai scumpe a plătit în plus **96** lei?

Pentru atâtea caiete de câte ori **16** se cuprinde în **96**, adică: **96 : 16 = 6** (caiete); câți lei a cheltuit Irina? **6×49 + 6×65 = 684** (lei) sau **(49 + 65)×6 = 684** (lei).

187. (Asemănătoare cu problemele **9 – 12**, din capitolul al **VI**-lea)

Dacă am presupune că toate cele **47** de bancnote au fost de câte **1 000** lei, suma totală ar fi fost de **47 000** lei, cu **47 000 – 32 800 = 14 200** mai mult decât în realitate.

Înlocuind bancnotele de câte **1 000** lei cu bancnote de câte **100** şi de câte **500** lei, trebuie să obținem între numărul acestora din urmă raportul $\frac{4}{7}$.

La o singură înlocuire, în loc de **11** bancnote de câte **1 000** lei, vor fi **4** de câte **100** lei şi **7** de câte **500** lei, iar diferența de **14 200** lei se va micşora cu **7 100** lei, deoarece **11×1 000 – 4×100 – 7×500 = 7 100**. Sunt posibile **2** asemenea înlocuiri, deoarece **14 200 : 7 100 = 2**.

Deci au fost **8** bancnote de câte **100** lei, **14** de câte **500** lei, iar **25** de câte **1 000** lei.

188. (Asemănătoare cu problema **7.**, din capitolul al **VI**-lea)

Presupunem că fiecare copil a avut câte **15** aruncări reuşite ale mingii, deci ar fi primit câte **30** de puncte. Cu câte puncte ar fi primit în plus fiecare? Alex: **30 – 12 = 18**; Dinu: **30 – 9 = 21**; Rareş: **30 – 3 = 27**; Tiberiu: **30 – 0 = 30**.

Înlocuind câte o aruncare considerată reuşită cu una nereuşită, diferența de punctaj din ipoteza noastră se va micşora cu **3** puncte, deoarece **2 + 1 = 3**. Câte aruncări nereuşite a avut fiecare? Dar reuşite? Alex: **18 : 3 = 6**, iar **15 – 6 = 9**; Dinu: **21 : 3 = 7**, iar **15 – 7 = 8**; Rareş: **27 : 3 = 9**, iar **15 – 9 = 6**; Tiberiu: **30 : 3 = 10**, iar **15 – 10 = 5**.

189. (Pentru alte soluții, a se vedea problemele **14 – 18**, din capitolul al **VI**-lea)

Presupunem că Alexandra ar fi cumpărat tot atâtea caiete câte a luat Oana. Ce rest ar fi primit Alexandra? **2×47 + 21 = 115** (lei).

Cu câți lei ar fi mai mare restul ei decât cel primit de Oana?
115 – 35 = 80 (lei).

De unde provine această diferență de **80** lei, ele având aceeaşi sumă de bani? Din faptul că Oana a cumpărat caiete mai scumpe.

Care este diferența de preț dintre un caiet mai scump şi unul mai ieftin?
63 – 47 = 16 (lei).

Câte caiete a cumpărat Oana? **80 : 16 = 5** (caiete).

Câte caiete a cumpărat Alexandra? **5 + 2 = 7** (caiete).
Ce sumă a avut fiecare? $\mathbf{5 \times 63 + 35 = 350}$ (lei) sau
$\mathbf{(5 + 2) \times 47 + 21 = 350}$ (lei).

190. (A se vedea şi problemele **1 – 5**, din capitolul al **VI**–lea)
Utilizând metoda ipotezei false, rezultă:
$\mathbf{(5\,370 : 9 \times 190) : (210 - 190) = 4}$ (**4** robinete cu **210** litri/oră, iar **5** robinete au debitul de **190** litri/oră);
sau: $\mathbf{(9 \times 210 - 5\,370 : 3) : (210 - 190) = 5}$, (**5** robinete cu debitul de **190** litri/oră, iar **4** robinete au debitul de **210** litri/oră).

191. Din enunţ rezultă că într-o oră, ambele echipe efectuează o şesime din lucrare, iar în **3** ore, o doime din lucrare, deoarece trei şesimi sunt echivalente cu o doime.

Dacă echipa rămasă termină cealaltă jumătate din lucrare în **9** ore, înseamnă că toată lucrarea o efectuează în **18** ore, căci $\mathbf{2 \times 9 = 18}$.

Prima echipă efectuează într-o oră o noime din lucrare, căci $\frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$, iar toată lucrarea o efectuează în **9** ore, deoarece $\mathbf{1 : \frac{1}{9} = 1 \times 9 = 9}$.

192. Într-o oră, ce parte din capacitatea bazinului se umple, dacă curg:
– cele trei robinete împreună? O doime;
– primele două robinete? O treime.
– ultimele două robinete? O pătrime.
Rezultă că într-o oră, al treilea robinet umple o şesime din capacitatea bazinului, căci $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, iar tot bazinul îl va umple în **6** ore, căci $\mathbf{1 : \frac{1}{6} = 1 \times 6 = 6}$. Primul robinet umple bazinul în **4** ore, pentru că $\mathbf{1 : (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 4}$, iar al doilea, în **12** ore, deoarece $\mathbf{1 : (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = 12}$.

193. *Într-o zi*, ambii muncitori efectuează $\frac{5}{24}$ din lucrare, căci $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$.

În cele **2** zile, cât a lucrat singur, al doilea a efectuat o şesime din lucrare, căci $2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Rezultă că până la plecarea primului muncitor, cei doi au efectuat $\frac{5}{6}$ din lucrare, pentru că $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. În câte zile cei doi au efectuat $\frac{5}{6}$ din lucrare? (Câte zile a lucrat primul muncitor?) $\frac{5}{6} : \frac{5}{24} = 4$ (zile).

194. Rezolvarea 1

a) Dacă **4** muncitori au efectuat mai mult cu câte o optime din norma pe care o aveau de realizat, rezultă că au lucrat în plus cu o doime din norma unui singur muncitor, deoarece $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Se poate reformula problema astfel: Dacă **6** muncitori efectuează lucrarea în **13** ore, atunci **6** $\frac{1}{2}$ muncitori, în câte ore efectuează lucrarea?

Rezolvarea poate fi aşezată astfel:

Dacă în **13** ore,	**6** muncitori efectuează o lucrare (**1** ***L***),	
atunci într-o oră	**6** muncitori	$\frac{1}{13}L$,
iar într-o oră,	**1** muncitori	$\frac{1}{13\times 6}L$,
într-o oră,	$6\frac{1}{2}$ muncitori	$\frac{1\times 13}{13\times 6\times 2}L = \frac{1}{12}L$.

Dacă **6** $\frac{1}{2}$ muncitori efectuează $\frac{1}{12}$ ***L*** într-o oră, atunci **6** $\frac{1}{2}$ muncitori efectuează toată lucrarea, în câte ore? În **12** ore.

b) Câţi lei primeşte fiecare muncitor?

În cazul în care toţi muncitorii ar fi lucrat în acelaşi ritm, fiecare ar fi primit câte **96** lei pe oră, deoarece **7 488 : 13 : 6 = 96**. Dar **4** muncitori au depăşit norma cu câte $\frac{1}{8}$, deci vor primi cu câte $\frac{1}{8}\times$ **96 = 12** lei mai mult, adică vor primi câte **108** lei/oră.

Atunci: **4** muncitori vor primi câte **12×108 = 1 296** lei, iar
2 muncitori vor primi câte **12×96 = 1 152** lei.

Rezolvarea 2

Din prima parte a enunţului, rezultă că fiecare muncitor trebuia să primească, pentru cele **13** ore lucrate, câte **7 488 : 6 : 13 = 96** lei pe oră, dacă toţi lucrau în acelaşi ritm. Sunt însă **4** muncitori care au depăşit norma. Este normal ca, din suma totală de **7 488** lei, pentru o oră, partea ce se cuvine fiecăruia dintre cei **4** muncitori să fie mai mare cu câte o optime din plata pentru o oră de lucru, iar numărul de zile necesar terminării lucrării să fie mai mic. Câţi lei pe oră a primit fiecare dintre cei **4** muncitori? **96 +** $\frac{1}{8}\times$**96 = 108** lei.

Deci **4** muncitori au primit într-o oră **432** lei, căci **108×4 = 432**, iar **2** muncitori au primit într-o oră **192** lei, deoarece **2×96 = 192**. În total, într-o oră, cei **6** muncitori au primit **624** lei.

Pentru câte ore de lucru vor primi **7 488** lei (În câte ore a fost terminată lucrarea)? **7 488 : 624 = 12** (ore).

Câţi lei a primit fiecare pentru **12** ore lucrate? Cei **4** muncitori au primit câte **1 296** lei, căci **12×108 = 1 296** (lei), iar ceilalţi doi, câte **1 152** lei, deoarece **12×96 = 1 152**.

Rezolvarea 3

(pentru prima parte a cerinţei)

Dacă	**6** muncitori,	în **13** ore	efectuează lucrarea	(***L***),
atunci	**1** muncitor	în **13** ore		$\frac{1}{6}L$,
iar	**1** muncitor	într-o oră		$\frac{1}{6\times13}L=\frac{1}{78}L$

Ce parte din lucrare efectuează cei **4** muncitori într-o oră? $4\times\frac{1}{78}+\frac{1}{78}\times\frac{4}{8}=\frac{2}{39}+\frac{1}{156}=\frac{3}{52}$ din lucrare. Ce parte din lucrare efectuează într-o oră ceilalți **2** muncitori? $2\times\frac{1}{78}=\frac{1}{39}$. Ce parte din lucrare efectuează cei **6** muncitori într-o oră? $\frac{1}{39}+\frac{3}{52}=\frac{1}{12}$ din lucrare. Dacă într-o oră, cei **6** muncitori efectuează $\frac{1}{12}L$, toată lucrarea o efectuează în **12** ore.

195. (Realizați un desen !)

Din enunț rezultă că suma inițială poate fi organizată în **5** părți (cincimi), care au ca jumătate $2\frac{1}{2}$ părți. Din cele **5** părți, dacă a rămas o parte (o cincime), înseamnă că **12** lei reprezintă $1\frac{1}{2}$ părți (cincimi). Câți lei a avut inițial Laurențiu? **12 : 3×2×5 = 40** (lei).

Urmând altă cale (pentru clasa a **V**-a), se ajunge la concluzia că o optime din suma inițială reprezintă **(12 + 3) : 3 = 5** (lei), iar toată suma este **40** lei.

196. Dacă pentru fiecare răspuns corect s-a acordat aceeaşi sumă, rezultă că putem organiza suma primită de cei doi concurenți la un loc în **38** de părți, căci **20 + 18 = 38**; suma acordată pentru un răspuns corect reprezenta $\frac{1}{38}$ din întreg; sumele cuvenite concurenților reprezentau **20** şi, respectiv, **18** asemenea părți. Câte părți reprezintă o zecime din cele **20** de părți? **20 : 10 = 2** (părți). Cele **2 + 2 = 4** părți reprezintă cu **10 200** lei mai puțin decât totalul de **38** de părți. Câți lei reprezintă o parte? **10 200 : (38 – 4) = 300** (lei). Câți lei a primit primul concurent? **20×300 = 6 000** (lei). Câți lei a primit al doilea concurent? **18×300 = 5 400** (lei).

197. Numerotăm cele **16** cutii, de la **1** la **16**. Scoatem din fiecare cutie atâtea bomboane câte arată numărul cu care am numerotat cutia, adică din cutia nr. **1**, scoatem o bomboană, din cutia nr. **2**, scoatem **2** bomboane etc. Procedând astfel, câte bomboane scoatem? **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 15 + 16 = 136** (Putem apela la formula de adunare a unor numere consecutive, a se vedea problema **10**, din capitolul **I**).

Cântărim cele **136** de bomboane. Dacă toate bomboanele ar fi de câte **14** grame, atunci cele **136** bomboane ar cântări **1 904** grame, căci **136×14 = = 1 904**. Dar bomboanele dintr-o cutie sunt mai uşoare cu câte **1** gram, căci

14 – 13 = 1. Rezultă că vor fi mai puțin de **1 904** grame.

Diferența va arăta exact cutia din care au fost scoase bomboanele cu gramaj mai mic. De exemplu: dacă sunt **1 903** grame, rezultă că bomboanele de câte **13** grame sunt în cutia nr. **1**; ele sunt în cutia a zecea, dacă avem **1 894** grame etc.

198. Rezolvarea 1

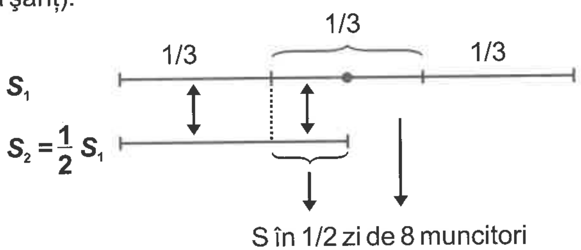
Dacă într-o jumătate de zi (în aceeaşi unitate de timp), jumătate din numărul muncitorilor *termină* partea rămasă din primul şanț, rezultă că acea parte este cât o doime din partea deja efectuată (căci şi numărul de muncitori este de **2** ori mai mic) sau cât o treime din lungimea primului şanț. Deci, o treime din lungimea primului şanț este efectuată de către o doime din numărul muncitorilor, într-o jumătate de zi.

Lucrând la şanțul al doilea, cealaltă doime din numărul muncitorilor efectuează *tot cât* o treime din lungimea primului şanț. Dacă la această parte se mai adaugă partea efectuată de cei **4** muncitori într-o zi, adică de **8** muncitori într-o jumătate de zi, se obține jumătate din lungimea primului şanț. Deci, fiecare jumătate din lungimea primului şanț este alcătuită dintr-o treime din întreg plus partea efectuată de **8** muncitori într-o jumătate de zi.

Rezultă că o treime din lungimea primului şanț (observați în desen treimea din mijloc) este efectuată de **8 + 8 = 16** muncitori în a doua jumătate a zilei.

În prima jumătate a zilei au fost împreună **32** de muncitori, căci atunci s-au lucrat **2** treimi din lungimea primului şanț, iar **2×16 = 32**.

Grafic (Notăm cu S_1 lungimea primului şanț, cu S_2 lungimea celui de-al doilea şanț):



Rezolvarea 2

În a doua jumătate a zilei, o doime din numărul muncitorilor a lucrat o treime din lungimea primului şanț. Cealaltă jumătate din numărul muncitorilor efectuează tot atât, dar lucrează la şanțul al doilea.

Dacă dintr-o doime din lungimea primului şanț scădem o treime din acelaşi întreg, deducem *ce parte din lungimea primului şanț* au lucrat **8** muncitori în jumătate de zi.

Deci: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Dar $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, iar $1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$, partea din primul şanț lucrată de toți muncitorii în prima jumătate a zilei.

Dacă **8** muncitori efectuează o şesime din primul şanț în jumătate de zi, câți muncitori efectuează **4** şesimi, în aceeaşi unitate de timp? **4×8 = 32** (muncitori).

199. a) Care este suma celor trei numere, după mărirea fiecăruia cu același număr? **46 + 45 + 67 = 158.**
Care este triplul numărului cu care au fost mărite? **158 – 98 = 60.**
Care este numărul cu care au fost mărite? **60 : 3 = 20.**
Care sunt numerele inițiale? **46 – 20 = 26; 45 – 20 = 25; 67 – 20 = 47.**

b) Care este suma celor trei numere, după micşorarea fiecăruia cu același număr? **6 + 5 + 27 = 38.**
Care este triplul numărului cu care au fost micşorate? **98 – 38 = 60.**
Care este numărul cu care au fost micşorate? **60 : 3 = 20.**
Care sunt numerele inițiale? **6 + 20 = 26; 5 + 20 = 25; 27 + 20 = 47.**

200. a) Dacă am mai adăuga **3** monede de **20** lei, suma totală ar fi **640 + 3×20 = 700** lei, iar numărul monedelor de **20** lei ar fi egal cu numărul monedelor de **50** lei.

Rezolvarea 1

Dacă am grupa monedele ce valorează **700** lei respectând raportul dat, o singură grupă ar avea valoarea de **100** lei, căci **1×50 + 1×20 + 3×10 = = 100** (lei). Câte grupe cu valoarea de **100** lei se pot forma cu suma de **700** lei (Câte monede de **50** lei erau)? **700 : 100 = 7** (monede). Dar de **20** de lei? **7 – 3 = 4** (monede). Dar de **10** lei? **3×7 = 21** (monede).

Rezolvarea 2

Deci suma de **700** lei poate fi organizată în **2** grupe, fiecare având același număr de monede de **50** de lei.
Cât valorează o asemenea grupă? **700 : 2 = 350** (lei).
Câte monede de **50** lei erau?
350 : 50 = 7 (monede).
Dar de **20** de lei? **7 – 3 = 4** (monede).
Dar de **10** lei? **3×7 = 21** (monede).
Sau: Care este dublul numărului de monede de **50** de lei?
700 : 50 = 14. Câte monede de **50** de lei erau? **14 : 2 = 7** etc.

b) După raționamente asemănătoare celor de la punctul a), se ajunge *la*: **(640 + 8×10 + 5×8) : (1×20 + 1×10 + 2×5) = 19** (monede de **20** de lei) etc. *sau la*: **(640 + 8×10 + 5×8) : 2 : 20 = 19** (monede de **20** lei); **11** monede de **10** lei; **30** monede de **5** lei.

201. $x \neq 0$. Din $y - 3x = 2$, rezultă $y = 3x + 2$. Ultima relație din enunț devine $x + 3x + 2 + z + t = 12$, adică $4x + z + t = 10$. Deoarece $4x$ este multiplu de **4**, iar **10** este număr par, rezultă că $z + t$ este o sumă pară.

Deci: $4 \leq 4x \leq 10$ şi $0 < z + t < 6$. Dacă $4x = 4$, atunci $x = 1$, $y = 5$, $(z, t) \in \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$.

Dacă $4x = 8$, atunci $x = 2$, $y = 8$, $(z, t) \in \{(0, 2), (2, 0), (1, 1)\}$.

Numerele sunt: **1 506; 1 515; 1 524; 1 533; 1 542; 1 551; 1 560; 2 802; 2 820; 2 811**. Diferența este: **(1 506 + 1 524 + 1 542 + 1 560 + 2 802 + 2 820) – – (1 515 + 1 533 + 1 551 + 2 811) = 11 754 – 7 410 = 4 344.**

202. (Se poate apela şi la metoda grafică).

Dacă $\frac{5}{7}$ din sumă reprezintă cu **270** lei mai mult decât $\frac{2}{7}$ (cât ar fi rămas), rezultă că $\frac{3}{7}$ din sumă reprezintă **270** de lei, căci **5** şeptimi minus **2** şeptimi = **3** şeptimi.

Câţi lei reprezintă o şeptime din sumă? **270 : 3 = 90** (lei).
Câţi lei a costat cartea? **2×90 = 180** (lei).
Câţi lei au costat stiloul şi cartea la un loc? **5×90 = 450** (lei).
De aici, avem o problemă de sumă şi diferenţă.

a) Câţi lei a costat stiloul? **(450 – 10) : 2 = 220** (lei).
Dar penarul? **220 + 10 = 230** (lei).
Sau:
b) Câţi lei a costat penarul? **(450 + 10) : 2 = 230** (lei).
Dar stiloul? **230 – 10 = 220** (lei).

203. Dacă în distribuirea dulciurilor se respecta raportul iniţial, adică $\frac{1}{4}$, atunci:

– la **5** napolitane trebuia să rămână **20** de bomboane, căci **4×5 = 20**;
– fiecare copil primea **2** napolitane şi **8** bomboane, căci **4×2 = 8**.

În realitate au rămas **52** de bomboane, nu **20**.
De unde provine diferenţa de **32** de bomboane?
Din faptul că fiecare copil a primit cu o bomboană mai puţin (**7**, nu **8**). De la câţi copii s-a acumulat diferenţa de **32** de bomboane? **32 : 1 = 32**. Deci erau **32** de elevi.

204. Sunt mai multe metode de rezolvare (Se poate apela şi la o reprezentare grafică).

Pentru clasa a **IV**-a:
Din enunţ rezultă că:

– distanţa parcursă de al doilea copil *într-un singur pas* poate constitui **2** părţi (jumătăţi), iar cea parcursă de primul copil, **3** asemenea părţi (se mai poate concluziona că distanţa parcursă de primul în **2** paşi este străbătută de al doilea în **3** paşi);
– în **16** paşi, primul parcurge o distanţă ce constituie **48** asemenea părţi, deoarece **16×3 = 48**;
În acest timp, al doilea copil face **20** de paşi, căci **16 : 4×5 = 20**, adică parcurge o distanţă ce constituie **40** de asemenea părţi (jumătăţi), căci **20×2 = 40**.
Deci, primul copil a câştigat întrecerea , căci **48 > 40**?
Care este lungimea pasului fiecărui copil?

Deoarece **48** părţi – **40** părţi = **8** părţi, rezultă că **8** părţi, fiecare egală cu jumătate din lungimea pasului celui de-al doilea copil, reprezintă **2** metri; al doilea copil avea un pas cu lungimea de **0,50** m, căci **2 : 8×2 = 0,50**, iar primul avea un pas cu lungimea de **0,75** m, căci **2 : 8×3 = 0,75**.

205. Pe scurt, problema se poate scrie:
1) Cantitatea din vagoanele de **15 t** plus **3 940 t** → Cantitatea totală;
2) Cantitatea din vagoanele de **20 t** plus **6 200 t** → Cantitatea totală;
3) Cantitatea din toate vagoanele plus **140 t** → Cantitatea totală.

Din compararea relaţiei 1) cu relaţia 3), rezultă că **3 940t – 140t = 3 800t** reprezintă cantitatea transportată în vagoanele de **20** tone.

Câte vagoane de acest fel erau? **3 800 : 20 = 190** (vagoane).

Din compararea relației 2) cu relația 3), rezultă că **6 200t – 140t = 6 060t** reprezintă cantitatea transportată în vagoanele de **15 t**.

Câte vagoane de acest fel sunt? **6 060 : 15 = 404** (vagoane).

Care era cantitatea de ciment ce trebuia expediată?

3 800 + 6 060 + 140 = 10 000 (t).

Încercați și alte moduri de rezolvare (grafic, comparație prin scădere etc).

206. Se poate realiza o reprezentare grafică din care se deduce că suma poate fi organizată în **4** părți, fiecare parte fiind egală cu primul număr.

Din enunț rezultă că suma celor trei numere este **36**.

Atunci primul număr este **9**, căci **36 : 4 = 9**, iar al doilea număr este **12**, deoarece **3 + 9 = 12**.

Al treilea număr este **15**, pentru că **36 – (9 + 12) = 15**.

207. Realizați o reprezentare grafică ! *Răspuns*: **35** de cărți.

208. Dacă micşorăm suma de **21 500** lei cu **4 500** lei, apoi rezultatul îl mărim cu **1 000** lei, vom avea triplul sumei alocate pentru toate premiile **I**.

Câte premii **I** au fost? **(21 500 – 4 500 + 1 000) : 3 : 2 000 = 3** (premii).

Câte premii **II** au fost? **(6 000 + 4 500) : 1 500 = 7** (premii).

Câte premii **III** au fost? **(6 000 – 1 000) : 1 000 = 5** (premii).

209. Pentru alte soluții, inclusiv operarea cu fracții, a se vedea problemele din capitolul al **VIII**-lea.

Pentru clasa a **IV**-a:

Realizați o reprezentare grafică din care veți deduce că:

– suma luată de al doilea este cât o pătrime din sumă plus **6** lei, căci o jumătate din jumătate este cât o pătrime din întreg;
– suma luată de al treilea este cât o doime din pătrimea întregului plus **3** lei, minus **2** lei, adică o optime din întreg plus **1** leu.

Se ştie că orice întreg are **8** optimi, jumătatea are **4** optimi, iar sfertul are **2** optimi. Atunci:

4 optimi + **4** lei + **2** optimi + **6** lei + o optime + **1** leu = **8** optimi,

adică **7** optimi + **11** lei = **8** optimi.

Rezultă că o optime din sumă reprezintă **11** lei, iar suma este **88** lei, căci **8** × **11 = 88** (lei).

210. Dacă la **5** găini corespundeau **2** rațe, atunci la **15** găini corespundeau **6** rațe (un multiplu de **3**), iar la **6** rațe erau **2** gâşte, căci **6 : 3** × **1 = 2**.

Într-o singură grupă astfel formată erau **23** de păsări, deoarece **15 + 6 + 2 = 23**.

Câte astfel de grupe se pot forma cu **46** de păsări? **46 : 23 = 2** (grupe).

Câte găini erau? **2** × **15 = 30 (găini).**

Câte rațe erau? **2** × **6 = 12** (rațe).

Câte gâşte erau? **2** × **2 = 4**.

211. Pentru mai multe rezolvări, a se vedea problemele **25 – 35**, din capitolul al **IV**-lea.

Pe baza unei eventuale reprezentări grafice, se poate concluziona că **4** părți, fiecare egală cu numărul timbrelor lui George, reprezintă **52** de timbre.

Câte timbre are George? **52 : 4 = 13** (timbre).

Câte timbre are Dimitrie? **7 × 13 = 91** (timbre).

212. Din enunț rezultă că vârsta lui Bogdan este mai mare decât vârsta lui Cristian. *Sugestii pentru folosirea reprezentării grafice*:

1) urmărind enunțul, reprezentăm printr-un segment *vârsta actuală* a lui Bogdan;

2) printr-un alt segment, mai mic decât primul cu **4** unități, reprezentăm *vârsta anterioară* a lui Cristian;

3) printr-un segment mai mare decât al doilea, dar mai mic decât primul (deocamdată nu ştim cu cât), figurăm *vârsta anterioară* a lui Bogdan;

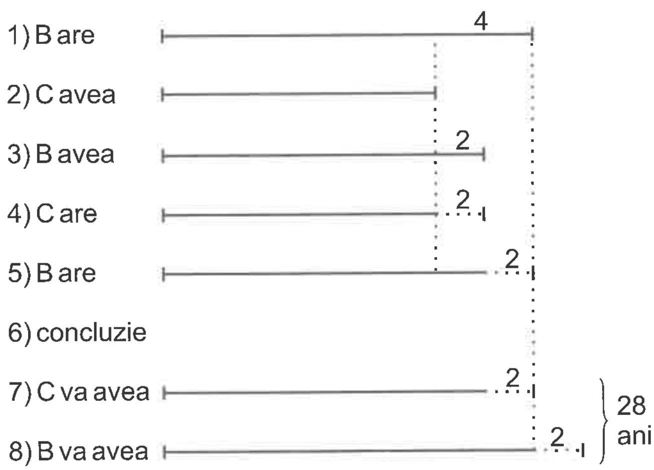
4) reluăm segmentul al doilea (care reprezintă vârsta anterioară a lui Cristian) şi îl prelungim punctat pentru a fi tot atât de lung cât al treilea (cât vârsta anterioară a lui Bogdan), obținând astfel reprezentarea grafică a *vârstei actuale* a lui Cristian;

5) prelungim punctat segmentul al treilea printr-un segment de aceeaşi mărime cu care am prelungit segmentul al doilea (trece aceeaşi perioadă de ani şi pentru Bogdan), obținând astfel, din nou, *vârsta actuală a lui Bogdan*;

6) analizând reprezentarea grafică, concluzionăm că cele două prelungiri care sunt egale, reprezintă **4** ani, deci diferența de vârstă dintre cei doi copii este de **2** ani, căci **4 : 2 = 2**;

7) dacă adăugăm diferența, **2** ani, la vârsta actuală a lui Cristian, obținem vârsta actuală a lui Bogdan, dar diferența de vârstă se păstrează, deci adăugăm **2** ani şi la vârsta lui Bogdan; aceste ultime două reprezentări (segmente) constituie **28** de ani. De aici, avem o problemă simplă de sumă şi diferență. Care este vârsta lui Bogdan? **(28 – 2) : 2 = 13** (ani). Care este vârsta lui Cristian? **(13 – 2) = 11** (ani).

Reprezentarea grafică a celor două vârste:



Verificări:

Care este vârsta anterioară a lui Cristian? **13 – 4 = 9** (ani).

Cu câți ani în urmă avea el **9** ani? **11 – 9 = 2** (ani).

Care era vârsta anterioară a lui Bogdan? (sau vârsta actuală a lui Cristian)? **13 – 2 = 11** (ani). Care va fi suma celor două vârste peste **2** ani? **(11 + 2) + (13 + 2) = 28** (ani).

213. Realizați o reprezentare grafică! O parte a enunțului poate fi reformulată astfel: "Primul număr este de **2** ori mai mic decât al doilea şi de **3** ori mai mic decât al treilea".

Fie ***a*** primul număr. Rezultă: $a + 2a + 3a = 432 \Leftrightarrow 6a = 432 \Leftrightarrow a = 72$.

Al doilea număr este **144**, căci $2 \times 72 = 144$, iar al treilea număr este **216**, pentru că $3 \times 72 = 216$ sau $72 + 144 = 216$.

214. Rezolvare aritmetică *pentru clasa a **IV**-a*:

Dacă o carte costă **200** lei, rezultă că suma plătită pentru toate cărțile este un număr care se termină în zero. Dar numărul **2 835** se termină în **5** (orice număr înmulțit cu zero dă produsul zero, iar la adunare numărul zero este element neutru), deci suma plătită pentru toate stilourile este un număr care se termină în **5** şi, în acelaşi timp, un număr care se împarte exact la **247**, adică $247 \times 5 = \overline{...5}$.

Rezultă că s-au cumpărat **5** stilouri, căci $247 \times 5 = 1\,235$; s-au cumpărat **8** cărți, deoarece $(2\,835 - 1\,235) : 200 = 8$.

215. Se observă că **1** şi $1\frac{1}{2}$ sunt de **4** ori mai mici decât **4** şi, respectiv, decât **6**. Deci se vor plăti **235** lei, căci $940 : 4 = 235$.

216. Dacă numărul problemelor reprezintă **8** părți, iar al exercițiilor **3** asemenea părți, înseamnă că **15** exerciții reprezintă **5** asemenea părți, deoarece numărul exercițiilor ar reprezenta o doime din total, adică tot **8** părți. Numărul exercițiilor rezolvate: $15 : 5 \times 3 = 9$; numărul problemelor rezolvate: $15 : 5 \times 8 = 24$.

Verificare: $24 : 8 \times 3 = 9$; $(24 + 9 + 15) : (9 + 15) = 2$.

Pentru alte soluții, a se vedea problemele **25**, **26** etc, din cap. al **IV**-lea.

217. Realizați o reprezentare grafică!

Calculele sunt: $1 + 1 = 2$ (m); $2 + 2 = 4$ (m); $4 + 4 = 8$ (m) sau: $1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ (m).

218. Din enunț rezultă că **150** lei reprezintă o pătrime din suma inițială. Deci a cheltuit **600** lei, căci $4 \times 150 = 600$.

219. Presupunem că autoturismul are aceeaşi viteză şi în a doua parte a drumului. În acest mod, în fiecare oră din a doua parte, el parcurge în plus **15** km, iar în cele **5** ore străbate în plus **75** km.

Reformularea problemei:

"Un autoturism, mergând cu aceeaşi viteză, parcurge în **9** ore distanța de **495** km (adică $420 + 75 = 495$). Să se afle viteza autoturismului".

Care este viteza în prima etapă? **495 : 9 = 55** (km/oră).
Dar în etapa a doua? **55 – 15 = 40** (km/oră).
Rezolvarea 2
Fie v_1 şi v_2 vitezele din cele două etape. Din enunţ, rezultă:
$4v_1 + 5v_2 = 420$ şi $v_1 = v_2 + 15$. Atunci: $4(v_2 + 15) + 5v_2 = 420$.
Rezultă $v_2 = 40$ (km/oră), iar $v_1 = 55$ (km/oră).
Sugestii pentru folosirea metodei grafice

– reprezentăm distanţa parcursă *într-o oră în prima etapă* printr-un segment;

– distanţa parcursă *într-o oră din a doua etapă* va fi reprezentată prin tr-un segment mai mic, la care, pentru a fi egal cu primul, adăugăm (punctat) **15** km;

– pentru distanţa parcursă în prima etapă, repetăm primul segment de **4** ori;

– pentru distanţa parcursă în a doua etapă, repetăm segmentul al doilea (inclusiv partea punctată) de **5** ori;

– printr-o acoladă, indicăm suma care va fi **420 + 5×15 = 495** km.

Deci, **9** părţi, fiecare egală cu prima viteză, reprezintă **495** km, prima viteză este de **55** km/oră, căci **495 : 9 = 55**, iar viteza a doua este **40** km/oră; *sau*: **9** părţi, fiecare egală cu viteza a doua, reprezintă **420 – 4×15 = 360** (km), iar viteza a doua este de **360 : 9 = 40** km/oră.

220. Poate fi privită ca o problemă de diferenţă şi raport.
Rezolvarea 1
De câte ori este mai mare viteza la coborâre faţă de cea la urcuş?

$26 : 8 = 3\frac{1}{4}$ (ori). Rezultă că timpul la coborâre este mai mic de $3\frac{1}{4}$ ori decât timpul necesar urcuşului, *distanţa fiind aceeaşi*.

Dacă timpul la coborâre constituie o parte, atunci timpul necesar urcuşului va reprezenta $3\frac{1}{4}$ asemenea părţi.

Diferenţa de $3\frac{1}{4}$ părţi – **1** parte = $2\frac{1}{4}$ părţi reprezintă **9** ore.

Care este timpul necesar la coborâre? **9 : 9×4 = 4** (ore).
(La urcuş: **4 : 4×13 = 13** ore.)
Care este lungimea pantei? **4×26 = 104** (km) sau **13×8 = 104** (km).
Rezolvarea 2
Câţi km parcurge biciclistul la urcuş în ultimele **9** ore? **9×8 = 72** (km). Dacă într-o oră, la urcuş, rămâne în urmă (faţă de coborâre) cu **18** km, adică cu **26 – 8**, în câte ore rămâne în urmă cu **72** km (care este timpul la coborâre)? **72 : 18 = 4** (ore). Câţi km are panta?
4×26 = 104 (km) sau **4×8 + 9×8 = 104** (km).
Rezolvarea 3
Dacă la coborâre ar fi mers *tot atâta timp* cât la urcuş, adică încă **9** ore, biciclistul ar fi parcurs în plus **234** km, căci **9×26 = 234**.
Fiind acelaşi timp, diferenţa de **234** km s-ar acumula din cauza diferenţei de viteze (**26 – 8 = 18** km/oră). În cât timp se acumulează această

diferență de **234** km? **234 : 18 = 13** (ore), tocmai timpul la urcuş.

Câți km are panta? $\mathbf{13 \times 8 = 104}$ (km) sau $\mathbf{(13-9) \times 26 = 104}$ (km).

Rezolvarea 4

Presupunem că panta are un număr oarecare de km.

Pentru uşurarea calculelor, luăm numărul **26** km.

În cât timp ar efectua biciclistul urcuşul? $\mathbf{26 : 8 = 3\frac{1}{4}}$ (ore).

În cât timp ar efectua coborârea? **26 : 26 = 1** (oră).

Care este diferența *de timp* dintre cele două deplasări?

$\mathbf{3\frac{1}{4} - 1 = 2\frac{1}{4}}$ (ore). Ipoteza este falsă. În problemă, se spune că diferența de timp este de **9** ore. De câte ori mai mare decât $\mathbf{2\frac{1}{4}}$ ore? $\mathbf{9 : 9 \times 4 = 4}$ (ori). Deci, câți km are panta? $\mathbf{4 \times 26 = 104}$ (km).

Rezolvarea 5

Notăm numărul de ore necesare coborârii cu y. Fiind aceeaşi distanță, din enunț, rezultă: $\mathbf{8(y+9) = 26y \Leftrightarrow 72 = 18y \Rightarrow y = 4}$.

Distanța este de $\mathbf{4 \times 26 = 104}$ (km).

221. Rezolvarea este similară cu cea de la problema anterioară.

Răspuns: **210** km.

222. Dacă ar fi avut viteze egale, cele două maşini se întâlneau la jumătatea drumului.

Însă, datorită diferenței de viteză de **10** km/oră, prima depăşeşte jumătatea drumului cu **10** km.

Cu câți km parcurge mai mult prima maşină față de a doua?

Cu dublul lui **10** km, căci a doua maşină ajunge într-un punct ce se află la o distanță de **10** km față de jumătatea drumului.

În câte ore prima maşină parcurge mai mult cu **20** km față de a doua? Dacă într-o oră parcurge cu **10** km mai mult, distanța de **20** km o parcurge *în plus* în **2** ore, deoarece **20 : 10 = 2**.

Care este distanța dintre cele două localități?

$\mathbf{2 \times 60 + 2 \times 50 = 120 + 100 = 220}$ (km).

223. Realizați o reprezentare grafică!

Veți ajunge la constatarea că **4** părți – **1** parte = **3** părți, fiecare egală cu lungimea sârmei rămase în bucata a doua, reprezintă **16 – 7 = 9** (m).

Câți metri de sârmă au rămas în bucata a doua? **9 : 3 = 3** (m).

Câți metri de sârmă erau inițial în fiecare bucată? **3 + 16 = 19** (m).

224. Realizați o reprezentare grafică: un segment pentru numărul de mere din al doilea coş; apoi, un altul cu **9** mai mare decât primul; pentru a realiza transferul celor **17** mere, luați întâi **9**, apoi încă **8** din al doilea şi le adăugați, punctat, la primul segment; din compararea reprezentărilor obținute, veți deduce că **8 + 9 + 8 = 25** mere reprezintă **5** părți, fiecare parte fiind egală cu numărul merelor rămase în primul coş (în al doilea segment).

Câte mere erau în primul coş? **25 : 5 + 17 = 22** (mere).

Câte mere erau în al doilea coş (primul segment)? **22 – 9 = 13** (mere).

225. Asemănătoare cu problema **31**, din capitolul al **IV**-lea.
Țăranul a avut **7** rațe, căci $2+2+2+1=7$ şi **28** de găini, căci $4\times7=28$.
Verificare: $(28-1):(7+2)=27:9=3$.

226. La împărțirea dată, notăm deîmpărțitul cu a, împărțitorul cu b, cu c câtul şi cu r restul. Deoarece $a=b\times c+r$, din enunț rezultă $a-r=b\times c=5$, în care $r<b$, iar $b\times c=1\times5=5\times1$. Dacă $b=1$ rezultă $r=0$, iar $a=1\times5+0=5$; dacă $b=5$, rezultă perechile de numere (a, r): (5;0), (6; 1), (7; 2), (8; 3), (9; 4). Deci, perechile de numere (a, b) sunt: (5; 1), (5; 5), (6; 5), (7; 5), (8; 5), (9; 5).

227. Păstrăm notațiile de la problema anterioară.
Din enunț, rezultă: $a=b\times c+97$, în care $100>b>97$.
Atunci $b\in\{98, 99\}$, iar a minim este **195**, căci $98\times1+97=195$;
a maxim este **988**, pentru că $99\times9+97=988$.

228. Fie a acel număr, c câtul împărțirii lui a la **8**.
Pe baza definiției împărțirii, scriem: $a=8c+c\Leftrightarrow a=9c$, în care $c<8$.
Rezultă că $a\in\{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63\}$; (deoarece $a\neq0$, atunci şi $c\neq0$).

229. Fie a primul număr. Celelalte două vor fi: $a+2$ şi $a+4$.
Din enunț, rezultă: $a+a+2+a+4=a+54\Leftrightarrow 2a=48\Rightarrow a=24$; celelalte numere sunt: **26**; **28**.

230. Diferența dintre două numere consecutive pare (impare) este **2**.
Notăm cu a primul număr impar. Din enunț, rezultă:
$(a+a+2+a+4+a+6+a+8)-(a+1+a+3+a+5+a+7)=35\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a+4=35\Rightarrow a=31$.
Celelalte numere sunt: **33**; **35**; **37**; **39**.

231. Cum a ajuns Vlad la scrierea $10=11$? A scos în factor comun în fiecare membru al egalității: $10(18+7-25)=11(18+7-25)$. Apoi a împărțit fiecare membru al egalității cu $(18+7-25)$, obținând $10=11$.
Unde a greşit Vlad? Nu a observat că $18+7-25=0$, deci a omis faptul că împărțirea la zero nu se poate efectua (nu are sens).

232. a) Fie a numărul căutat, r restul împărțirii lui a la **999**. Din enunț, rezultă: $a=999\times3r+r=2\,998r$ şi $a<10\,000$. Pentru a maxim, $r=3$, deci $a=8\,994$.
b) Notăm cu c câtul împărțirii lui a la **999**. Din enunț, rezultă:
$a=999c+3c=1\,002c$. Pentru a maxim, $c=9$, deci $a=9\,018$.

233. Fie numărul $\overline{ab}$. Din enunț, rezultă: $\overline{ab0}=\overline{ab}+400-40$,
adică $10\times\overline{ab}=\overline{ab}+360\Leftrightarrow9\times\overline{ab}=360\Rightarrow\overline{ab}=40$.

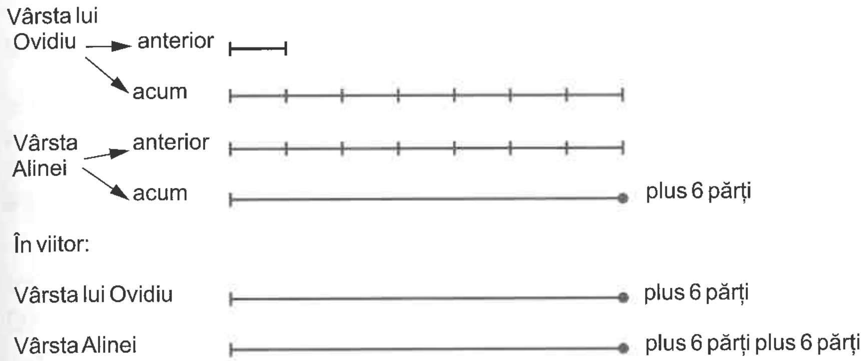
234. Notăm deîmpărțitul cu d, împărțitorul cu $î$, câtul cu c.
La împărțirea fără rest, $d=51-1=50$. Deoarece $î>c$, $î\neq1\neq c$, iar $50=2\times25$ sau $50=5\times10$, rezultă: $î=25$, iar $c=2$ şi $î=10$, iar $c=5$.

235. Voia să cheltuiască $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, cu $\frac{1}{4}$ mai mult decât avea. Deci $\frac{1}{4}$ din sumă reprezintă **30** lei, toată suma era de **120** lei.

Câți lei costă pixul? $2 \times 30 = 60$ (lei), căci, fiind același întreg, o doime reprezintă cât două pătrimi.

Câți lei costă penarul? $3 \times 30 = 90$ (lei).

236. Pe etape, reprezentarea grafică poate fi:



Sugestii pentru această reprezentare:

– reprezentăm printr-un segment *vârsta anterioară a lui Ovidiu*;

– pentru *vârsta lui actuală*, repetăm primul segment de **7** ori;

– *vârsta anterioară a surorii* sale o reprezentăm printr-un segment egal cu al doilea;

(Din compararea primului segment cu cel de-al treilea, ele reprezentând vârstele celor doi *în același moment*, rezultă că vârsta lui Ovidiu reprezintă o parte, iar vârsta surorii sale, **7** asemenea părți, deci *cu* **6** *părți mai mult*);

– pentru reprezentarea *vârstei actuale a surorii,* desenăm un segment egal cu al treilea, la care adăugăm încă **6** părți. (De ce? Comparând segmentul al doilea cu al patrulea – *vârstele actuale*, diferența de **6** părți se menține);

– pentru vârsta pe care o *va avea Ovidiu*, desenăm un segment egal cu al patrulea, iar pentru vârsta pe care o *va avea sora* sa, un alt segment egal cu al cincilea și încă diferența de **6** părți, care se păstrează.

Sau: Notăm cu ***a*** vârsta anterioară a lui Ovidiu.

Din enunț rezultă:

Vârsta	lui Ovidiu	anterior	a
		acum	$7a$
	Alinei	anterior	$7a$
		acum	$7a + 6a = 13a$
	lui Ovidiu	în viitor:	$13a$
	Alinei	în viitor:	$13a + 6a = 19a$

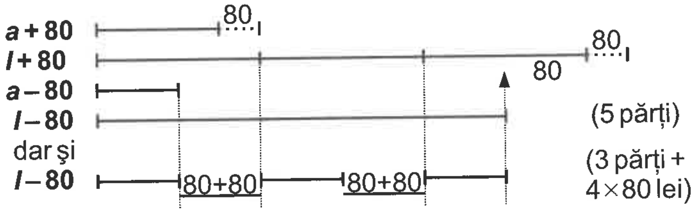
În ambele reprezentări, se ajunge la concluzia că **32** de ani reprezintă **32** de părți, fiecare parte fiind egală cu vârsta anterioară a lui Ovidiu, deoarece **7 + 6 + 7 + 6 + 6 = 32** (părți).

Ce vârstă are Ovidiu? **32 : 32×7 = 7** (ani).

Ce vârstă are sora sa? **7 + 6×1 = 13** (ani).

237. Notăm cu ***a*** suma câştigată de Ana, cu ***I*** suma câştigată de Ionuț.

O reprezentare grafică poate fi:



Din desen, rezultă că **4×80 = 320** (lei) reprezintă **5** părți – **3** părți = = **2** părți, fiecare egală cu suma micşorată a Anei.

Câți lei a câştigat Ana? **320 : 2 + 80 = 160 + 80 = 240** (lei).

Câți lei a câştigat Ionuț? **(240 + 80)×3 – 80 = 880** (lei) sau **(240 – 80)×5 + 80 = 880** (lei).

Pentru alte rezolvări (soluții), a se vedea problemele din capitolul **IV**.

CAPITOLUL AL VI-LEA

Probleme de falsă ipoteză. Rezolvări

1. *Observație*: informație inclusă în text: o găină are **2** picioare, o oaie are **4** picioare.

Rezolvarea 1. *(Falsă ipoteză, cu **2** variante)*

a) Considerăm (Presupunem, ipoteză = presupunere) că ar fi fost numai oi.

Câte picioare ar fi fost? **46×4 = 184**. Cu câte picioare ar fi fost mai multe față de numărul din problemă? **184 – 114 = 70**.

Deci, ipoteza este falsă (chiar de la început). Atunci trebuie să înlocuim un număr de oi cu un număr de păsări, pentru a face să dispară acel număr de picioare, care este în plus. La o singură înlocuire numărul **70** se micşorează cu **2**, adică cu diferența dintre numărul de picioare de la o oaie şi numărul de picioare de la o pasăre.

Câte înlocuiri trebuie să facem?

Vom face atâtea înlocuiri până dispare diferența de **70**, adică atâtea înlocuiri de câte ori **2** se cuprinde în **70**. Numărul de înlocuiri este tocmai numărul de păsări, iar restul până la **46** este reprezentat de numărul de oi.

Deci:

1) Câte picioare ar fi dacă am presupune că țăranul are numai oi? **46×4 = 184**.

2) Cu câte picioare ar fi fost mai multe față de numărul din problemă? **184 – 114 = 70**. Înlocuim un număr de oi cu un număr de păsări, până dispare această diferență.

3) Cu cât se micşorează **70** la o singură înlocuire? **4 – 2 = 2**.

4) Câte înlocuiri pot să fac? **70 : 2 = 35**. (Vor fi deci **35** de păsări).

Câte oi are țăranul? **46 – 35 = 11**.

Verificare: **11×4 + 35×2 = 114**; **11 + 35 = 46**.

b) Considerăm că ar fi fost numai păsări.

Atunci, numărul de picioare care ar fi fost? **46×2 = 92**.

Cu câte picioare ar fi fost mai puține? **114 – 92 = 22**.

Cu câte picioare are mai puțin o pasăre față de o oaie? **4 – 2 = 2**.

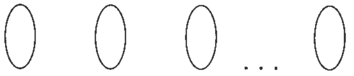
Câte oi are țăranul? **22 : 2 = 11**.

Câte păsări are țăranul? **46 – 11 = 35.**

Rezolvarea 2. *Grafic*

Etapa I

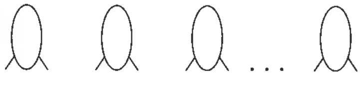
Se figurează oile şi păsările prin ovale:



(Total: **46**, dar nu ştiu câte de fiecare fel)

Întrucât fiecare vietate are cel puțin **2** picioare, se figurează la fiecare oval două linioare, reprezentând astfel cele **2** picioare.

Etapa a II-a



(În calcul: **92** de picioare, pentru că **46×2 = 92**.)

Din cele **114** picioare, s-au repartizat **92** şi au rămas **22**, adică **114 – 92 = 22**. Acestea pot fi figurate la un număr de **11** ovale, adăugând câte **2**, căci **4 – 2 = 2**; deci **22 : 2 = 11**.

Etapa a III-a

11 vietăți + ? vietăți = 46 vietăți

Rezultă că **11** vietăți sunt oi, deci au câte **4** picioare, iar restul, **35**, căci **46 – 11 = 35**, sunt păsări, pentru că au câte **2** picioare. (Într-o altă variantă, figurăm ovale cu **4** liniuțe, reprezentând oile. Vor fi în plus picioare. Tăiem câte **2** liniuțe de la fiecare oval, până dispare acel număr de picioare care este în plus.)

Rezolvarea 3. *Aproximații succesive (Încercare şi eroare)*

Sunt în total **46** de animale. Ele nu pot fi toate oi, pentru că ar fi atunci **184** de picioare, adică **46×4 = 184**. Ele nu pot fi toate nici păsări (nici enunțul nu admite!), fiindcă atunci nu ar fi decât **92** picioare, adică **46×2 = 92**. Or, trebuie să existe **114** picioare. Dacă jumătate din numărul de animale ar fi oi şi cealaltă jumătate păsăsri, câte picioare ar fi?

Putem concepe un tabel ca acesta:

Păsări	oi	picioare		
46	**0**	**46×2**	**=**	**92**
0	**46**	**46×2**	**=**	**184**
23	**23**	**23×2 + 23×4**	**=**	**138**

Observ că dacă aş lua un număr mai mic de păsări, voi avea un număr mai mare de oi şi, implicit, un număr mai mare de picioare. Atunci trebuie să fie un număr mai mare decât **23** de păsări.

Să încercăm cu un număr de **30** de păsări:

30	**46 – 30 = 16**	**30×2 + 16×4**	**=**	**124**

Tot nu corespunde enunțului, sunt cu **10** picioare mai mult, căci **124 – 114 = 10**.

Considerăm **35** de păsări, atunci:

35	**11**	**35×2 + 11×4**	**=**	**114**

Aceasta este soluția problemei.

Rezolvarea 4. *Algebric*

Enunțul problemei

în limbaj obişnuit	în limbaj algebric
... are un anumit număr de păsări	x
şi un număr de oi	y
Aceste animale au în total **46** de capete	$x + y = 46$
şi **114** picioare	$2x + 4y = 114$

Atunci: $x = 46 - y$, iar $2(46 - y) + 4y = 114 \Leftrightarrow 92 - 2y + 4y = 114 \Leftrightarrow y = 11; x = 35$.

Rezolvarea 5. *Generalizare*

Să înlocuim numerele date prin litere: $46 = a$ şi $114 = b$, atunci $x + y = a$ şi $2x + 4y = b$. Împărțind prin **2** ambii termeni ai ultimei egalități, se obține:

$x + 2y = \frac{b}{2}$. Îl deducem pe x din ultima relație şi îl înlocuim în această ultimă relație, adică $x = a - y$, iar $a - y + 2y = \frac{b}{2} \Leftrightarrow y = \frac{b}{2} - a$.

În concluzie, numărul de oi este egal cu jumătate din numărul de picioare minus numărul de capete.

În particular: Numărul de oi: **114 : 2 – 46 = 11**.

Pentru $\boldsymbol{x}$, folosim $\boldsymbol{x + y = a}$ şi $\boldsymbol{y = \frac{b}{2} - a}$. Prin înlocuirea lui $\boldsymbol{y}$ în prima relație, obținem: $\boldsymbol{x + \frac{b}{2} - a = a \Leftrightarrow x = 2a - \frac{b}{2}}$.

În concluzie, numărul de păsări este egal cu dublul numărului de capete minus jumătate din numărul de picioare.

În particular: Numărul de păsări: **2×46 – 114 : 2 = 92 – 57 = 35**.

2. Rezolvarea 1. *Prin falsă ipoteză, cu **2** variante*

a) Presupunem că Răzvan are numai monede de **10** lei. Atunci, care ar fi suma totală? **50×10 = 500**. Cu cât este mai mare suma obținută față de suma totală dată? **500 – 435 = 65**. (De unde provine această diferență? Din faptul că Răzvan avea şi monede de **10** lei, dar şi monede de **5** lei. Înlocuim câte o monedă de **10** cu câte una de **5** lei, până dispare această diferență.) Care este diferența de valoare dintre **2** monede diferite? **10 – 5 = 5**. Câte monede de **5** lei avea Răzvan? **65 : 5 = 13**. Dar de **10** lei? **50 – 13 = 37**.

b) Dacă presupunem că Răzvan ar avea numai monede de **5** lei, calculele sunt: **50×5 = 250**; **435 – 250 = 185**; **185 : 5 = 37**; **50 – 37 = 13**.

Rezolvarea 2. *Grafic*

Figurăm numărul de piese, monede de **5** lei şi de **10** lei, prin cerculețe.

Întrucât fiecare piesă conține cel puțin **5** lei, scriem pe fiecare cerculeț **5**, astfel:

5 lei 5 lei 5 lei 5 lei 5 lei .... 5 lei 5 lei 5 lei

(Total: **50**, dar nu ştim câte de fiecare fel)

Am consumat astfel **250** lei, căci **50×5 = 250**.

Au rămas **185** lei, pentru că **435 – 250 = 185**.

Deoarece o monedă de **10** lei valorează cu **5** lei mai mult decât una de **5** lei, mai distribuim câte **5** lei la fiecare cerculeț, până terminăm cei **185** lei.

Vor fi atâtea cercuri cu **10** lei de câte ori **5** se cuprinde în **185**, adică: **185 : 5 = 37**;

$$\underbrace{5+5 \quad 5+5 \quad 5+5 \quad 5+5 \ \ldots \ 5+5}_{37 \text{ monede}} \ \ldots \ \underbrace{5 \quad 5 \quad 5}_{? \text{ monede}} \qquad = 50 \text{ monede}$$

Vor fi deci **37** de monede de câte **10** lei, iar restul, adică **13**, căci **50 – 37 = 13**, vor fi monede de **5** lei.

Rezolvarea 3. *Prin aproximații succesive*

Presupunem că numărul monedelor de **5** lei este egal cu al monedelor de **10**.

Concepem un tabel:

Nr crt.	Număr monede de 5 lei	Valoarea lor	Număr monede de 10 lei	Valoarea lor	Suma totală	Observații
1.	25	125	25	250	375	
2.	24	120	26	260	380	Dacă numărul monedelor de 5 lei scade, iar al celor de 10 lei creşte, suma creşte. Considerăm un număr mai mare de monede de 10 lei.
3.	20	100	30	300	400	
4.	10	50	40	400	450	Am depăşit suma. Trebuie să luăm mai puține monede de 10 lei.
5.	12	60	38	380	440	
6.	13	65	37	370	435	Aceasta este soluția problemei.

Rezolvarea 4

Notând cu x şi y numărul monedelor de **5** lei şi, respectiv, de **10** lei, scriem relațiile: $x + y = 50$ şi $5x + 10y = 435$. Din prima relație, rezultă: $x = 50 - y$. Înlocuind pe x, a doua relație devine: $5(50 - y) + 10y = 435 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5y = 185 \Leftrightarrow y = 37; x = 13$.

3. Rezolvarea 1. *Prin falsă ipoteză*

Varianta a

Presupunem că s-ar fi obținut numai câte **38** chintale de pe fiecare hectar. Care ar fi fost cantitatea totală de grâu? **65×38 = 2 470** (chintale). Cu câte chintale ar fi fost mai puțin? **2 610 – 2 470 = 140**. Această diferență provine din faptul că s-au obținut şi câte **42** chintale la hectar. Înlocuim câte o grupă de **38** chintale cu câte o grupă de **42** chintale, până se acoperă diferența de **140** chintale. La o singură înlocuire, cu cât se micşorează cele **140** chintale? Cu diferența dintre **42** şi **38**, adică cu **4** chintale. Câte asemenea înlocuiri putem face (Câte suprafețe de câte **1** hectar cu producția de **42** q/ha erau)? De câte ori **4** se cuprinde în **140**, adică **140 : 4 = 35** (ha). Câte hectare (suprafețe) cu producția de câte **38** chintale erau? **65 – 35 = 30** (ha).

Varianta b

Presupunem că s-ar fi obținut numai câte **42** chintale de pe fiecare hectar. Producția totală ar fi de **2 730** chintale, cu **120** chintale mai mare decât cea dată. Pentru a nu mai fi această diferență, vom înlocui câte o grupă de **42** q cu câte o grupă de **38** q, la o singură înlocuire diferența se micşorează cu **4** q, căci **42 – 38 = 4**.

Câte ha (suprafețe) cu producția de **42** q/ha erau? **120 : 4 = 30**.

Dar cu producția de **38** q/ha? **65 – 30 = 35** (ha).

Rezolvarea 2

Fie x şi y numărul de ha cu producția de câte **38** q şi, respectiv, numărul celor cu câte **42** q, putem scrie relațiile: $x + y = 65$ şi $38x + 42y = 2\,610$.

Din prima relație, rezultă: $x = 65 - y$. Înlocuind pe x, a doua relație devine: $38(65 - y) + 4y = 2\,610 \Leftrightarrow 2\,470 - 38y + 42y = 2\,610 \Leftrightarrow y = 140 : 4 = 35$; $x = 65 - 35 = 30$.

4. *Prin falsă ipoteză*

Presupunem că ar fi numai grinzi de stejar. Atunci ar fi o cantitate de **13 800** kg, căci **46×300 = 13 800**, deci cu **3 276** kg mai mult decât este în enunț. Înlocuim câte o grindă de stejar cu câte o grindă de brad, la o singură înlocuire diferența de **13 800** kg micşorându-se cu **18** kg, căci **46 – 28 = 18**.

Câte grinzi de brad erau? **3 276 : 18 = 182**. Câte grinzi de stejar erau? **300 – 182 = 118**.

Dacă presupunem că ar fi fost numai grinzi de brad, atunci cantitatea totală ar fi fost de **8 400** kg, cu **2 124** kg mai puțin decât **10 524** kg. Această diferență dispare, dacă în loc de **118** grinzi de brad luăm **118** grinzi de stejar, căci **2 124 : (46 – 28) = 118**.

Deci, erau **118** grinzi de stejar, iar restul de **182**, grinzi de brad.

*La problemele **1 – 6*** din acest capitol, pe baza unei *ipoteze oarecare*, putem face un raționament analog (compară şi cu cel de la rezolvarea **3** de la problema nr. **2**).

De exemplu, presupunem că ar fi fost **100** de grinzi de brad, iar restul până la **300**, adică **200** grinzi, ar fi fost de stejar.

În total ar fi fost **100×28 + 46×200 = 12 000** kg, cu **1 476** kg mai mult decât **10 524** kg.

Înlocuim grinzi de stejar din ipoteza noastră (care sunt mai grele), cu grinzi de brad până când dispare această diferență.

La o singură înlocuire diferența se micşorează cu **18** kg, căci **46 – 28 = 18**. Ca să dispară toată diferența, vom face **82** de înlocuiri, căci **1 476 : 18 = 82**.

Deci erau **200 – 82 = 118** grinzi de stejar şi **100 + 82 = 182** grinzi de brad. (Pentru o altă variantă, presupuneți că ar fi fost **100** grinzi de stejar şi **200** grinzi de brad).

5. *Falsă ipoteză, cu mai multe variante*:

a) Presupunem că toate biletele vândute erau numai de **4** lei. Se ajunge la exercițiul: **(220 – 40×4) : (6 – 4) = 30** bilete de câte **6** lei etc.

b) Presupunem că au fost vândute numai bilete de **6** lei. Se ajunge la exercițiul: **(40×6 – 220) : (6 – 4) = 10** bilete de câte **4** lei etc.

c) *Ipoteză oarecare:* Presupunem că ar fi fost **10** bilete de câte **6** lei, iar restul de **30**, bilete de cate **4** lei. În total, s-ar fi încasat **10×6 + 30×4 = 180** lei, cu **40** lei mai puțin decât **220** lei. Înlocuind bilete mai ieftine cu bilete mai scumpe, vom face **40 : (6 – 4) = 20** înlocuiri până când dispare diferența de **40** lei. Au fost **30 – 20 = 10** bilete de câte **4** lei şi **10 + 20 = 30** bilete de câte **6** lei.

6. Enunțul conține *două probleme*, ultima fiind cea care cere numărul apartamentelor cu trei camere.

Prima problemă:

Presupunem că ar fi fost apartamente numai cu **2** camere. Se ajunge la exercițiul: **(64 – 24×2) : (4 – 2) = 8**, numărul apartamentelor cu **4** camere, iar **24 – 8 = 16**, numărul apartamentelor cu **2** camere.

Dacă am presupune că în cele **24** erau numai ar fi fost apartamente cu **4** camere, exercițiul ar fi: **(24×4 – 64) : (4 – 2) = 16**, numărul apartamentelor cu **2** camere etc.

A doua problemă: ***16 : 4×3 = 12****, apartamente cu* ***3*** *camere. În total:* ***100*** *camere.*

7. Rezolvarea 1

Problema conține **3** mărimi, dar fiecare poate fi determinată în mod independent, deci nu este o problemă de falsă ipoteză cu **3** mărimi.

Presupunem că toate cele **10** probleme ar fi fost rezolvate corect de fiecare copil. Câte puncte ar fi primit fiecare în această ipoteză?

10×10 = 100. Cu câte puncte ar fi primit mai mult fiecare copil față de punctajul dat în enunț?

Andrei : **100 – 25 = 75**
Barbu : **100 – 40 = 60**
Costel : **100 – 55 = 45**.

De unde provin aceste diferențe? Din faptul că fiecare problemă rezolvată greşit sau nerezolvată am socotit-o ca fiind rezolvată bine, deci nu numai că nu le-am scăzut **5** puncte pentru fiecare problemă greşit rezolvată sau nerezolvată (în practică, nu prea se întâmplă acest lucru, problema greşit rezolvată nu primeşte punctaj, nicidecum să afecteze punctajul acordat pentru o problemă rezolvată bine, dar tocmai în aceasta constă dificultatea şi frumusețea problemei), dar le-am adăugat câte **10** puncte. Cu câte puncte am socotit greşit la fiecare problemă rezolvată greşit? **15**, pentru că **10** (punctele acordate în plus, deoarece am considerat-o rezolvată bine) plus **5** (punctele pe care trebuie să le scădem pentru faptul că a greşit problema) este egal cu **15**, adică **10 + 5 = 15**. Pentru câte probleme rezolvate greşit sau nerezolvate am acordat fiecăruia câte **15** puncte în plus? Pentru atâtea probleme de câte ori **15** se cuprinde în diferența de punctaj (adică în **75**, în **60** şi, respectiv, în **45**). Deci, câte probleme a rezolvat greşit sau nu a rezolvat fiecare copil?

Andrei : **75 : 15 = 5**
Barbu : **60 : 15 = 4**
Costel : **45 : 15 = 3**.

Câte probleme a rezolvat corect fiecare copil?

Andrei: **10 – 5 = 5**; Barbu: **10 – 4 = 6**; Costel: **10 – 3 = 7**.

Verificare: Fiecare a primit următorul punctaj:

Andrei : **5×10 – 5×5 = 25**
Barbu : **6×10 – 4×5 = 40**
Costel : **7×10 – 3×5 = 55**.

Rezolvarea 2

Fiind trei necunoscute care se pot determina independent, împărțim enunțul în **3** probleme distincte.

Fie ***y*** numărul de probleme rezolvate corect şi ***z*** numărul de probleme rezolvate greşit sau nerezolvate de către Andrei, se pot scrie: $y + z = 10$ şi $10y - 5z = 25$. Din prima relație, rezultă: $z = 10 - y$. Înlocuind pe z în a doua relație, obținem: $10y - 5(10 - y) = 25 \Leftrightarrow 10y - 50 + 5y = 25 \Leftrightarrow y = (50 + 25) : 15$, de unde $y = 5$.

Pentru celelate două necunoscute, rezolvarea este similară.

8. (*3 mărimi*)

Pentru a fi implicată numai relația de raport între numărul sacilor de **54** kg şi cel al sacilor de **50** kg, adică la un sac de **54** kg să corespundă **3** saci de câte **50** kg, considerăm că s-au mai adus încă **8** saci de câte **50** kg. Care va fi atunci cantitatea totală în acest caz? $\mathbf{2\,552 + 8 \times 50 = 2\,952}$.

Câți saci s-ar fi adus în total? $\mathbf{48 + 8 = 56}$.

<u>Rezolvarea 1</u>. *Prin falsă ipoteză*

Pentru că față de numărul sacilor de **63** kg nu avem nici o relație, *presupunem* că toți sacii au *câte* **63** kg. Ce cantitate totală ar fi fost în acest caz? $\mathbf{56 \times 63 = 3\,528}$. Cu câte kg ar fi fost mai multe față de **2 952** kg? $\mathbf{3528 - 2\,952 = 576}$. De unde provine această diferență? Din faptul că am presupus că toți sacii au câte **63** kg. Dar sunt saci de **54** kg şi de **50** kg. Fiecărui sac de **54** kg, dacă este considerat ca având **63** kg, îi adăugăm în plus **9** kg, căci $\mathbf{63 - 54 = 9}$, iar fiecărui sac de **50** kg, dacă este considerat de **63** kg, îi adăugăm în plus **13** kg, pentru că $\mathbf{63 - 50 = 13}$, acumulându-se astfel o diferență de **576** kg. Dar câți saci de **50** de kg şi **54** kg au fost considerați a fi de **63** kg? (Sunt **2** moduri de gândire pentru a vedea câți saci de **50** de kg şi câți saci de **54** kg au fost considerați a fi de **63** kg; unul, făcând calculul ca la metoda comparației prin înlocuire: la un sac de **54** kg şi la **3** saci de câte **50** kg s-au pus în plus **48** kg, pentru că $\mathbf{4 \times 63 - (54 + 3 \times 50) = 48}$; de câte ori s-au pus în plus câte **48** kg? $\mathbf{576 : 48 = 12}$ etc.). Pentru ca *algoritmul de rezolvare* a acestui tip de probleme *să nu difere prea mult* de cel al problemelor cu **2** mărimi, vom gândi astfel: încercăm să înlocuim *saci* de **63** kg cu *saci* de **54** kg şi de **50** kg, până dispare diferența de **576** kg. Dar cum? Ştiind că la un sac de **54** kg corespund **3** saci de câte **50** kg, luăm *grupe* de câte **4** saci, fiecare sac de **63** kg, şi le înlocuim cu *grupe* de **4** saci dintre ceilalți, respectând *raportul* dat (la un sac de **54** kg să fie **3** saci de **50** kg):

în loc de 4 saci de câte 63 kg punem 4 saci → 1 sac de 54 kg
→ 3 saci de câte 50 kg

La o singură înlocuire, diferența de **576** kg cu cât se micşorează?

$$\underbrace{\mathbf{4 \times 63}}_{\text{luăm}} - \underbrace{\mathbf{(1 \times 54 + 3 \times 50)}}_{\text{punem înapoi}} = \mathbf{252 - 204 = 48} \text{ (deci cu } \mathbf{48} \text{ kg).}$$

Câte înlocuiri vom face ca să dispară diferența de **576** kg? Atâtea înlocuiri, de câte ori **48** se cuprinde în **576**. Câte grupe cu câte **4** saci de **63** kg vor fi înlocuite? $\mathbf{576 : 48 = 12}$. Deci vor fi **12** grupe de câte **4** saci (**1** de **54** kg + + **3** de câte **50** kg), iar restul, până la **56** de saci, vor fi saci a câte **63** kg.

Să recapitulăm:

- saci de câte **54** kg sunt **12**, căci: $\mathbf{12 \times 1 = 12}$;
- saci de câte **50** kg sunt **36**, căci $\mathbf{12 \times 3 = 36}$;
- saci de câte **63** kg sunt **8**, căci $\mathbf{56 - (12 + 36) = 8}$.

Să nu uităm că numărul sacilor de câte **50** kg a fost mărit cu **8**, iar cantitatea totală cu **400** kg. În realitate, numărul sacilor de **50** kg era de **28**, căci $\mathbf{36 - 8 = 28}$, iar cantitatea totală era de **2 552** kg, pentru că $\mathbf{2\,952 - 400 = 2\,552}$.

Verificare:	$\mathbf{8 \times 63 =}$	**504**
	$\mathbf{12 \times 54 =}$	**648**
	$\mathbf{28 \times 50 =}$	**1 500**
Total:	**48** (saci) şi **2 552** (kg); $\mathbf{(28 + 8) : 3 = 12}$.	

Rezolvarea 2. *Un alt tip de falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem un număr oarecare de saci de câte **50** kg, având grijă ca el să fie multiplu de **3**, ca să se poată exprima numărul sacilor de **54** kg (prin relația de divizibilitate, față de numărul celor de **50**).

Presupunem că sunt **24** de saci de câte **50** kg. Atunci:

	Nr. saci		1 sac = ? kg	cantitatea de orez
	24	×	**50**	**= 1 200**
24 : 3 = 8;	**8**	×	**54**	**= 432**
56 – (24 + 8) = 24;	**24**	×	**63**	**= 1 512**
			Total	**3 144** (kg).

Cu câte kg ar fi mai mult față de cantitatea de **2 952** kg?

3 144 – 2 952 = 192. Ipoteza este falsă, sunt cu **192** kg mai mult. Trebuie să micşorăm numărul sacilor de **63** kg, mărind astfel numărul celorlalți saci. Mărim numărul sacilor de **50** de kg cu **6** (tot un multiplu de **3**).

Deci, *ipoteza a II-a*

	Nr. saci		1 sac = ? kg	cantitatea de orez
24 + 6 = 30;	**30**	×	**50**	**= 1 500**
(30 : 3) = 10;	**10**	×	**54**	**= 540**
56 – (30 + 10) = 16;	**16**	×	**63**	**= 1 008**
			Total	**3 048** (kg).

Cu câte kg ar fi şi acum mai mult față de **2 952** kg? **3 048 – 2 952 = 96**.

Şi această ipoteză este falsă, dar constatăm următoarele:

– cu cât s-a micşorat diferența a doua oară față de prima dată?
192 – 96 = 96; la câți saci s-a micşorat diferența cu **96** de kg? La **6** saci;

– dacă diferența de **96** dispare la **6** saci de câte **50** de kg (şi numărul sacilor de **54** kg şi, respectiv, de **63** kg se modifică prin modificarea celor **50** kg, dar nu este important acum), la un singur sac de **50** kg, diferența cu cât se micşorează? **96 : 6 = 16**;

– dacă la un singur sac de **50** de kg diferența se micşorează cu **16** kg, pentru a se micşora cu **192** (diferența din prima ipoteză trebuie să dispară), câți saci de câte **50** kg mai trebuie să adăugăm la prima ipoteză? **192 : 16 = 12**; deci, numărul sacilor de câte **50** kg era de **36**, căci **24 + 12 = 36**.

Să nu uităm că am reformulat problema, mărind numărul sacilor de câte **50** de kg cu **8** saci, iar cantitatea totală cu **400** kg.

Câți saci de **50** kg erau în formularea inițială? **36 – 8 = 28**.

Câți saci de **54** kg erau? **(28 + 8) : 3 = 12**.

Câți saci de **63** kg erau? **48 – (28 + 12) = 8**.

Rezolvarea 3

Fie y numărul sacilor de **54** kg, atunci cei de **50** kg vor fi $3y - 8$; cei de **63** kg = z. Se pot scrie: $y + 3y - 8 + z = 48$ şi $54y + 50(3y - 8) + 63z = 2\,552 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 204y + 63z = 2\,952$; dacă $4y + z = 56$, rezultă $y = (56 - z) : 4$, iar prin înlocuirea lui y în a doua relație, obținem: $12z = 96 \Leftrightarrow z = 8$; $y = 12$; celălalt număr: $3 \times 12 - 8 = 28$.

9. Pentru a fi implicată numai relația de raport între numărul cărților de

70 de lei (la o carte de **75** de lei să corespundă **4** cărți de **70** de lei), dăm deoparte o carte de **75** de lei, deci vom lucra cu un total de **25** de cărți, adică **26 – 1 = 25** și valoarea totală de **1 820**, căci **1 895 – 75 = 1 820**.

Rezolvarea 1. *Falsă ipoteză*

Pentru că, față de numărul cărților de câte **80** de lei nu avem nici o relație, *presupunem* că toate cărțile au fost cu prețul unitar de **80** de lei. Care ar fi fost suma totală? **25×80 = 2 000**. Cu câți lei ar fi fost mai mult față de suma de **1 820**? **2 000 – 1 820 = 180**. De unde provine această diferență? Din faptul că am presupus că toate cărțile au prețul unitar de **80** de lei. Dar erau și de **70** lei, și de **75** lei. Dacă o carte de **70** de lei este considerată a fi de **80** lei, îi adăugăm **10** lei, căci **80 – 70 = 10**, iar dacă o carte de **75** lei este considerată de **80** lei, îi adăugăm la preț **5** lei, pentru că **80 – 75 = 5**, acumulându-se o diferență de **180** lei. Încercăm să înlocuim *cărți* de câte **80** lei bucata cu *cărți* de **70** lei și respectiv de **75** lei bucata, până dispare diferența de **180**. *Dar cum*? Știind că la o carte de **75** lei corespund **4** cărți de câte **70** lei, luăm *grupe de câte **5** cărți* cu prețul unitar de **80** de lei și le înlocuim cu *grupe de câte **5** cărți* dintre celelalte, respectând *raportul* dat (la o carte de **75** lei să fie **4** cărți de câte **70** lei):

în loc de **5** cărți a câte **80** lei punem **5** → **1** carte de **75** lei
→ **4** cărți a câte **70** lei.

La o singură înlocuire, diferența de **180** lei cu cât se micșorează?

$$\underbrace{5\times80}_{\text{luăm}}-\underbrace{(1\times75+4\times70)}_{\text{punem înapoi}}=400-355=45$$

Câte înlocuiri vom face ca să dispară diferența de **180**? Atâtea înlocuiri, de câte ori **45** se cuprinde în **180**. (Câte grupe de câte **5** cărți cu prețul unitar de **80** de lei *vor fi înlocuite*?) **180 : 45 = 4**. Deci, vor fi **4** grupe de *câte **5** cărți* (o carte de **75** lei + **4** cărți de câte **70** lei), iar restul, până la **26** de cărți, vor fi **5** cărți a câte **80** lei fiecare.

Să recapitulăm:

– cărți de câte **70** lei erau **16**, căci **4×4 = 16**;
– cărți de câte **75** lei erau **4**, căci **1×4 = 4**;
– cărți de câte **80** lei erau **5**, căci **25 – (16 + 4) = 5**.

Să nu uităm că numărul cărților de câte **75** lei a fost micșorat cu **1**, valoarea totală cu **75** lei. În realitate, numărul cărților de câte **75** lei era **5**, căci **4 + 1 = 5**, iar valoarea totală era de **1 895** lei, pentru că **1 820 + 75 = 1 895**.

Verificare: **16×70 = 1 120**
5×75 = 375
5×80 = 400

Total: **26** (cărți); **1 895** (lei); **16 : (5 – 1) = 4**.

Rezolvarea 2. *Un alt tip de falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem un număr oarecare de cărți cu prețul unitar de **70** lei, având grijă ca el să fie multiplu de **4**, pentru a fi posibilă exprimarea numărului de cărți cu prețul unitar de **75** lei (prin relația de divizibilitate).

Presupunem că sunt **4** cărți de câte **70** lei. Atunci:

Nr. cărți		preț unitar	valoarea
4	×	70	= 280
1	×	75	= 75
[25 – (4 + 1)]	×	80	= 1 600
Total 25			1 955.

Cu câți lei ar fi mai mult față de **1 820** lei? **1 955 – 1 820 = 135.**

Ipoteza este falsă. Trebuie să micşorăm numărul cărților de câte **80** lei, mărind astfel numărul celorlalte cărți. Mărim numărul cărților de câte **70** lei cu câte **4** cărți (tot multiplu de **4**). Deci:

Ipoteza a II-a

Nr. cărți		preț unitar	valoarea
8	×	70	= 560
2	×	75	= 150
15	×	80	= 1 200
Total 25			1 910.

Cu cât este mai mult față de valoarea inițială? **1 910 – 1 820 = 90**. Se observă că dacă am mărit numărul cărților de câte **70** lei cu **4** (şi numărul celorlalte s-a modificat, dar nu este important acum), diferența a ajuns de la **135** la **90**. Cu cât s-a micşorat? **135 – 90 = 45**. Dacă la **4** cărți de **70** lei bucata diferența s-a micşorat cu **45**, atunci la o singură carte cu cât se va micşora? Cu numărul care arată de câte ori **4** se cuprinde în **45**, adică **45 : 4 = 11,25**. La câte cărți va dispare diferența de **135**? **135 : 11,25 = 12**. Deci, trebuie să adăugăm la numărul cărților cu prețul unitar de **70** lei din prima ipoteză încă **12** cărți; sunt **16** cărți de **70** lei, pentru că **4 + 12 = 16**. Cele de **75** lei erau **5**, căci **16 : 4 + 1 = 5**, iar celelalte erau tot **5**, pentru că **26 – (16 + 5) = 5**.

Rezolvarea 3

Fie y numărul cărților de câte **75** lei, atunci cele de câte **70** lei vor fi $4(y-1)$, iar celălalt număr z. Se pot scrie relațiile: $y + 4y - 4 + z = 26$ şi $75y + 70 \times 4(y-1) + 80z = 1\,895$. $75y + 280y - 280 + 80z = 1\,895$. Prin determinarea lui z din prima ecuație şi înlocuirea lui în ultima, obținem:

$z = 30 - 5y$; $355y + 80(30 - 5y) = 2\,175 \Leftrightarrow 355y + 2\,400 - 400y = 2\,175$ $\Leftrightarrow y = 225 : 45 = 5$; $4(y-1) = 4 \times 4 = 16$; $z = 30 - 25 = 5$.

10. Rezolvarea 1. *Prin falsă ipoteză*

Presupunem că toate cele **31** de truse ar avea fiecare câte trei creioane (față de numărul acestor truse nu avem nici o relație).

Câte creioane ar fi în această ipoteză? **31 × 3 = 93.**

Cu câte creioane ar fi mai puține decât în realitate? **105 – 93 = 12.**

De unde provine această diferență? Din faptul că am considerat că toate trusele au câte **3** creioane, dar de fapt sunt şi truse cu câte **2** şi cu câte **4** creioane, între acestea fiind raportul dat (de **3** ori mai puțin).

Respectăm acest raport, la o trusă de **2** creioane sunt **3** truse cu câte **4** creioane. Un asemenea grup de **4** truse (**1** de **2** creioane şi **3** de **4** creioane) are **14** creioane, căci **1 × 2 + 3 × 4 = 14**. Înlocuim atunci **4** truse de câte **3** creioane cu **4** truse de celelalte feluri, până acoperim diferența de **12**. Cu cât se micşorează diferența la o singură înlocuire? **14 – 4 × 3 = 2.**

Câte înlocuiri trebuie? Dacă la o singură înlocuire, diferența se micşorează cu **2**, ca să dispară diferența, sunt necesare **6** asemenea înlocuiri, căci $\mathbf{12 : 2 = 6}$.

Deci, vor fi **6** grupe de câte **4** truse (**1** trusă de **2** creioane + **3** truse de **4** creioane), iar restul, până la **31**, vor fi truse cu câte **3** creioane. Câte truse de câte **4** creioane sunt în cele **6** grupe? Dacă într-o grupă sunt **3** truse, în **6** grupe vor fi de **6** ori câte **3**, adică $\mathbf{6 \times 3 = 18}$. Câte truse de câte **3** creioane sunt? $\mathbf{31 - 6 - 18 = 7}$.

Verificare:	**6**	×	**2**	=	**12** (creioane)
	7	×	**3**	=	**21** (creioane)
	18	×	**4**	=	**72** (creioane)
Total:	**31** (truse) şi				**105** (creioane).

Rezolvarea 2. *Un alt tip de falsă ipoteză*

Presupunem un număr oarecare de truse de câte **4** creioane, având grijă ca acesta să fie multiplu de **3**, pentru a fi posibilă exprimarea numărului de truse cu câte **2** creioane (prin relația de **3** ori mai puțin).

Ipoteza I

Presupunem că sunt **3** truse de câte **4** creioane. Atunci:

	Nr. truse		Într-o trusă câte creioane		Total creioane
	3	×	**4**	=	**12**
$\mathbf{3 : 3 = 1}$;	**1**	×	**2**	=	**2**
$\mathbf{31 - (3 + 1) = 27}$;	**27**	×	**3**	=	**81**
			Total:		**95** (creioane).

Cu câte creioane ar fi mai puține față de **105**? $\mathbf{105 - 95 = 10}$.

Ipoteza este falsă. Trebuie să mărim numărul truselor de **4** creioane.

Îl mărim cu **3**, tot un multiplu de **3**.

Ipoteza a II-a

	Nr. truse		Într-o trusă câte creioane		Total creioane
$\mathbf{3 + 3 = 6}$	**6**	×	**4**	=	**24**
$\mathbf{6 : 3 = 2}$;	**2**	×	**2**	=	**4**
$\mathbf{31 - (6 + 2) = 23}$;	**23**	×	**3**	=	**69**
			Total:		**97** (creioane).

Cu cât sunt mai puține față de numărul **105**? $\mathbf{105 - 97 = 8}$. Şi această ipoteză este falsă, dar se observă că dacă am mărit numărul truselor de câte **4** creioane cu **3** truse (şi numărul celorlalte s-a modificat în acelaşi timp, dar nu este important acum), diferența inițială s-a micşorat cu **2**, adică $\mathbf{10 - 8 = 2}$. Dacă la **3** truse (cu câte **4** creioane, acesta-i termenul de comparație pentru modificările produse) diferența s-a micşorat cu **2**, la o singură trusă de acelaşi fel, cu cât s-a micşorat diferența? Cu de **3** ori mai puțin; adică cu $\mathbf{\frac{2}{3}}$. Ca să dispară diferența de **10**, câte truse de **4** creioane trebuie să fie în plus față de cele **3** din prima ipoteză? $\mathbf{10 : \frac{2}{3} = 10 : 2 \times 3 = 15}$. Deci, trebuie să mărim numărul truselor de **4** creioane din prima ipoteză cu **15** truse, adică: $\mathbf{3 + 15 = 18}$. Atunci:

	18	×	4	=	72
$18:3=6$;	6	×	2	=	12
$31-(18+6)=7$;	7	×	3	=	21
	Total:				**105** (creioane)

Rezolvarea 3

Fie ***y*** numărul truselor cu **2** creioane, **3*y*** numărul celor cu **4**, ***z*** celălalt număr, se pot scrie:

$$y+3y+z=31 \Leftrightarrow 4y+z=31 \Leftrightarrow z=31-4y; 2y+3y\times4+3z=105 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14y+3(31-4y)=105 \Leftrightarrow 14y+93-12y=105 \Leftrightarrow 2y+93=105 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y=12 \Leftrightarrow y=6; 3y=3\times6=18; z=31-4\times6=7.$$

11. Rezolvarea 1. *Falsă ipoteză*

Presupunem că ar fi cumpărat numai caiete de **47** lei, atunci ar fi cheltuit **705** lei, căci **15×47 = 705**; deci, cu **424** lei mai mult decât suma din enunț, deoarece **705 – 281 = 424**. De unde rezultă această diferență? Din faptul că am considerat şi caietele de **10** lei ca fiind de **47** lei, adăugând la fiecare caiet câte **37** lei, căci **47 – 10 = 37**, dar şi caietele de **15** lei le-am considerat astfel, adăugând la fiecare caiet câte **32** lei, pentru că **47 – 15 = 32**. Înlocuim grupe de câte **3** caiete cu prețul unitar de **47** lei cu grupe de câte **3** caiete dintre celelalte. De ce procedăm la înlocuirea pe grupe de câte **3** caiete? Ca să respectăm raportul dintre numerele caietelor de **10** lei şi de **15** lei. Deci:

în loc de 3 caiete de câte 47 lei punem 3 → 1 caiet de 15 lei; → 2 caiete de câte 10 lei.

La o singură înlocuire, cu cât se micşorează diferența de **424** lei?

3×47 – (1×15 + 2×10) = 141 – 35. Câte înlocuiri putem face? De câte ori **106** se cuprinde în **424**, adică **424 : 106 = 4**.

Deci, erau **4** grupe de câte **3** caiete (**1** caiet de **15** lei şi **2** caiete de câte **10** lei), iar restul, până la **15**, erau caiete de **47** lei.

Câte caiete de câte **10** lei erau? **4×2 = 8**. Câte caiete de câte **15** lei erau? **4×1 = 4** sau **8 : 2 = 4**. Câte caiete de **47** lei erau? **15 – 8 – 4 = 3**.

Verificare: **8 + 4 + 3 = 15** şi **8×10 + 4×15 + 3×47 = 281**.

Rezolvarea 2. *Un alt tip de falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem că erau caiete de **10** lei un multiplu de **2**, pentru a se putea exprima numărul celor de **15** lei.

Presupunem că erau **2** caiete de câte **10** lei. Atunci:

	Nr. caiete		preț unitar	valoarea	
	2	×	10	**20** (lei),	căci **2×10 = 20**
$2:2=1$;	1	×	15	**15** (lei),	căci **1×15 = 15**
$15-(2+1)=12$;	12	×	47	**564** (lei),	căci **12×47 = 564**
			Total =	**599** (lei).	

Cu câți lei ar fi mai mulți față de suma dată? **599 – 281 = 318**. Ipoteza este falsă. Trebuie să micşorăm numărul caietelor scumpe şi, implicit, mărim numărul caietelor ieftine.

Ipoteza a II-a

Mărim numărul caietelor de **10** lei din prima ipoteză cu **2**, tot multiplu de **2**. Atunci:

Nr. caiete	Preț unitar	Valoare	
$2+2=4$; 4	10	40 (lei),	căci $4\times10=40$;
$4:2=2$; 2	15	30 (lei),	căci $2\times15=30$;
$15-(4+2)=9$; 9	47	423 (lei),	căci $9\times47=423$;
			în total: **493**.

Cu câți lei ar fi şi acum mai mulți față de suma dată în enunț?

493 – 281 = 212. Şi această ipoteză este falsă, dar se observă că a-tunci când am mărit numărul caietelor de **10** lei cu **2** (şi numărul celorlalte caiete s-a modificat, dar nu este important acum), diferența din prima ipoteză s-a micşorat cu **106** lei, deoarece **318 – 212 = 106**. *Dacă la* ***2*** *caiete* (de câte **10** lei) diferența se micşorează cu **106** lei, *la un singur caiet de acest fel*, cu cât se micşorează diferența? **106 : 2 = 53**. Pentru a dispărea diferența din prima ipoteză, câte caiete de câte **10** lei trebuie să adăugăm la cele **2** caiete? **318 : 53 = 6**. Rezultă că trebuie să adăugăm la cele **2** caiete din prima ipoteză încă **6** caiete. Deci, erau: **8** caiete de câte **10** lei; **4** caiete de câte **15** lei, căci **8 : 2 = 4**; **3** caiete de câte **47** lei, pentru că **15 – 8 – 4 = 3**.

Verificare: $8\times10+4\times15+3\times47=80+60+141=281$.

12. Rezolvarea 1. *Prin falsă ipoteză*

Presupunem că toate cele **100** de animale sunt oi (despre numărul de oi nu avem nici o relație). Câte picioare ar fi? $100\times4=400$. Cu câte picioare ar fi mai multe decât în realitate? **400 – 280 = 120**. De unde provine această diferență? Din faptul că am considerat că toate animalele sunt oi, dar de fapt sunt şi găini, şi rațe; între numărul acestora este dat raportul (de **3** ori mai multe). Respectând acest raport, la fiecare rață sunt câte **3** găini.

Animale dintr-un astfel de grup (o rață şi **3** găini) au **8** picioare, adică $2+3\times2=8$. Înlocuim un grup de **4** oi printr-un grup format din **4** păsări (**1** rață şi **3** găini). La o singură înlocuire diferența de **120** de picioare se micşorează cu **8** picioare, deoarece:

$$\underbrace{4\times4}_{\text{luăm}}-\underbrace{(2+3\times2)}_{\text{punem înapoi}}=8$$

Câte înlocuiri putem face (până dispare diferența din ipoteza noastră)? De câte ori se cuprinde **8** în **120**, adică **120 : 8 = 15**.

Deci, se pot face **15** înlocuiri, adică sunt **15** grupe de câte **4** păsări, fiecare grupă fiind formată din **3** găini şi o rață.

Rezultă că sunt **45** de găini, căci $15\times3=45$ şi **15** rațe, pentru că $15\times1=15$. Restul, până la **100**, sunt oi, adică: **100 – (45 + 15) = 40**.

Verificare: $40+45+15=100$; $40\times4+45\times2+15\times2=280$; $45:15=3$.

Rezolvarea 2. *Alt tip de falsă ipoteză*

Presupunem un număr oarecare de găini, având grijă ca acesta să fie multiplu de **3**, pentru a fi posibilă exprimarea numărului de rațe (prin relația de **3** ori mai puțin).

Ipoteza I

Presupunem că sunt **6** găini. Atunci:

	Nr. animale	Nr. picioare	Total picioare
	6 găini	**2**	**12**, căci $6 \times 2 = 12$;
$6 : 3 = 2$;	**2** rațe	**2**	**4**, căci $2 \times 2 = 4$;
$100 - (6 + 2) = 92$;	**92** oi	**4**	**368**, căci $92 \times 4 = 368$.
		Total:	**384**.

Cu câte picioare ar fi mai multe față de numărul din enunț?

384 – 280 = 104. Ipoteza este falsă. Trebuie să mărim numărul găinilor şi, implicit, să micşorăm numărul de oi. Mărim numărul de găini din prima ipoteză cu **12**, tot un multiplu de **3**.

Ipoteza a II-a

	Nr. animale	Nr. picioare	Total picioare
$6 + 12 = 18$;	**18** găini	**2**	**36**, căci $18 \times 2 = 36$;
$18 : 3 = 6$;	**6** rațe	**2**	**12**, căci $6 \times 2 = 12$;
$100 - 18 - 6 = 76$;	**76** oi	**4**	**304**, căci $76 \times 4 = 304$.
		Total:	**352**.

Cu cât este mai mare şi acum numărul de picioare față de cel dat din enunț? **352 – 280 = 72.**

Dar cu cât s-a micşorat diferența a doua oară? **104 – 72 = 32.**

Se observă că dacă am micşorat numărul oilor şi am adăugat la numărul găinilor din prima ipoteză încă **12**, diferența s-a micşorat cu **32**. Dacă la **12** găini diferența s-a micşorat cu **32** picioare, atunci la o găină, cu cât se va micşora diferența? $32 : 12 = \frac{8}{3}$. Ca să dispară diferența de **104**, cea din prima ipoteză, câte găini mai adaugăm la cele **6**? $104 : 8 \times 3 = 39$. Deci, erau **45** de găini, căci $6 + 39 = 45$; erau 15 rațe, căci $45 : 3 = 15$; iar restul, până la **100**, sunt oi, adică: $100 - (45 + 15) = 40$.

Rezolvarea 3

Fie y numărul de rațe, $3y$ numărul de găini şi z numărul de oi. Se pot scrie relațiile: $y + 3y + z = 100$ şi $2 \times 3y + 2y + 4z = 280$. Din prima relație, rezultă: $z = 100 - 4y$. Prin înlocuirea lui z în a doua relație, obținem:

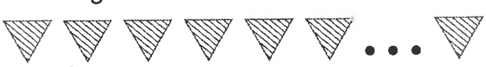
$8y + 4(100 - y) = 280 \Leftrightarrow 400 - 8y = 280 \Leftrightarrow y = (400 - 280) : 8 = 15$;

$3y = 3 \times 15 = 45$; $z = 100 - 4 \times 15 = 40$.

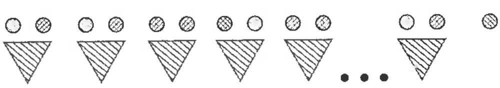
13. Urmează ***un al treilea subtip*** de probleme care se pot rezolva prin metoda falsei ipoteze, dar mai uşor, pentru elevii mici, este să se rezolve prin metoda grafică (prima rezolvare). Este nevoie de un raționament specific. (*A se vedea şi soluțiile de la sfârşitul capitolului*).

Rezolvarea 1

Figurăm un număr de vaze:


(Nu ştim câte)

Îmi imaginez prima situație (variantă) în care am pus florile câte **2**, rămânând o floare fără loc:



În varianta a II-a, trebuie să reaşez florile câte **3** şi să rămână o vază fără flori. (Nu voi umbla la toate florile, pentru că ... se ofilesc).

Câte flori reaşez în varianta a II-a (... şi care)?

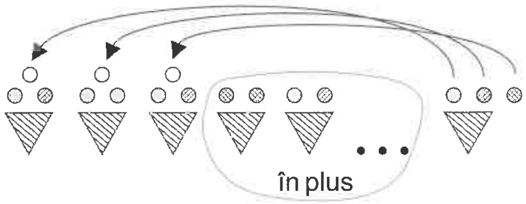
De la sfârşitul rândului voi lua floarea fără loc şi încă **2** (pentru ca să rămână o vază goală, aşa cum se spune în enunţ) şi le redistribui în faţa şirului. Deci, reaşez numai **3** flori, pentru că **2 + 1 = 3**.

Câte flori mai pun la fiecare vază? Dacă ele au câte **2** şi trebuie să aibă câte **3**, rezultă că la fiecare vază mai pun câte o floare, adică **2 + ? = 3**, iar **3 – 2 = 1**.

Din cele **3** flori pe care le reaşez, la câte vaze îmi ajunge să mai pun câte o floare? **3 : 1 = 3**.

Rezultă că din cele **3** flori mai pot pune, câte una, la **3** vaze.

(Celelalte vaze figurate sunt în plus, nu le mai iau în calcul, decât ultima, care, în varianta a doua, rămâne goală.)



Câte vaze erau? **3** (cu flori) + **1** (goală) = **4** (vaze). Câte flori am? În **3** vaze a câte **3** flori sunt **9** flori.

1) din cele **9** flori, distribuite câte **2**, doar **8** vor avea loc în cele **4** vaze, una rămânând fără loc, adică $\mathbf{9 = 4 \times 2 + 1}$;

2) cele **9** flori, distribuite câte **3**, vor ocupa doar **3** vaze, din cele **4** vaze.

Rezolvarea 2. *Falsă ipoteză*

Ipoteza I

Voi considera că sunt **2** vaze (un număr oarecare).

Câte flori sunt în fiecare fel din cele două variante?

a) Când florile sunt puse câte **2**, o floare este fără loc, deci $\mathbf{2 \times 2 + 1 = 5}$ (flori). Dar în cealaltă situaţie?

b) Când florile sunt puse câte **3**, o vază rămâne goală, deci $\mathbf{(2 - 1) \times 3 = 3}$ (flori).

Care este diferenţa dintre numărul de flori din cele două situaţii?

Nu sunt egale? Nu, pentru că **5 – 3 = 2**.

Ipoteza a II-a

Presupun că sunt **3** vaze. Câte flori ar fi în fiecare din cele două variante?

a) Când florile sunt puse câte **2**, o floare este fără loc, deci $\mathbf{3 \times 2 + 1 = 7}$ (flori). Dar în cealaltă situaţie?

b) Când florile sunt puse câte **3**, o vază rămâne goală, deci $\mathbf{(3 - 1) \times 3 = 6}$ (flori). Şi această ipoteză este falsă, pentru că există diferenţă între numărul de flori. Care este această diferenţă? **7 – 6 = 1**.

Dar ce se constată? Atunci când *am mărit numărul de vaze cu **1***, diferenţa dintre numărul de flori în cele două situaţii *s-a micşorat cu **1***, adică cu **2** (diferenţa din prima ipoteză) – **1** (diferenţa dintre numărul de flori din a doua ipoteză) = **1**.

În concluzie:

Dacă atunci când am mărit numărul de vaze cu **1**, diferența de **2** (flori) s-a micşorat cu **1**, ca să dispară diferența, trebuie să mărim numărul de vaze (din prima ipoteză) cu numărul care arată de câte ori **1** se cuprinde în **2**, adică cu **2**, căci $\mathbf{2 : 1 = 2}$.

Deci, erau **4** vaze, deoarece $\mathbf{2 + 2 = 4}$.

Câte flori erau? $\mathbf{(4-1) \times 3 = 9}$ sau $\mathbf{4 \times 2 + 1 = 9}$.

Rezolvarea 3

În practică, asemenea probleme (A se vedea şi problemele **14** – **17**, din capitolul al **IV**-lea), se judecă oral, prin aproximații succesive, ceea ce în limbaj matematic (pentru clasa a V-a) se exprimă prin noțiunile de multipli şi de divizori ai unui număr natural. De exemplu:

Fie z numărul de flori, y numărul de vaze. Pe scurt, enunțul se scrie: $z = 2y + 1$, dar şi $z = 3(y-1)$, unde $z \neq y \neq 0$.

Din relația a doua rezultă $z = M_3$, adică $z \in \{3, 6, 9, \dots 3n, \dots\}$.

Dacă $z = 6$, iar $3(y-1) = 6$, rezultă $y = 3$, iar $z = 2 \times 3 + 1 = 7$ (F);

Dacă $z = 9$, iar $3(y-1) = 9$, rezultă $y = 4$, iar $z = 2 \times 4 + 1 = 9$ (A);

(Verificați şi pentru alte valori ale lui z!)

Rezolvarea 4

Păstrând notațiile de mai sus, putem scrie relațiile: $z = 2y + 1$ şi $z = 3(y-1)$. Rezultă: $2y + 1 = 3y - 3 \Leftrightarrow 1 = y - 3 \Leftrightarrow y = 4$; $z = 2 \times 4 + 1 = 9$.

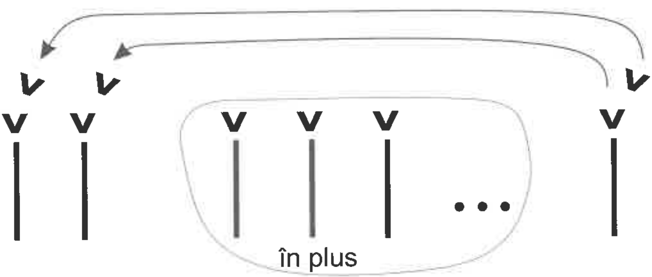
14. (Pentru explicații mai concrete, a se vedea problema anterioară)

Rezolvarea 1. *Grafic* (Este mai uşor să pornim de la elementele care nu se pot grupa, flori fără vaze, elevi fără loc, bani în plus etc. şi apoi să trecem la cealaltă situație, pe care am numit-o varianta a doua.)

În varianta a doua, vrabia fără loc şi încă una (de pe parul care trebuie să rămână liber) le reaşez, adăugând câte una la fiecare par, pentru a fi câte **2**. La câți pari pot adăuga câte **1**, din cele **2**? $\mathbf{2 : 1 = 2}$. Deci, vor fi **2** pari cu câte **2** vrăbii şi **1** par liber.

Grafic:

Figurăm parii şi, pe fiecare par, câte o vrabie; o vrabie este fără loc; încercăm apoi să obținem a doua situație:



Răspuns: **3** pari, **4** vrăbii.

Rezolvarea 2

Ipoteza I

Presupun că ar fi **5** pari. Atunci numărul de vrăbii ar fi, în cele două variante:

a) când sunt câte una, ar fi **6**, pentru că $\mathbf{5 \times 1 + 1 = 6}$;

b) când sunt câte **2**, ar fi **8**, pentru că $\mathbf{(5-1) \times 2 = 8}$. Ipoteza este falsă, pentru că numărul de vrăbii este diferit în cele două situații, o dată **6**, a doua oară **8**, diferența fiind **2**, adică **8 – 6 = 2**.

Ipoteza a II-a

Presupun că ar fi **4** pari. Atunci numărul de vrăbii, în cele două situații, ar fi:

a) când sunt câte **1**, ar fi **5**, pentru că **4×1 + 1 = 5**;

b) când sunt câte **2**, ar fi **6**, pentru că **(4 – 1)×2 = 6**, iar un par este liber. Şi această ipoteza este falsă, numărul de vrăbii este diferit, diferența este **1**, deoarece **6 – 5 = 1**.

Se constată însă următoarele:

Atunci când am micşorat numărul de pari cu **1** (în ipoteza **I** erau **5**, iar în a doua, **4**), diferența dintre numărul de vrăbii a scăzut cu **1** (întâi diferența era **2**, apoi **1**). Ca să dispară diferența **2**, trebuie să micşorez numărul de pari din prima ipoteză cu **2**, căci **2 : 1 = 2**. În prima ipoteză am presupus că sunt **5** pari; în realitate erau **3** pari, căci **5 – 2 = 3**. Câte vrăbii erau? **3×1 + 1 = 4** sau **(3 – 1)×2 = 4**.

<u>Rezolvarea 3</u>

Notăm cu ***y*** numărul de pari. Atunci numărul de vrăbii este:

– în prima ipoteză: $y \times 1 + 1$;

– în a doua ipoteză: $(y - 1) \times 2 = 2y - 2$.

Rezultă: $y + 1 = 2y - 2 \,/ - y \Leftrightarrow y - 2 = 1 \Leftrightarrow y = 3$.

Numărul de păsări este **4**, căci **3×1 + 1 = 4**.

15. Pentru a afla câte probleme are de rezolvat Oana, scriem pe scurt relațiile:

varianta I: dacă rezolvă câte **5** probleme pe zi, îi rămân **4** probleme;

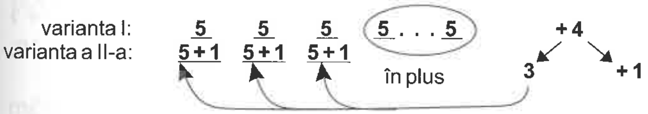
varianta a II-a: dacă rezolvă câte **6**, îi rămâne **1** problemă.

<u>Rezolvarea 1</u>

Din cele **4** probleme din varianta **I**, iau numai **3**, pe care le redistribui, câte una, la zilele în care erau planificate a fi câte **5**, pentru a fi câte **6**, aşa cum este în varianta a doua. Dacă le redistribui câte una la câte zile mai pot adăuga, ştiind că am numai **3** probleme de împărțit? **3 :1 = 3**.

Deci, în **3** zile, Oana rezolvă câte **6** probleme, iar în a patra zi, o problemă.

Grafic: Numărul de probleme în cele două variante este:



Câte probleme a rezolvat Oana? **6×3 + 1 = 19**. În câte zile? **3** (cu câte **6** probleme) + **1** (cu o problemă) = **4** (zile). Dacă a început pe **7** ianuarie, pe **10** ianuarie mai avea o problemă.

O altă variantă a raționamentului:

Să presupunem că Oana vrea să rezolve câte **5** probleme pe zi. Cum gândeşte? Ia câte o problemă din cele **6** programate zilnic şi o planifică pentru ultima zi. (Se observă că Oana a început judecata cu varianta a doua.) În ultima zi, în planificarea dată în varianta a doua, îi rămânea o problemă.

Pentru a-i rămâne **4**, câte probleme mai planifică? adică **1 + ? = 4**, deci **4 – 1 = 3**. În câte zile erau planificate câte **6** şi acum trebuie să fie câte **5**? *Sau*: De la câte zile trebuie să ia câte **1** pentru a aduna **3**? **3 : 1 = 3**. Deci, de la **3** zile Oana ia câte o problemă pentru a o adăuga la ultima zi, în care era numai una şi trebuia să fie **4**.

Deci, Oana ar fi rezolvat în **3** zile câte **5** probleme, în a patra zi, **4** probleme, în total: $\mathbf{5\times3+4=19}$ (probleme); termină de lucru pe data de **10** ianuarie.

Rezolvarea 2. *Falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem un număr de zile, **10**. Atunci, numărul de probleme, în cele două variante, ar fi:

a) $\mathbf{9\times5+4=49}$ (**9** cu câte **5**, ultima cu **4** probleme);

b) $\mathbf{9\times6+1=55}$. Ipoteza este falsă, pentru că numărul de probleme este diferit, diferenţa fiind de **6**, căci **55 – 49 = 6**.

Ipoteza a II-a

Presupunem **11** zile, atunci numărul de probleme ar fi:

a) $\mathbf{10\times5+4=54}$;

b) $\mathbf{10\times6+1=61}$.

Şi această ipoteză este falsă, diferenţa acum este **7**, adică **61 – 54 = 7**, *mai mare decât cea din prima ipoteză* (în loc să se micşoreze, diferenţa creşte). Atunci presupunem *un număr de zile mai mic decât în ipoteza I.*

Ipoteza a III-a

Presupunem **9** zile. Numărul de probleme ar fi:

a) $\mathbf{8\times6+4=44}$;

b) $\mathbf{8\times6+1=49}$.

Şi această ipoteza este falsă, dar se constată că diferenţa este **5**, adică **49 – 44 = 5**, cu **1** mai mică decât cea din prima ipoteză. Pentru a dispărea diferenţa **6** (din prima ipoteză), trebuie *să micşorăm* numărul de zile din acea ipoteză cu un număr care arată de câte ori **1** se cuprinde în **6**, adică **6 : 1 = 6**. Deci, numărul de zile este **4**, pentru că **10 – 6 = 4**.

Câte probleme a rezolvat Oana? $\mathbf{3\times5+4=19}$ sau $\mathbf{3\times6+1=19}$. Termină de rezolvat pe **10** ianuarie.

Rezolvarea 3

Fie y numărul de zile. Atunci numărul de probleme în cele două variante este: $5(y-1)+4$ şi $6(y-1)+1$. Se poate scrie egalitatea:

$$5(y-1)+4=6(y-1)+1 \Leftrightarrow 5y-5+4=6y-6+1 \Leftrightarrow 5y-1=6y-5\,/+1$$

$\Leftrightarrow 5y=6y-4 \Leftrightarrow y=4$; celălalt număr (de probleme): $\mathbf{5(4-1)+4=19}$.

16. Pentru a afla câte ciocolate a cumpărat Moş Crăciun, trebuie să aflăm câţi copii erau.

Rezolvarea 1. *Grafic, cu două variante*

a) Este mai uşor să pornesc de la elementele care nu se pot grupa, adică de la situaţia a doua (pentru că în acest algoritm se încadrează toate problemele de acest tip). În care situaţie rămân bani negrupaţi? În situaţia a doua, pentru că se spune că îi mai rămân **550** lei, relaţie echivalentă cu "i-ar mai rămâne bani pentru încă **2** jucării". Deci, pe scurt:

Varianta a II-a:
dacă ia jucării de câte **275** de lei, îi rămân **550** lei, adică **2×275 = 550**;
Varianta I:
dacă ia jucării de câte **300** lei, nu i-ar ajunge **25** de lei, adică pentru ul-ultimul copil va putea cheltui numai **275** lei, pentru că **300 – 25 = 275**.
Grafic:

II	275	275	275	275	...	275	+ 550
I	300	300	300	300	...	275	
	275 + 25	275 + 25	275 + 25	275 + 25			

Cei **500** lei din varianta a II-a trebuie să îi redistribui în varianta I. Cum? Deoarece fiecare grupă are câte **275** lei, iar acum trebuie să conțină câte **300** lei, rezultă că la fiecare grupă trebuie să mai adăugăm câte **25** lei, pentru că **300 – 275 = 25**. La câte grupe îmi ajung cei **550** lei, redistribuindu-i câte **25**? La atâtea grupe (jucării) de câte ori **25** se cuprinde în **550**, adică **550 : 25 = 22**. Dar ultima grupă din varianta I tot cu **275** lei rămâne. Atunci, câți copii erau? **22 + 1 = 23**. Tot atâtea ciocolate a cumpărat Moş Crăciun. Câți lei a cheltuit Moş Crăciun? **23×275 + 550 + 2 = 6 877**. Câți lei a costat o ciocolată? **552 : 23 = 24**.

b) În această variantă, scriem relațiile pe scurt în ordinea în care sunt date în enunț:

– câte **300**, nu i-ar ajunge **25** lei, adică pentru un copil poate cumpăra o jucărie de **275** lei, căci **300 – 25 = 275**;

– câte **275** lei, i-ar rămâne bani pentru încă **2** jucării, adică i-ar rămâne **550** lei, căci **2 ×275 = 550**.

Când Moş Crăciun se hotărăşte să ia pentru fiecare copil câte o ciocolată, ia câte **25** lei de la fiecare grupă de **300**, ca să îi rămână câte **275** lei pentru fiecare jucărie, iar restul de bani îi cheltuie pentru ciocolată.

Dar câți lei îi rămân pentru ciocolată? **550** lei.

De la câte grupe de câte **300** ia câte **25** lei pentru a aduna suma de **550** lei? **550 : 25 = 22**.

Dar să nu uităm că de la ultima grupă nu a mai luat nimic, ea deja conținea **275** lei, adică:

300	300	300	300	...	275	
$\frac{300-25}{275}$	$\frac{300-25}{275}$	$\frac{300-25}{275}$	$\frac{300-25}{275}$	...	275	+550

$$\frac{25+25+\ldots+25}{22\times 25}$$

Câte jucării (sau ciocolate) a cumpărat Moş Crăciun? **22 + 1 = 23**.
Câți lei cheltuieşte pe toate ciocolatele? **550 + 2 = 552**.
Câți lei costă o ciocolată? **552 : 23 = 24**.

Câți lei a cheltuit Moş Crăciun pentru copiii din clasa noastră?

$23 \times 275 + 552 = 6\,877$ sau **$23 \times 275 + 23 \times 24 = 6\,325 + 552 = 6\,877$**.

Rezolvarea 2. *Un alt tip de falsă ipoteză*

Şi pentru acest mod de gândire nu luăm în calcul cei **2** lei pe care îi adaugă Moş Crăciun.

Ipoteza I

Presupunem că în clasa noastră este un număr oarecare de elevi, de exemplu **20**. Atunci suma ar fi, în cele două situații:

a) **$(20 - 1) \times 300 + 275 = 5\,975$** (lei), **19** de câte **300** şi una de **275**;

b) **$20 \times 275 + 550 = 6\,050$**.

Ipoteza este falsă, pentru că sumele sunt diferite între ele; diferența: **$6\,050 - 5\,975 = 75$**.

Ipoteza a II-a

Presupunem că ar fi **21** de elevi (jucării). Atunci, suma ar fi, în cele două situații:

a) **$(21 - 1) \times 300 + 275 = 6\,275$**;

b) **$21 \times 275 + 550 = 6\,325$**.

Şi această ipoteză este falsă, fiindcă sumele sunt diferite în cele două situații, diferența fiind de **50** de lei, adică **$6\,325 - 6\,275 = 50$**. Se constată însă:

– atunci când am mărit numărul de jucării (sau de elevi) din prima ipoteză cu **1**, diferența dintre sumele rezultate s-a micşorat cu **25**, pentru că **$75 - 50 = 25$**;

– deci trebuie să măresc numărul de jucării din prima ipoteză (**20**) cu numărul care arată de câte ori **25** se cuprinde în **75** (prima diferență): **$75 : 25 = 3$**, iar **$20 + 3 = 23$**.

Au fost **23** de copii, deci s-au cumpărat **23** de ciocolate.

Câți lei au costat toate ciocolatele? **$550 + 2 = 552$**.

Câți lei a costat o ciocolată? **$552 : 23 = 24$**.

Câți lei a cheltuit Moş Crăciun pentru copiii din clasa noastră?

$23 \times 275 + 552 = 6\,877$.

Rezolvarea 3

Fie ***y*** numărul de elevi (sau de jucării), suma pe care o avea inițial Moş Crăciun se poate scrie: **$275y + 550$** sau **$300(y - 1) + 275$**.

Suma fiind aceeaşi, se poate scrie: **$275y + 550 = 300(y - 1) + 275 \Leftrightarrow$**

$\Leftrightarrow 275y + 550 = 300y - 25 / -275y \Leftrightarrow 575 = 25y \Leftrightarrow y = 575 : 25 = 23$.

Suma = **$23 \times 275 + 550 + 2 = 6\,877$**; o ciocolată: **$(550 + 2) : 23 = 24$**.

17. Rezolvarea 1

Îmi imaginez momentul în care elevii s-au îmbarcat câte **6**, rămânând **4** elevi fără loc.

Aceşti **4** elevi şi încă alți **6**, din barca care trebuia să rămână liberă în varianta a doua, îi redistribui la bărcile care erau ocupate câte **6**, pentru a fi câte **8** într-o barcă.

Câți elevi se *mai* urcă într-o barcă? Dacă erau câte **6** şi trebuie să fie câte **8**, înseamnă că trebuie să mai adaug la fiecare barcă câte **2**, pentru că **$8 - 6 = 2$**. La câte bărci mai pot adăuga câte **2** din cei **10**? **$10 : 2 = 5$**. Câte bărci erau? **$5 + 1 = 6$**. Câți elevi erau? **$5 \times 8 = 40$**.

În lucrările elevilor, judecata şi desenul vor fi: Câți elevi redistribui în varianta a doua? **$4 + 6 = 10$**. Câți elevi mai adaug la fiecare barcă? Dacă erau câte **6** şi trebuie să fie câte **8**, atunci **8 – 6 = 2**. La câte bărci mai adăug **2** elevi din cei **10** (sau câte bărci vor fi ocupate cu câte **8** elevi)? **10 : 2 = 5**. Câți elevi erau? **5×8 = 40**. Câte bărci erau? **5**(ocupate) + **1**(liberă) = **6** (bărci).

Reprezentarea grafică:

I $\underline{6}$ $\underline{6}$ $\underline{6}$ $\underline{6}$ $\underline{6}$ ... $\underline{6}$ **+4**

(deocamdată nu ştim numărul de bărci)

II $\frac{6+2}{8}$ $\frac{6+2}{8}$ $\frac{6+2}{8}$ $\frac{6+2}{8}$ $\frac{6+2}{8}$ $\frac{6+2}{8}$

în plus

Cei **10**, adică **6 + 4** îi redistribui câte **2** la bărcile din față, ocupând astfel **5** bărci, pentru că **10 : 2 = 5**. O barcă rămâne goală (ultima din primul şir); bărci: **5 + 1 = 6**; elevi: **5×8 = 40**.

O altă variantă a raționamentului de mai sus:

Pornim de la situația a doua. Sunt câte **8** elevi în fiecare barcă, iar o barcă era liberă. Ca să meargă mai comod, ei încearcă să se reaşeze câte **6**, completând astfel şi ultima barcă care era liberă, iar **4** elevi rămân pentru tura următoare. Câți elevi trebuie să se ridice din fiecare barcă ocupată cu câte **8**? **8 – 6 = 2**. De la câte bărci se ridică câte **2** elevi, pentru a ocupa ultima barcă cu câte **6** şi **4** să rămână pentru tura următoare? adică **2**×? = **6** + **4**. De la **5** bărci, pentru că **10 : 2 = 5**. Câte bărci erau? **5** (ocupate inițial) + **1** (ocupată după regruparea elevilor) = **6** (bărci).

Câți elevi erau? **6×6 + 4 = 40**. *Grafic*:

$\underline{8}$ $\underline{8}$ $\underline{8}$ $\underline{8}$ $\underline{8}$ $\underline{8}$ $\underline{8}$ ... $\underline{8}$ ___

în plus

$\frac{8-2}{6}$ $\frac{8-2}{6}$ $\frac{8-2}{6}$ $\frac{8-2}{6}$ $\frac{8-2}{6}$ $\underline{6}$ +4

10

Rezolvarea 2. *Falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem că ar fi **2** bărci. Atunci numărul de elevi în cele două situații ar fi:

– când sunt câte **6**, ar fi **16**, adică **2×6 + 4 = 16**;
– când sunt câte **8**, ar fi **8**, adică **1×8 = 8**, o barcă e liberă.

Ipoteza este falsă, pentru că numărul de elevi este diferit în cele două situații, o dată **16**, a doua oară **8**, diferența fiind **8**, adică **16 – 8 = 8**.

Ipoteza a II-a

Presupunem că sunt **3** bărci. Atunci numărul de elevi în cele două situații ar fi:

– când sunt câte **6**, ar fi **22** elevi, căci **3×6 + 4 = 22**;
– când sunt câte **8**, ar fi **16** elevi, **căci** 2×**8 = 16**, o barcă este liberă.

Şi această ipoteză este falsă, numărul elevilor este diferit în cele două situații, diferența fiind **6**, adică **22 – 16 = 6**.

Se constată însă următoarele: atunci când *am mărit numărul bărcilor cu 1* (în prima ipoteză am presupus că sunt **2** bărci, în a doua **3**), *diferența* dintre cele două numere, reprezentând diferența dintre numerele de elevi, a *scăzut cu 2* (întâi diferența era **8**, apoi **6**); față de prima ipoteză, când diferența era **8**, trebuie să măresc numărul bărcilor cu **4**, adică cu numărul care arată de câte ori **2** se cuprinde în **8**. Atunci, **8 : 2 = 4**, iar **2 + 4 = 6**. Deci, erau **6** bărci şi **40** de elevi.

Rezolvarea 3

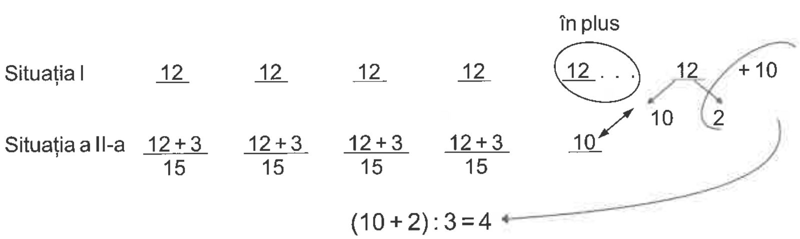
Fie y numărul de bărci, numărul de elevi se poate scrie: $6y + 4$ sau $8(y-1)$. Numărul de elevi fiind acelaşi, rezultă: $6y+4=8y-8 \Leftrightarrow 4=2y-8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=(8+4):2=6$.

Numărul de elevi: $6\times 6+4=40$ sau $8\times(6-1)=40$.

18. Rezolvarea 1. *Grafic*:

Dan grupează întâi pietricelele pe care le are în grămezi de câte **12**, rămânându-i **10** pietricele (situația I). În momentul în care se gândeşte să le grupeze câte **15**, cum procedează? Ia cele **10** pietricele, care au rămas negrupate şi le distribuie la grupele în care erau câte **12**. Dar în această situație pentru ultima grupă nu îi ajung **5** pietricele pentru a fi câte **15**. Această ultimă grupă avea, în prima situație (variantă), **12** pietricele. Câte trebuie să rămână acolo pentru ca, atunci când Dan vrea să aibă **15**, să nu îi ajungă **5**? adică **5 + ? = 15**. Rezultă că în ultima grupă Dan va lăsa **10**. Câte pietricele ia, ca să îi rămână **10**? adică **12 – ? = 10**. Deci mai ia **2**, pentru că **12 – 10 = 2**.

Să recapitulăm: Câte pietricele reaşază (reîmparte) Dan în a doua situație? **10 + 2 = 12**. Câte pietricele mai pune la fiecare grupă de câte **12** pentru a fi câte **15**? adică **12 + ? = 15**. **15 – 12 = 3**. La câte grupe mai pune câte **3** din cele **12** pietricele pe care le redistribuie? **12 : 3 = 4**. Deci, Dan va avea **4** gropițe cu câte **15** pietricele şi o gropiță cu **10** pietricele. Câte pietricele avea Dan? **4×15 + 10 = 70**. Câte gropițe făcuse Dan? **4 + 1 = 5**.
Grafic:

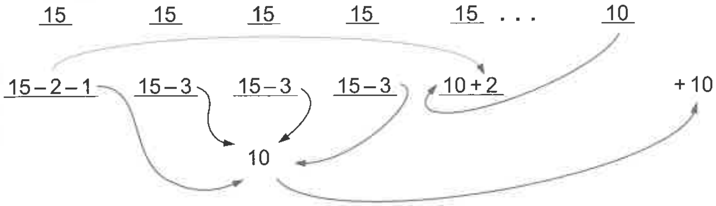


2) *O altă variantă a raționamentului de mai sus:*

Începem raționamentul de la a doua situație, când Dan a aşezat câte **15** pietricele în fiecare gropiță, iar în ultima numai **10** pietricele (nu-i ajung **5**). Când se răzgândeşte, vrând să aibă câte **12** pietricele în fiecare gropiță, procedează astfel: ia **2** pietricele din prima gropiță şi le pune în ultima gropiță, în care erau **10**, pentru a fi **12**, căci aşa cere prima situație din enunț. Trebuie să mai dea deoparte **10** pietricele. De unde le ia? Una din prima gropiță unde rămăseseră **13** (trebuia să fie **12**), iar celelalte **9**, din următoarele **3** gropițe, astfel încât în fiecare să rămână câte **12** pietricele. Câte gropițe avea? Prima (din care a luat **2** și apoi încă o pietricică) + următoarele **3** (din care a luat câte pietricele) + ultima (în care fuseseră numai **10**) = **5** (gropițe).

Câte pietricele avea Dan? $\mathbf{5 \times 12 + 10 = 70}$.

Grafic:



Putem gândi și astfel: Dan ia **10** pietricele din ultima gropiță și le pune deoparte, lăsând-o goală, căci în prima situație, **10** pietricele rămân fără loc. În groapa care rămâne liberă pune **12** pietricele. De unde le ia? Dacă în fiecare gropiță trebuie să fie câte **12**, înseamnă că din fiecare trebuie să ia câte **3** pietricele. Din câte gropițe ia câte **3** pietricele pentru a completa cele **12** pietricele în gropița rămasă liberă? **12 : 3 = 4**. Deci erau **5** gropițe cu câte **12** pietricele (pentru că **4**, pe care le-a obținut din cele în care fuseseră **15** pietricele + **1**, ultima, în care a pus cele **12** pietricele luate din celelalte **4** = **5** gropițe) și **10** pietricele fără loc.

Câte pietricele avea? $\mathbf{5 \times 12 + 10 = 70}$.

Încercați să rezolvați și prin procedeele de la problemele anterioare (**13** – **17**).

Rezolvarea 3

Fie ***y*** numărul de gropițe. Numărul de pietricele în cele două situații se poate scrie astfel: $\mathbf{12y + 10}$ și $\mathbf{15(y - 1) + 10}$. Numărul fiind același, rezultă: $\mathbf{12y + 10 = 15y - 15 + 10 \,/ - 12y \Leftrightarrow 10 = 3y - 5 \Leftrightarrow y = 15 : 3 = 5}$; celălalt număr: $\mathbf{12 \times 5 + 10 = 70}$.

19. Rezolvarea 1

Îmi imaginez momentul în care în fiecare ladă s-au pus câte **5** kg și au rămas **180** kg. În situația a doua, ca să se pună câte **6** kg în fiecare ladă, se procedează astfel: nu se umblă la toate căpșunele, ci se iau cele **180** kg, care erau fără loc, căpșunele din cele **20** de lăzi, care trebuie să rămână goale, plus o cantitate care reprezintă diferența dintre **2** și **5**, adică **3** kg, fiindcă într-o ladă, în care fuseseră **5** kg, trebuie să rămână **2** kg. Deci:

Câte kg reașezăm în varianta a doua? $\mathbf{180 + 20 \times 5 + (5 - 2) = 283}$.

Câte kg se mai distribuie la fiecare ladă? **6 – 5 = 1**.

Câte lăzi vor fi cu câte **6** kg (la câte lăzi ajung să mai pun câte **1** kg din cele **283**)? **283 : 1 = 283**.

Câte căpșune erau? $\mathbf{283 \times 6 + 2 = 1\,700}$ (kg).

Câte lăzi erau?

283 (pline cu câte **6** kg) + **1** (cu **2** kg) + **20** (goale) = **304** (lăzi).

O altă variantă a raționamentului de mai sus:

Pornim de la situația a doua din enunț. Încercăm să transformăm toate lăzile astfel încât fiecare să aibă câte **5** kg de căpșune. În câte lăzi trebuie să mai punem căpșune? **20** (cele goale) + **1** (cea cu **2** kg) = **21** (lăzi). Câte kg trebuie să punem în cele **21** de lăzi? $\mathbf{20 \times 5 + (5 - 2) = 103}$ (kg). De unde luăm cele **103** kg de căpşune? Din lăzile care erau cu câte **6** kg, luăm câte **1** kg din fiecare. Deci **103** lăzi cu câte **6** kg vor conţine câte **5** kg. Cele **180** kg care nu mai încap în lăzi, aşa cum cere enunţul în prima variantă, le luăm câte **1** kg din alte **180** lăzi care conţineau **6** kg, transformându-le şi pe acestea în lăzi cu câte **5** kg. Deci, în total sunt: **21 + 103 + 180 = 304** (lăzi cu câte **5** kg de căpşune). Câte kg de căpşune sunt? **304×5 + 180 = 1 700**.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

I. Presupunem că sunt **100** de lăzi (un număr oarecare). Atunci în cele două situaţii, cantităţile de căpşune ar fi:

– **100 ×5 + 180 = 680** (kg);

– **(100 – 20 – 1)×6 + 2 = 476** (kg).

Ipoteza este falsă. Cantităţile de căpşune sunt diferite. Care este diferenţa? **680 – 476 = 204**.

II. Presupunem că sunt **101** lăzi (cu **1** mai mult). Atunci în cele două situaţii, cantităţile ar fi:

– **101×5 + 180 = 685**;

– **(101 – 20 – 1)×6 + 2 = 482**.

Şi această ipoteză este falsă, diferenţa dintre cantităţi este **203**, adică **685 – 482 = 203**. Constatăm că atunci când *am mărit numărul de lăzi cu **1***, *diferenţa* dintre diferenţele cantităţilor de căpşune *s-a micşorat cu **1***, căci **204 – 203 = 1**.

Ca să dispară diferenţa de **204** din prima ipoteză, rezultă că trebuie să mărim numărul de lăzi din prima ipoteză cu câtul dintre **204** şi **1**, adică cu **204 : 1 = 204**. Deci erau **304** lăzi, pentru că **100 + 204 = 304**.

Câte kg de căpşune erau? **304×5 + 180 = 1 700**.

Rezolvarea 3

Fie ***y*** numărul de lăzi, cantitatea de căpşune în cele două situaţii este: **5*y* + 180** şi **6(*y* – 20 – 1) + 2**.

Cantitatea fiind aceeaşi, rezultă: **5*y* + 180 = 6*y* – 120 – 6 + 2** ⇔ ⇔ **5*y* + 180 = 6*y* – 124**.

Scăzând **5*y*** din fiecare termen, obţinem: **180 = *y* – 124** ⇔ ***y* = 304**. Cantitatea de căpşune: **304×5 + 180 = 1 700** sau **6×304 – 124 = 1 700**.

20. Rezolvarea 1

Pornim de la situaţia în care oamenii sunt grupaţi câte mai puţini, rămânând oameni negrupaţi. Aceasta este situaţia a doua din enunţul problemei. Deci, pe scurt:

– câte 5 oameni, un număr de **331** nu au de lucru;

– câte **6** oameni, **20** de porţiuni sunt câte **5** şi **5** porţiuni sunt libere (nu au oameni).

Câţi oameni redistribuim în situaţia a doua (pe care am scris-o noi ca fiind a doua)? **331**(din prima situaţie, care nu aveau de lucru) plus cei de la **5** porţiuni de dig, care, conform enunţului, trebuie să fie libere; observăm că **5** porţiuni, la care oamenii erau câte **5**, rămân la fel.

Deci: **331 + 5×5 = 331 + 25 = 356**. Câţi oameni mai redistribui la fiecare porţiune? **5 + ? = 6**; **6 – 5 = 1**. Câte porţiuni vor avea câte **6** oameni?

356 : 1 = 356. Câte porţiuni de câte **8** m erau? **356 + 20 + 5 = 381**.

Câţi metri avea digul? **381×8 = 3 048**. Câţi oameni erau?

381×5 + 331 = 1 905 + 331 = 2 236.

O altă variantă a raționamentului de mai sus:

Nu este normal ca **5** porțiuni de dig să rămână libere. Pentru a le completa cu câte **5**, avem nevoie de **25** de oameni, adică $\mathbf{5\times5=25}$. De unde îi luăm? De la **25** de porțiuni, la care lucrau câte **6** oameni, câte **1** de la fiecare porțiune, pentru ca pe fiecare porțiune să rămână, aşa cum cere enunțul, câte **5** oameni. Cei **331** de oameni care, conform enunțului, rămân fără lucru, îi luăm de pe alte **331** de porțiuni (care, de asemenea, aveau câte **6** oameni), de pe fiecare porțiune câte **1**. Câte porțiuni cu câte **5** oameni sunt? **5 + 25 + 331 + 20** (cele care au rămas şi în cealaltă variantă cu câte **5**) = = **381** (porțiuni de câte **8** m de dig). Câți metri are digul? $\mathbf{381\times8=3\,048}$. Câți oameni erau? $\mathbf{381\times5+331=2\,236}$.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem că ar fi **100** de porțiuni de dig. Atunci, numărul muncitorilor, în cele două situații, ar fi:

– $\mathbf{100\times5+331=831}$;

– **5** porțiuni rămân libere, **20** cu câte **5**, doar restul până la **100** vor fi cu câte **6**, adică: $\mathbf{(100-20-5)\times6+20\times5=550}$.

Ipoteza este falsă, fiindcă numărul muncitorilor este diferit în cele două situații, diferența fiind de **281**, căci $\mathbf{831-550=281}$.

Ipoteza a II-a

Presupunem că erau **101** porțiuni de dig, cu **1** mai mult decât în ipoteza anterioară. Atunci numărul de oameni în cele două situații ar fi:

– $\mathbf{101\times5+331=836}$;

– $\mathbf{(101-5-20)\times6+20\times5=556}$.

Şi această ipoteză este falsă, diferența dintre cele două numere, care reprezintă câți muncitori erau, este **280**, căci **836 – 556 = 280**. Se constată însă că atunci când *am mărit numărul porțiunilor de dig cu **1*** (întâi **100**, apoi **101**), *diferența* dintre diferențele ce reprezintă numărul de muncitori în cele două situații *s-a micşorat cu **1***, căci **281 – 280 = 1**. Rezultă că, pentru a dispărea diferența de **281** din prima ipoteză, numărul de porțiuni (tot din prima ipoteză) trebuie mărit cu numărul care arată de câte ori **1** se cuprinde în **281**, adică **281 : 1 = 281**. Deci, erau **381** porțiuni de dig, pentru că **100 + 281 = 381**. Câți metri avea digul? $\mathbf{381\times8=3\,048}$(m). Câți muncitori erau? $\mathbf{381\times5+331=2\,236}$ (muncitori).

Rezolvarea 3

Notând cu ***y*** numărul de porțiuni de câte **8** m, atunci numărul de oameni poate fi scris: $\mathbf{5y+331}$ şi $\mathbf{6(y-20-5)+5\times20}$. Rezultă egalitatea:

$$5y+331=6y-120-30+100\Leftrightarrow6y-50=5y+331\Leftrightarrow y-50=331\Leftrightarrow y=381.$$

Numărul de muncitori este **2 236**, căci $\mathbf{381\times5+331=2\,236}$.

Digul are **3 048**, căci $\mathbf{381\times8=3\,048}$.

21. Aparent, în acest subtip de probleme, nu există nici numărul total de elemente care se distribuie în două situații distincte, nici numărul de grupe care se pot forma. Totuşi, avem:

varianta 1	50 pg	50	50	50	...	50	50	50	50	
varianta a II - a	50 + 6	50 + 6	50 + 6	50 + 6	...	50 + 6	___	___	___	+ 120
							libere			

Rezolvarea 1

Presupunem că fetița a citit câte **56** de pagini pe zi *și* în cele **3** zile care i-au rămas libere. Câte pagini ar fi citit în plus? $\mathbf{3 \times 56 + 120 = 288}$ (pagini). Cu câte pagini a citit mai mult într-o zi față de programarea făcută de tatăl său? $\mathbf{56 - 50 = 6}$. Dar diferența de **288** de pagini în câte zile s-ar fi realizat?

$\mathbf{288 : 6 = 48}$. Câte pagini a citit Georgiana? $\mathbf{48 \times 50 + 120 = 2\,520}$ sau $\mathbf{(48 - 3) \times 56 = 2\,520}$. Când a început să citească Georgiana? De la **5** august, dacă numărăm înapoi **48** de zile, obținem data de **18** iunie.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

Pentru ca numărul de pagini să nu fie diferit, în cele două situații, presupunem că și în prima situație Georgiana a citit cele **120** de pagini în plus.

Ipoteza I

Presupunem un număr oarecare de zile, de exemplu **90** de zile.

Atunci, în cele două situații, numărul de pagini ar fi:

– când citește câte **50** de pagini pe zi, numărul total de pagini ar fi **4 620**, căci $\mathbf{90 \times 50 + 120 = 4\,620}$;

– când citește câte **56** de pagini pe zi, numărul total de pagini ar fi de **4 872**, deoarece $\mathbf{56 \times 87 = 4\,872}$.

Ipoteza este falsă, pentru că numărul de pagini este diferit în cele două situații, diferența fiind de **252** pagini, căci $\mathbf{4\,872 - 4\,620 = 252}$.

Ipoteza a II-a

Presupunem un număr de zile *cu **1** mai mare* decât în ipoteza anterioară, adică **91**. Atunci, numărul de pagini în cele două situații ar fi:

– când citește câte **50** de pagini pe zi, numărul total de pagini ar fi **4 670**, căci $\mathbf{91 \times 50 + 120 = 4\,670}$;

– când citește câte **56** de pagini pe zi, numărul total de pagini ar fi de **4 928**, deoarece $\mathbf{56 \times (91 - 3) = 56 \times 88 = 4\,928}$.

Și această ipoteză este falsă. Numărul de pagini în cele două situații este diferit, diferența fiind de **258**, căci $\mathbf{4\,928 - 4\,670 = 258}$. Observăm că, în loc să se micșoreze diferența, ea se mărește. Atunci, trebuie să luăm *un număr mai mic de zile* decât cel din prima ipoteză, pentru ca să fie posibilă dispariția diferenței.

Ipoteza a III-a

Presupunem un număr de zile *cu **1** mai mic* decât numărul **90** din prima ipoteză, adică **89** de zile. Atunci, numărul total de pagini în cele două situații ar fi:

– când citește câte **50** de pagini pe zi, numărul total de pagini ar fi **4 570**, căci $\mathbf{89 \times 50 + 120 = 4\,570}$;

– când citește câte **56** de pagini pe zi, numărul de pagini ar fi **4 816**, deoarece $\mathbf{(89 - 3) \times 56 = 4\,816}$.

Și această ipoteză este falsă; numărul de pagini este diferit în cele două situații, diferența fiind de **246** pagini, căci $\mathbf{4\,816 - 4\,570 = 246}$.

Dar se constată următoarele:

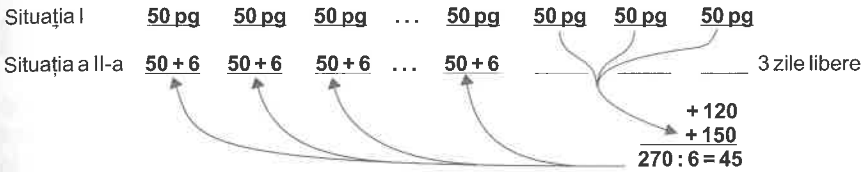
– atunci când numărul de zile din prima ipoteză *s-a micșorat* cu **1**, și diferența dintre numerele de pagini *s-a micșorat* cu **6**, căci $\mathbf{252 - 246 = 6}$.

– dacă la micșorarea cu **1** a numărului de zile, diferența dintre numerele de pagini se micșorează cu **6**, atunci cu cât trebuie micșorat numărul de zile din prima ipoteză ca diferența de **252** să dispară (numărul de pagini din cele două situații să fie același)?

Cu numărul care arată de câte ori **6** se cuprinde în **252**, adică cu **42**, pentru că **252 : 6 = 42**. Rezultă că numărul de zile era **48**, pentru că **90 – 42 = = 48**, iar numărul de pagini citite era **2 520**, deoarece **(48 – 3)×56 = 2 520**. Georgiana a început să citească pe **18** iunie, pentru că de la **5** august, dacă numărăm înapoi **48** de zile, obținem data de **18** iunie.

Rezolvarea 3

Reluând scrierea pe scurt a problemei (din fața punctului 1), se observă că şi acest enunț seamănă cu celelalte din acest capitol:



În loc să citească câte **50** de pagini, fetița citeşte câte **56** de pagini.

Deci, la cele **50** de pagini, ea mai adaugă zilnic câte **6** pagini în plus.

De unde ia aceste pagini? Din numărul de pagini care erau planificate a fi citite în ultimele **3** zile şi din cele **120** de pagini (din a XI-a carte), adică **3×50 + 120 = 270**.

În câte zile adaugă câte **6** pagini din cele **270** de pagini? **270 : 6 = 45**.

Deci, Georgiana, în **45** de zile, a citit câte **56** de pagini, în total **2 520**, pentru că **45×56 = 2 520**, iar **3** zile i-au rămas libere.

Dacă plecarea a fost programată pe **5** august, ea a început să citească pe **18** iunie, pentru că, dacă numărăm **48** de zile înapoi, începând cu **5** august, obținem data de **18** iunie.

Rezolvarea 4

Notând cu ***y*** numărul de zile planificate, numărul de pagini citite poate fi scris: $\mathbf{56(y-3) = 50y + 120 \,/ - 50y \Leftrightarrow 6y - 168 = 120 \Leftrightarrow y = 288 : 6 = 48}$.

Număr de pagini: **45×56 = 2 520**.

Data când a început să citească se află ca mai sus.

22. Rezolvarea 1

Îmi imaginez momentul în care învățătorul a dat câte **2** bomboane şi i-au rămas **30** de bomboane. În varianta a doua, vrând să dea câte **4**, nu îi ajung **40** de bomboane.

Pentru câți elevi nu îi ajung cele **40** de bomboane? Ştiind că fiecare copil are deja câte **2** bomboane (din situația I), înseamnă că ar trebui să mai primească încă câte **2**, pentru că **4 – 2 = 2**. Cele **40** de bomboane nu ajung pentru cei **20** de elevi, deoarece **40 : 2 = 20**. Deci, cei **20** de copii rămân, în situația a doua, numai cu câte **2** bomboane. Cele **30** de bomboane, care rămăseseră după ce a dat câte **2**, învățătorul le poate da câte **2**(ca să aibă câte **4**) numai unui număr de **15** elevi, pentru că **30 : 2 = 15**.

Câți elevi erau în clasă? **15** (elevi cu câte **4** bomboane) + **20** (elevi cu câte **2** bomboane) = **35** (elevi). Câte bomboane a împărțit învățătorul? **35×2 + 30 = 100** sau **15×4 + 20×2 = 100**.

Grafic:

$$
\begin{array}{l}
\text{I} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \ \ldots\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad +30 \text{ bomboane} \\
\text{II} \quad \underbrace{2+2 \quad 2+2 \quad 2+2 \quad 2+2 \quad 2+2\ \ldots}_{\underline{30:2=15}} \ \underbrace{2 \quad 2 \quad 2}_{40:2=20}
\end{array}
$$

Rezolvarea 2

(O altă variantă a raționamentului de mai sus)

Îmi imaginez situația când învățătorul a grupat bomboanele câte **4**, văzând că nu îi ajung **40** de bomboane pentru ca fiecare copil să primească câte **4** (deci, un număr de **20** de copii ar primi numai câte **2**).

Pentru că doreşte ca fiecare copil să primească acelaşi număr de bomboane, el procedează astfel: (... bomboanele rămase le va folosi drept premii pentru concursul de matematică); ia câte **2** bomboane din grupele de câte **4**, adunând astfel **30** de bomboane. Dar, de la câte grupe de câte **4**, ia câte **2** bomboane pentru a aduna **30**? **30 : 2 = 15**.

Deci, toți copiii vor primi câte **2** bomboane.

Câți copii erau? **20 + 15 = 35**.

Câte bomboane avea de împărțit învățătorul? **35×2 + 30 = 100**.

Grafic:

$$
\begin{array}{l}
\text{II} \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \ \ldots\ 4 \ \vdots\ \underbrace{2 \quad 2 \quad 2 \ \ldots\ 2}_{40:2=20} \\[2ex]
\text{I} \quad \underbrace{\frac{4-2}{2} \quad \frac{4-2}{2} \quad \frac{4-2}{2} \quad \frac{4-2}{2} \quad \frac{4-2}{2} \ \ldots\ \frac{4-2}{2}}_{2\times ?=30;\ 30:2=15} \ \vdots\ \underbrace{2 \quad 2 \quad 2 \ \ldots\ 2}_{20}
\end{array}
$$

Rezolvarea 3. *Falsă ipoteză*

Ipoteza I

Presupunem că era un număr oarecare de elevi, de exemplu **40**. Atunci numărul de bomboane în cele două situații ar fi:

– **2×40 + 30 = 110**;

– **4×40 – 40 = 120**.

Ipoteza este falsă, deoarece numărul de bomboane este diferit în cele două situații, diferența fiind de **10**, căci **120 – 110 = 10**.

Ipoteza a II-a

Micşorăm numărul de elevi din prima ipoteză, deci **39**. Atunci, numărul de bomboane în cele două situații ar fi:

– **2×39 + 30 = 108**;

– **4×39 – 40 = 116**.

Şi această ipoteză este falsă, diferența dintre numerele de bomboane, în cele două situații este **8**, căci **116 – 108 = 8**. Se constată însă că atunci când am micşorat numărul de elevi din prima ipoteză cu **1**, diferența s-a micşorat cu **2**, deoarece **10 – 8 = 2**. Pentru ca diferența din prima ipoteză, **10**, să dispară, trebuie să micşorăm numărul de elevi din prima ipoteză cu câtul dintre **10** şi **2**, adică cu **5**, căci **10 : 2 = 5**. Deci, erau **35** de elevi, deoarece **40 – 5 = 35** şi **100** de bomboane, pentru că **2×35 + 30 = 100** sau **4×35 – 40 = 100**.

Rezolvarea 4

Fie y numărul de elevi. Numărul de bomboane se poate scrie: $\mathbf{2y+30}$ şi $\mathbf{4y-40}$. Fiind acelaşi număr, se poate scrie: $\mathbf{2y+30=4y-40\ /-2y} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{30=2y-40} \Leftrightarrow \mathbf{y=70:2=35}$.

Numărul de bomboane: **2×35 + 30 = 100** sau **4×35 – 40 = 100**.

23. Rezolvarea 1

Din scrierea pe scurt a enunţului rezultă:

$$\begin{array}{l|l} \text{I.}\quad \underline{20}\quad \underline{20}\quad \underline{20}\quad \underline{20}\quad \underline{20}\ \ldots\ \underline{20} & -100 \text{ tractoare} \\ \text{II.}\quad \underbrace{\underline{20+3}\quad \underline{20+3}\quad \underline{20+3}\quad \underline{20+3}\quad \underline{20+3}\ \ldots\ \underline{20+3}}_{40} & +20 \text{ tractoare} \end{array}$$

$$(100+20):3=40$$

În loc să lucreze câte **20** de tractoare pe zi, Societatea lucrează câte **23**, adică în fiecare zi, la cele **20**, mai adaugă câte **3**. De unde sunt aceste **3** tractoare pe zi? Din cele **100**, care nu se realizau în prima variantă de fabricaţie, şi din cele **20**, pe care le realizează în plus în a doua variantă, adică din **120** de tractoare. În câte zile se iau câte **3** tractoare (În câte zile se realizează producţia a doua oară? sau, În câte zile trebuia onorată comanda)?

120 : 3 = 40. Câte tractoare erau comandate?

40×20 + 100 = 900 sau **40×23 – 20 = 900**.

Rezolvarea 2

Dacă s-ar face câte **20** de tractoare pe zi, numărul total de tractoare ar fi mai mic cu **120**, adică cu **100**, care, conform enunţului, ar lipsi la termenul de livrare, plus **20**, cele care s-ar face în plus, dacă s-ar lucra zilnic câte **23** de tractoare.

Deci, pentru a afla numărul de tractoare care s-ar fabrica în această variantă, ar trebui să scădem, din numărul total de tractoare care s-ar fabrica în situaţia a doua, **120**.

De unde provine această diferenţă? În fiecare zi se fac cu câte **3** tractoare mai mult, căci **23 – 20 = 3**.

În câte zile se adună această diferenţă de **120** de tractoare?(sau: În câte zile trebuie onorată comanda?) **120 : 3 = 40**.

Câte tractoare erau comandate? **20×40 + 100 = 900**.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

1) Fie un număr oarecare de zile, de exemplu **20**. Atunci, numărul de tractoare comandate ar fi în cele două situaţii:

– **20×20 + 100 = 500**;

– **20×23 – 20 = 440**.

Ipoteza este falsă, numărul de tractoare din cele două situaţii este diferit, diferenţa fiind **60**, căci **500 – 440 = 60**.

2) Considerăm un număr de zile *cu **1** mai mare* decât în ipoteza anterioară, adică **20 + 1 = 21**.

Atunci, numărul de tractoare în cele două situații ar fi:

– $21 \times 20 + 100 = 520$;

– $21 \times 23 - 20 = 463$.

Şi această ipoteză este falsă, numărul de tractoare este diferit, diferența fiind **57**, căci $520 - 463 = 57$.

Se constată că atunci când am mărit cu **1** numărul de zile din prima ipoteză, diferența s-a micşorat cu **3**, pentru că $60 - 57 = 3$.

Cu cât trebuie să măresc numărul de zile din prima ipoteză, ca diferența de **60** să dispară? Cu câtul dintre **60** şi **3**, adică cu **20**, pentru că $60 : 3 = 20$.

Deci, numărul de zile în care trebuia onorată comanda era de **40**, pentru că $20 + 20 = 40$.

Câte tractoare erau comandate? $40 \times 20 + 100 = 900$.

<u>Rezolvarea 4</u>

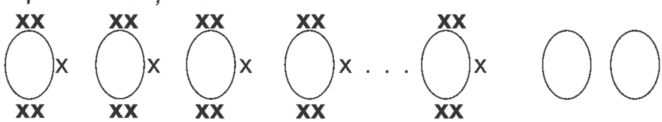
Fie y numărul de zile în care trebuie onorată comanda, atunci numărul de tractoare se poate scrie: $20y + 100 = 23y - 20 \Leftrightarrow y = 120 : 3 = 40$.

Numărul de tractoare: $20 \times 40 + 100 = 900$.

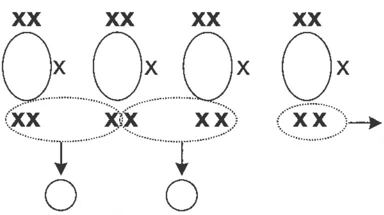
24. <u>Rezolvarea 1</u>

Dacă reprezentăm grafic o minge printr-un oval, iar un elev, printr-un **x**, putem ajunge la un astfel de desen:

În prima situație:

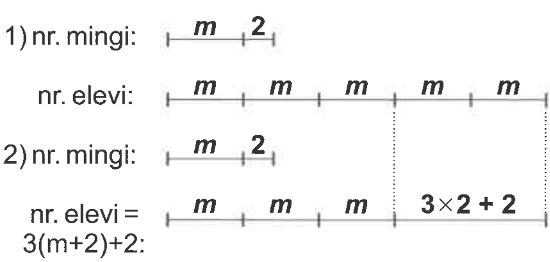


Încercăm să obținem situația a doua: de la fiecare minge "luăm" câte **2** elevi (ca să rămână câte **3**). Câți elevi redistribuim? Întâi cei **3** elevi pentru una dintre mingi nefolosite, apoi încă **3** pentru cealaltă minge nefolosită şi încă **2** elevi care, în situația a doua, rămân fără minge. Obținem situația a doua:



Celelalte figuri sunt în plus (căci nu pot avea corespondent în situația a doua). Câte mingi erau? $4 + 2 = 6$. Câți elevi erau? $6 \times 3 + 2 = 18 + 2 = 20$.

<u>Rezolvarea 2</u>



Din desen rezultă $2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$. Deci erau **6** mingi, căci $4 + 2 = 6$. Erau **20** elevi, deoarece $5\times4 = 20$ sau $3\times4 + 8 = 20$.

Rezolvarea 3

Notăm cu d numărul elevilor, cu m, numărul mingilor.

Din enunț rezultă: $d : 5 = m - 2$, iar $(d - 2) : 3 = m$.

Obținem: $d = 5(m-2) \Leftrightarrow d = 5m - 10$, iar $(5m - 10 - 2) : 3 = m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5m - 12 = 3m \Rightarrow m = 6$; $d = 5\times(6-2) \Rightarrow d = 20$.

25. Pornim de la situația a doua încercând să o obținem pe prima. Redistribuim cei **5** jucători de la ultimul panou (căci acolo ar mai fi trebuit **2** să fie **7**) şi încă **7**, pentru ca **2** panouri să rămână libere. Câți jucători mai punem la fiecare panou ($7 + ? = 10$)? $10 - 7 = 3$. La câte panouri mai distribuim câte **3**, adică la câte panouri ajung cei $5 + 7 = 12$ jucători? $12 : 3 = 4$. Vor fi deci **4** panouri cu câte **10** jucători, iar **2** panouri sunt libere. În total sunt $4 + 2 = 6$ panouri şi **40** jucători, căci $10\times4 = 40$ sau $5\times7 + 1\times5 = 40$. (Pentru alte soluții, a se vedea problemele **13 – 24** din acest capitol).

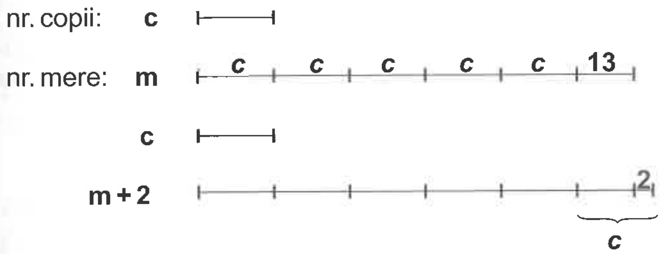
26. Aparent, problema este oarecum diferită de cele întâlnite mai sus. Totuşi dacă o reformulăm, este evident că analogia ne poate susține în rezolvarea problemei: "Un număr de mere se împarte unor copii. Dacă fiecăruia i s-ar da câte **5**, ar rămâne **13** mere, iar dacă fiecăruia i s-ar da câte **6** mere, un copil ar primi numai **4** mere".

Rezolvarea 1

Câte mere reîmpart în a doua variantă? Cele **13** mere care, în prima variantă, sunt în plus şi încă un măr, căci ultimul copil trebuie să aibă **4**, nu **5** mere (cum este în prima variantă). Deci: $13 + (5 - 4) = 14$. Câte mere mai dau la fiecare copil pentru a avea câte **6**? $6 - 5 = 1$. La câți copii pot da câte **1** din cele **14** mere? $14 : 1 = 14$. Deci sunt **14** copii cu câte **6** mere, iar un copil are **4** mere. Erau **15** copii, căci $14 + 1 = 15$. Au fost împărțite **88** mere, deoarece $14\times6 + 4 = 88$ sau $15\times5 + 13 = 88$.

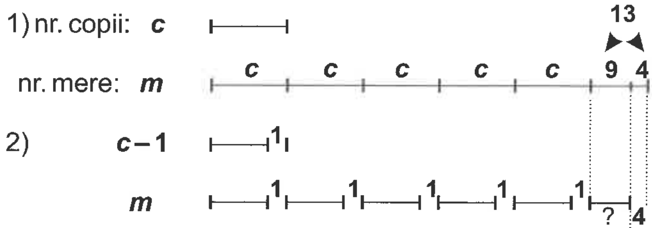
Rezolvarea 2. *Grafic, cu mai multe variante:*

a) Din prima parte a enunțului reformulat rezultă că numărul de mere este cu **13** mai mare decât de **5** ori numărul copiilor. Din a doua parte, rezultă că dacă am mări cu **2** numărul de mere, acesta ar fi de **6** ori mai mare decât numărul copiilor, adică:



Din desen rezultă că $13 + 2 = c$. Deci erau **15** copii şi $15\times5 + 13 = 88$ mere.

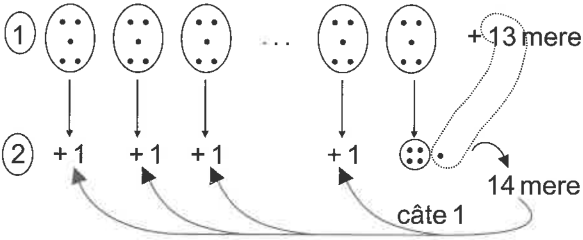
b) Dacă fiecărui copil i se dau întâi câte **5** mere, rămânând **13**, înseamnă că numărul merelor este de **5** ori mai mare decât numărul copiilor plus încă **13** mere. A doua oară, un copil primeşte numai **4** mere, nu **6**. Dacă din numărul copiilor scădem **1**, atunci numărul merelor este de **6** ori mai mare decât numărul (micşorat cu **1**) al copiilor, adică:



Din comparaţia celor două reprezentări ale numărului de mere, se observă că din cele **5** părţi din prima reprezentare se pot forma numai **5** părţi în a doua rerpezentare, dacă din fiecare parte se scade **1**. Trebuie să fie însă **6** asemenea părţi. Ultima parte se formează din $\mathbf{5 \times 1 + (13 - 4) = 14}$. Rezultă că a şasea parte din numărul de mere pe care l-am micşorat cu **4** este tocmai **14**. Câte mere erau? $\mathbf{6 \times 14 + 4 = 88}$ (mere). Câţi copii erau?

$\mathbf{14 + 1 = 15}$ sau $\mathbf{(88 - 4) : 6 + 1 = 15}$ (copii).

c) Fiecare copil primeşte mai întâi câte **5** mere, rămânând **13** mere, adică:



Erau **14** copii cu câte **6** mere, unul cu **4** mere sau **15** copii cu câte **5** mere, rămânând **13** mere.

Rezolvarea 3

Altă soluţie poate fi, păstrând notaţiile de mai sus: $m : c = 5$ (rest **13**) $\Rightarrow$ $\Rightarrow m = 5c + 13$; $m : (c - 1) = 6$ (rest **4**) $\Rightarrow m = 6(c - 1) + 4 \Rightarrow m = 6c - 2$. Rezultă: $5c + 13 = 6c - 2 \,/ + 2 \Rightarrow 5c + 15 = 6c \Rightarrow c = 15$; $m = 5 \cdot 15 + 13 = 88$.

27. Câte creioane reaşezăm pentru a obţine situaţia în care în fiecare cutie intră câte **10** creioane (prima variantă dată în enunţ)? Care creioane le reaşezăm? Creioanele din cele **6** cutii (care trebuie să rămână goale).

$\mathbf{6 \times 6 = 36}$. Câte creioane mai distribuim la fiecare cutie? $\mathbf{10 - 6 = 4}$.

Câte cutii vor avea câte **10** creioane? $\mathbf{36 : 4 = 9}$. Câte cutii erau?

$\mathbf{9 + 6 + 1 = 16}$. Câte creioane erau? $\mathbf{9 \times 10 + 3 = 93}$ sau $\mathbf{15 \times 6 + 3 = 93}$.

28. Pornind de la situaţia în care elevii se grupează câte **6**, încercăm să obţinem cealaltă distribuire. Luăm elevii din ultimele **15** rânduri pentru a-i distribui la rândurile din faţă (pentru a fi câte **9**). Câţi elevi redistribuim astfel? $\mathbf{15 \times 6 = 90}$. Câţi elevi mai adăugăm la fiecare rând, pentru a fi câte **9**?

$\mathbf{9 - 6 = 3}$. La câte rânduri mai adăugăm câte **3** din cei **90** de elevi?

$\mathbf{90 : 3 = 30}$. Câți elevi sunt? $\mathbf{30 \times 9 = 270}$ sau $\mathbf{(30 + 15) \times 6 = 270}$ (elevi).

Sau: Dacă numărul elevilor îl notăm cu d, iar numărul de rânduri cu c, putem scrie: $d : 6 = c \Rightarrow d = 6c$; $d : 9 = c - 15 \Rightarrow d = 9c - 135$.

Rezultă $9c - 135 = 6c \Rightarrow 3c = 135 \Rightarrow c = 45$, iar $d = 6 \cdot 45 \Leftrightarrow d = 270$.

29. Rezolvarea 1

Cei **725** lei sunt distribuiți în mod egal celorlalți participanți (pentru a fi încasați). Dacă fiecare elev va plăti **750** lei în loc de **725** lei, înseamnă că fiecare va plăti cu $\mathbf{750 - 725 = 25}$ lei mai mult. Dacă fiecare elev va plăti mai mult cu **25** lei, atunci de la câți elevi se adună suma de **725** lei (câți elevi au plecat cu vaporașul)? $\mathbf{725 : 25 = 29}$ (elevi). Ce sumă trebuia să se plătească în total? $\mathbf{29 \times 750 = 21\,750}$ (lei) sau $\mathbf{(29 + 1) \times 725 = 21\,750}$ (lei).

Rezolvarea 2

Notăm cu d suma totală de bani, cu c numărul inițial de elevi din grup. Rezultă: $d : 725 = c \Rightarrow c = 725c$; $d : 750 = c - 1 \Rightarrow d = 750c - 750$. Atunci $750c - 750 = 725c \Rightarrow 25c = 750 \Rightarrow c = 30$.

Au plecat $\mathbf{30 - 1 = 29}$ elevi, iar suma totală era de $\mathbf{29 \times 750 = 21\,750}$ lei.

30. a) Din $d = 13c + 12$ și $d = 17c$, rezultă: $13c + 12 = 17c \Rightarrow 4c = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 3$, iar $d = 17 \times 3 \Leftrightarrow d = 51$.

b) Din $d = 37c + 26$ și $d = 41c + 2$, rezultă $37c + 26 = 41c + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 37c + 24 = 41c \Leftrightarrow 4c = 24 \Rightarrow c = 6$, iar $d = 41 \times 6 + 2 \Rightarrow d = 248$.

Problemele pot fi:

a) Dacă dau câte **13** mere fiecărui copil, îmi rămân **12** mere, iar dacă dau câte **17** mere, nu mai rămâne nici un măr. Câte mere și câți copii sunt?

b) Dacă cumpăr creioane de câte **37** lei, îmi rămân **26** lei, iar dacă un creion ar costa **41** lei, mi-ar rămâne **2** lei. Ce sumă de bani am și câte creioane vreau să cumpăr?

31. Plecând de la situația constituirii perechilor (prima variantă), regrupăm cele **6** lalele fără pereche plus cele $\mathbf{2 \times 1 = 2}$ lalele de la cei **2** trandafiri ce rămân negrupați și obținem situația a doua. Câte lalele regrupăm pentru a obține situația a doua? $\mathbf{6 + 2 \times 1 = 8}$ (lalele). Câte lalele mai adăugăm la fiecare pereche (*o* lalea plus *un* trandafir) pentru a obține o grupă din situația a doua (un trandafir plus **2** lalele)? $\mathbf{2 - 1 = 1}$ (lalea). La câte grupe mai adăugăm câte o lalea din cele **8**? $\mathbf{8 : 1 = 8}$ (grupe). Câți trandafiri erau? $\mathbf{8 \times 1 + 2 = 10}$. Câte lalele erau? $\mathbf{8 \times 2 = 16}$ (lalele) sau $\mathbf{10 \times 1 + 6 = 16}$ (lalele).

32. Pentru mai multe soluții, a se vedea problemele **7** și **12** din acest capitol. În formulă numerică, rezolvarea este:

$\mathbf{10 - [(8 \times 3 - 10) : (3 + 4)] = 10 - 2 = 8}$ (probleme rezolvate).

33. Se observă că același număr de probleme este rezolvat în perioade de timp diferite.

Când lucrează câte n probleme pe zi, Andrei are nevoie de **5** zile mai mult, pentru că $\mathbf{20 - 15 = 5}$.

Reprezentarea grafică:

Când lucrează
câte *n* pe zi

$$\underbrace{n\quad n\quad n\quad n\quad \dots\quad n}_{15}\quad \underbrace{n\quad n\quad n\quad n\quad n}_{5}\ /\text{adică } 20n$$

Când lucrează
câte *n* + 3 pe zi

$$\underbrace{n+3\quad n+3\quad n+3\quad n+3\quad \dots\quad n+3}_{15}\quad \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_$$

În varianta a doua, în fiecare din cele **15** zile, el rezolvă cu **3** probleme mai mult decât în fiecare din cele **15** zile din prima variantă.

Câte probleme rezolvă în plus în cele **15** zile? $\mathbf{15\times3=45}$. Aceste **45** de probleme, când le rezolvă în prima variantă? În cele **5** zile de până la **20**. Câte probleme rezolvă Andrei într-o zi? $\mathbf{45:5=9}$. Dar în varianta a doua?

$\mathbf{9+3=12}$. Câte probleme avea de rezolvat Andrei? $\mathbf{20\times9=180}$ sau $\mathbf{12\times15=180}$.

O altă variantă a raționamentului de mai sus:

Vrând ... să nu obosească, Andrei alege varianta I, când trebuie să rezolve câte ***n*** probleme pe zi şi să le termine în **20** de zile. Atunci, el ia câte **3** probleme din primele **15** zile şi le programează în ultimele **5** zile. Câte probleme replanifică? $\mathbf{15\times3=45}$. Câte probleme programează pentru fiecare din ultimele **5** zile (sau: Câte probleme rezolvă în fiecare zi)? $\mathbf{45:5=9}$. Câte probleme avea de rezolvat Andrei? $\mathbf{9\times20=180}$.

Rezolvarea 2. *Prin falsă ipoteză*

Fiind acelaşi număr de probleme, putem judeca şi astfel:

Ipoteza I

Presupunem că Andrei a rezolvat un număr oarecare de probleme, de exemplu, ***15** pe zi*. Atunci numărul total ar fi:

- când rezolvă câte **15** pe zi, în **20** de zile ar rezolva **300** de probleme, pentru că $\mathbf{20\times15=300}$;
- când rezolvă câte **18** pe zi, adică $\mathbf{15+3=18}$, în **15** zile ar rezolva **270** de probleme, căci $\mathbf{15\times18=270}$.

Ipoteza este falsă, numărul total de probleme este diferit în cele două situații, diferența de probleme fiind de **30**, pentru că $\mathbf{300-270=30}$.

Ipoteza a II-a

Presupunem că Andrei a rezolvat pe zi cu **1** problemă mai puțin decât în ipoteza anterioară. Deci, **14** probleme pe zi. Atunci, numărul total de probleme, în cele două situații, ar fi:

- $\mathbf{20\times14=280}$;
- $\mathbf{15\times(14+3)=255}$.

Şi această ipoteză este falsă, pentru că numărul total de probleme este diferit în cele două situații, diferența fiind **25**, căci $\mathbf{280-255=25}$. Se constată însă că atunci când *am micşorat cu **1*** numărul de probleme rezolvate într-o zi, diferența dintre numerele ce reprezentau diferențele dintre numerele de probleme *a scăzut* cu **5**, fiincă $\mathbf{30-25=5}$. Pentru ca diferența din prima ipoteză să dispară, cu cât trebuie să micşorăm numărul de probleme dintr-o zi din aceeaşi ipoteză? Cu câtul dintre **30** şi **5**, adică cu **6**, pentru că **30 : 5 = 6**. Rezultă că numărul de probleme rezolvate de Andrei într-o zi, în prima ipoteză, este **9**, pentru că **15 – 6 = 9**. Numărul total de probleme este **180**, deoarece $\mathbf{20 \times 9 = 180}$.

Rezolvarea 3

Notând cu ***y*** numărul de probleme pe care le rezolvă Andrei într-o zi, se poate scrie: $\mathbf{20y = (y+3) \times 15 / -15y \Leftrightarrow 5y = 45 \Leftrightarrow y = 9}$.

Numărul total de probleme: $\mathbf{20 \times 9 = 180}$.

34. a) Câţi lei sunt într-o grupare alcătuită din două monede diferite? **3 + 5 = 8**. Câte grupări de câte **8** lei sunt în **40** lei? **40 : 8 = 5**. Deci sunt **5** monede de **3** lei şi **5** monede de câte **5** lei. Câţi lei sunt în monedele de **3** lei? $\mathbf{5 \times 3 = 15}$. Câţi lei sunt în monedele de **5** lei? $\mathbf{5 \times 5 = 25}$.

b) Rezolvarea 1

Câţi lei sunt într-o grupare alcătuită din trei monede diferite? **3 + 1 + 0,25 = 4,25** (lei). Câte grupe de câte **4,25** lei se pot forma din **50** lei? **50 : 4,25 = 11**, rest **3,25**. Până aici putem spune că sunt:

11 de câte **3** lei = **33** (lei)
11 de câte **1** leu = **11** (lei)
11 de câte **0,25** lei = **2,75** (lei).

Câte monede ar fi? $\mathbf{3 \times 11 = 33}$. Câţi lei? **33 + 11 + 2, 75 = 46, 75** (lei).

Pentru că sunt prea puţine monede, şi acei **3,25** îi considerăm în monede de câte **25** de bani; deci vor fi încă **13** monede de câte **25** de bani, pentru că **3,25 : 0,25 = 13**. Ar fi: $\mathbf{11 \times 3 = 33}$; $\mathbf{11 \times 1 = 11}$; $\mathbf{24 \times 0,25 = 6}$, adică **50** de lei, dar numai **46** de monede. Pentru a se păstra valoarea de **50** de lei şi pentru a obţine încă **4** monede în plus, observăm că dacă înlocuim o monedă de **3** lei cu câte **3** de **1** leu, numărul total de monede se măreşte cu **2** monede. La **2** înlocuiri de acest fel, vom mai câştiga **4** monede, tocmai atâtea câte lipseau din totalul anterior. Deci: **9** monede de câte **3** lei, **17** de câte **1** leu, **24** monede de câte **0,25** lei.

Alte soluţii: **6** de câte **3** lei, **28** de câte **1** leu, **16** de câte **0,25** lei; **3** de câte **3** lei, **39** de câte **1** leu, **8** de câte **0,25** lei; **12** de câte **3** lei, **6** de câte **1** leu, **32** de câte **0,25** lei.

Rezolvarea 2

Observăm că putem avea o regulă care ne poate coordona căutările: în suma de **50** lei, care este un număr natural, numărul monedelor de câte **0,25** lei trebuie să fie multiplu de **4**, adică: **4**; **8**; **12**; **16**; **20**; **24**; **...**; **48**.

De aici, se pot formula **2** ipoteze succesive:

1) Presupun că sunt **8** monede de câte **0,25** lei, cu o valoare totală de **2** lei. Restul de **48** lei va fi compus din monede de câte **3** lei şi de câte **1** leu, în total **42** de astfel de monede.
2) Presupun că în cele **42** de monede ar fi numai monede de câte **1** leu. Ce sumă ar fi? $\mathbf{42 \times 1 = 42}$. Câţi lei lipsesc? **48 – 42 = 6**.
Înlocuim câte o monedă de **1** leu din ipoteza noastră cu câte o monedă de **3** lei, până dispare diferenţa de **6** lei. Câte înlocuiri vom face tot atâtea monede de **3** lei vor fi, adică: **6 : (3 – 1) = 3**. Câte monede de **1** leu ar fi? **42 – 3 = 39**. Deci: **3** de câte **3** lei, **39** de câte **1** leu, **8** de câte **0,25** lei.

Asemănător se găsesc şi celelalte soluţii.

Rezolvarea 3

Notând cu x numărul monedelor de **3** lei, cu y numărul monedelor de **5** lei, cu z numărul monedelor de **0,25** lei, se pot scrie: $x+y+z=50$ şi $3x+y+0{,}25z=50$.

Deoarece există **2** relaţii şi **3** mărimi, rezultă că sunt mai multe soluţii.

Prin înmulţirea cu **4** a fiecărui membru din egalitatea a doua, se obţine:

$12x+4y+z=200$. Din enunţ rezultă:

$x+y+z=50$. Scăzând membru cu membru, se obţine:

$11x+3y=150 \Leftrightarrow 11x=150-3y \Leftrightarrow x=3(50-y):11$.

Deoarece $x \neq 0$, rezultă $50-y$ este divizibil prin **11**, adică:

$50-y \in \{11, 22, 33, 44\}$.

Dacă $y=39$, atunci $x=3$, iar $z=8$; dacă $y=28$, atunci $x=6$, iar $z=16$; dacă $y=17$, atunci $x=9$, iar $z=14$; dacă $y=6$, atunci $x=9$, iar $z=32$.

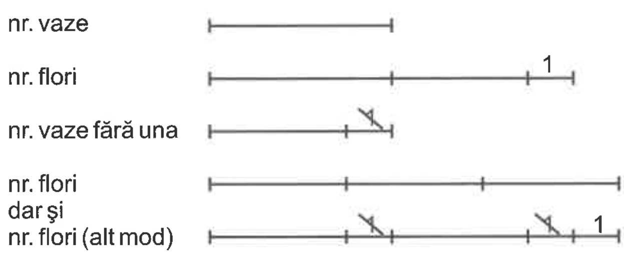
Observaţie:

Pentru problemele de tipul: **13**, **14**, **15** etc., din acest capitol, cu numere mici, *reprezentarea grafică* poate fi realizată într-un mod asemănător ca în problemele de diferenţă şi dublu raport.

(Comparaţi cu soluţiile de la problemele **26** şi **27** - capitolul al **IV**-lea!)

De exemplu:

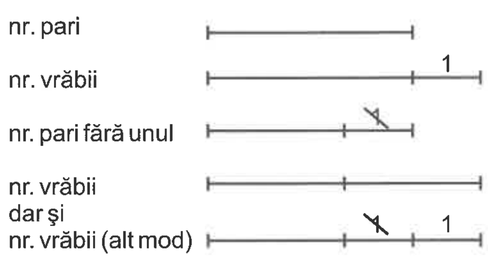
*– la problema **13**, din capitolul al **VI**-lea:*



Din compararea ultimelor două reprezentări, rezultă că **3** reprezintă o treime din numărul de flori.

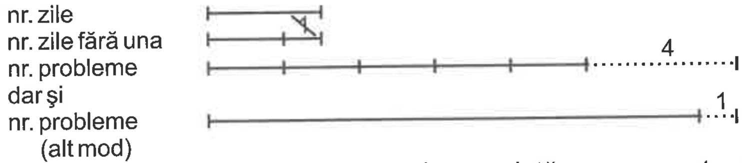
Deci, erau **9** flori, căci $3 \times 3 = 9$ şi **4** vaze, căci $3 + 1 = 4$;

*– la problema **14**, din acest capitol:*



Din compararea ultimelor două reprezentări, rezultă că **2** reprezintă jumătate din numărul vrăbiilor, deci erau **4** vrăbii şi **3** pari;

– *la problema* ***15****, din acest capitol:*



Se observă că **4 – 1 = 3** (probleme) reprezintă a şasea parte din numărul de probleme pe care le rezolvă Oana până în ultima zi, în a doua variantă de lucru.

Câte probleme avea de rezolvat Oana? **6×3 + 1 = 19** (probleme) sau **5×3 + 1 = 19** (probleme) etc.

CAPITOLUL AL VII-LEA

Probleme care se rezolvă prin metoda comparației, probleme de reducere la unitate. Rezolvări

1. Rezolvarea 1. (*Comparație, înlocuire pe baza raportului*)

Considerăm că se cumpără numai penare. Dacă un stilou costă cât **3** penare, atunci cu banii de pe **8** stilouri se pot lua **24** de penare, pentru că **8×3 = 24**. Dar cu suma totală, câte penare se pot cumpăra? **24 + 5 = 29**. Câți lei costă un penar? **2 320 : 29 = 80**. Câți lei costă un stilou? **80×3 = 240**. *Verificare*: **8×240 + 5×80 = 2 120**; **240 : 80 = 3**.

Rezolvarea 2

Considerăm că s-au cumpărat numai stilouri. Putem lucra în *două variante*:

a) din egalitatea dată obținem o nouă egalitate, în care numărul de penare să se împartă exact la **3** (multiplu de **3**). De ce? Pentru a proceda la înlocuire pe baza raportului: **1** stilou cât **3** penare. Deci: **8** stilouri şi **5** penare costă **2 320** lei / ×**3** ⇔ **24** stilouri şi **15** penare costă **6 960** lei. În loc de **15** penare se pot cumpăra **5** stilouri, pentru că **15 : 3 = 5**, adică:

15 penare

3 3 3 3 3 (5 grupe de câte 3 penare)

1 1 1 1 1 (5 stilouri)

Câți lei costă un stilou? **6 960 : (24 + 5) = 240**. Un penar: **80** lei.

b) Cu banii de pe un penar se poate cumpăra doar o treime de stilou; în loc de **5** penare se pot cumpăra **5** treimi de stilou. Cu suma de **2 320** lei se pot cumpăra **29** de treimi de stilou (adică: $8 + \frac{5}{3} = \frac{29}{3}$). Cât costă o treime de stilou (adică un penar)? **2 320 : 29 = 80** lei.

Câți lei costă un stilou? **3×80 = 240** lei.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

(Se poate şi aici, pentru că un termen al raportului este **1**). Presupunem că un penar costă **1** leu, atunci un stilou ar costa **3** lei, iar împreună **4** lei; dar nu avem suma pentru **2** obiecte diferite, ci pentru mai multe şi anume: **8×3 + + 5×1 = 29**. Dar cumpărăturile au costat **2 320** lei. De câte ori mai mult decât am presupus noi? **232 : 29 = 80**. Înseamnă că penarul nu a costat **1** leu, ci de **80** de ori mai mult, adică **80** lei, căci **80×1 = 80**, iar stiloul de **80** de ori mai mult decât **3** lei, adică **240** lei, deoarece **80×3 = 240**.

Rezolvarea 4

Notăm prețul penarului cu z, atunci prețul stiloului este $3z$.

Se poate scrie egalitatea: $8 \times 3z + 5z = 2\,320 \Leftrightarrow 29z = 2\,320$;

$z = 2\,320 : 29 = 80$; $3z = 3 \times 80 = 240$ (prețul stiloului).

2. (*Înlocuire pe baza diferenței*)

Rezolvarea 1

Dacă pentru **3** stilouri s-au plătit cu **31** ruble mai mult decât pe **2** pixuri, rezultă că în loc de **3** stilouri putem lua **2** pixuri şi mai rămân **31** de ruble. Deci: valoarea a **2** pixuri plus **31** ruble plus valoarea a **5** pixuri reprezintă **80** de ruble. Rezultă că **7** pixuri costă **49** de ruble, căci $\mathbf{80 - 31 = 49}$. Cât costă **1** pix? $\mathbf{49 : 7 = 7}$ (ruble). Cât costă un stilou? $\mathbf{(80 - 7 \times 5) : 3 = 15}$ (ruble).

Rezolvarea 2

Încercăm să înlocuim pixurile prin stilouri. Sunt **2** variante:

a) deoarece numărul **5** din enunț nu se împarte exact la **2**, nu putem face grupe de **2** pixuri, pe care să le înlocuim cu grupe de câte **3** stilouri; modificăm prima egalitate pentru a obține în loc de **5** pixuri un multiplu de **2**, adică:

3 stilouri şi **5** pixuri costă **80** de ruble $/\times\mathbf{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **6** stilouri şi **10** pixuri costă **160** ruble

Dacă pentru a lua **3** stilouri, la prețul a **2** pixuri trebuie să mai adăugăm **31** ruble, în loc de **10** pixuri se pot lua **15** stilouri, dacă se mai adaugă **155** ruble, căci $\mathbf{5 \times 31 = 155}$; atunci, **6** stilouri + **15** stilouri costă **155** ruble + **160** ruble, adică **21** de stilouri costă **315** ruble. Cât costă un stilou? $\mathbf{325 : 21 = 15}$ (ruble). Cât costă un pix? $\mathbf{(80 - 3 \times 15) : 5 = 7}$ (ruble).

b) dacă **2** pixuri costă cât **3** stilouri minus **31** de ruble, atunci **1** pix va costa de **2** ori mai puțin, adică **1** pix costă cât $\mathbf{\frac{3}{2}}$ din valoarea unui stilou minus $\mathbf{\frac{31}{2}}$ ruble, iar **5** pixuri costă cât $\mathbf{\frac{15}{2}}$ stilouri minus $\mathbf{\frac{155}{2}}$ ruble. Înlocuind în prima egalitate ce rezultă din enunț, obținem: **21** de stilouri costă **315** ruble. Un stilou costă **15** ruble, iar un pix costă **7** ruble.

Rezolvarea 3

Notăm cu ***a*** prețul unui stilou şi cu ***b*** prețul unui pix. Se pot scrie relațiile: $\mathbf{3a + 5b = 80}$ şi $\mathbf{3a = 2b + 31}$. Înlocuind pe $\mathbf{3a}$ în prima relație, rezultă $\mathbf{2b + 31 + 5b = 80 \Leftrightarrow 7b = 49 \Leftrightarrow b = 49 : 7 = 7; a = 15}$.

3. (*Înlocuire pe baza raportului*)

Rezolvarea 1

În loc de **2** cărți se pot lua **3** registre. Dar numărul cărților din suma dată, **3**, nu se împarte exact la **2**.

Sunt două variante de lucru:

a) prin amplificarea cu **2** a celei de-a doua relații, obținem o altă relație echivalentă, adică:

3 cărți şi **5** registre costă **304** lei $/\times\mathbf{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **6** cărți şi **10** registre costă **608** lei.

În loc de **6** cărți se pot cumpăra **9** registre, deoarece $\mathbf{6 : 2 \times 3 = 9}$.

Cu suma de **608** lei se pot cumpăra **19** registre, pentru că $\mathbf{9 + 10 = 19}$.

Câți lei costă un registru? $\mathbf{608 : 19 = 32}$ (lei).

Câți lei costă o carte? $\mathbf{32 \times 3 : 2 = 48}$ (lei).

b) dacă în loc de **2** cărți se pot cumpăra **3** registre, atunci în loc de o carte se vor lua un registru şi jumătate, iar în loc de cele **3** cărți se vor cumpăra **4** registre şi jumătate. Cu suma de **304** lei se pot cumpăra **9** registre şi jumătate. Un registru costă **32** de lei, căci **304 : 19×2 = 32**. O carte costă **48** de lei.

Rezolvarea 2

În loc de **3** registre se pot cumpăra **2** cărți. Pentru că numărul de registre din sumă, **5**, nu se împarte exact la **3**, prin amplificare, înlocuim suma printr-o altă sumă echivalentă, adică:

3 cărți şi **5** registre costă **304** lei /×**3** ⇔

⇔ **9** cărți şi **15** registre costă **912** lei.

În loc de **15** registre se pot cumpăra **10** cărți, pentru că: în **15** sunt **5** grupe de câte **3**; fiecare grupă de câte **3** registre poate fi înlocuită cu câte **2** cărți, iar **5×2 = 10**. Cu suma de **912** lei se pot cumpăra **19** cărți, căci **9 + 10 = 19**.

Câți lei costă o carte? **912 : 19 = 48** (lei).

Câți lei costă un registru? **2×48 : 3 = 32** (lei).

Sau, lucrând cu fracții:

Dacă **3** registre costă cât **2** cărți, atunci **1** registru costă cât **2** treimi din prețul unei cărți; **5** registre costă cât **10** treimi de carte; cu suma de **304** lei se pot cumpăra **19** treimi de carte.

O carte costă **48** de lei, pentru că **304 : 19×3 = 48** (lei).

Un registru costă **32** lei, deoarece **48 : 3×2 = 32**.

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Dacă **2** cărți costă cât **3** registre, atunci o carte costă cât un registru şi jumătate. Presupunem că **1** registru ar costa **1** leu, atunci o carte ar costa **1, 50** lei. Mărfurile cumpărate (**3** cărți şi **5** registre) ar costa **9, 50** lei. De câte ori este mai mică această sumă față de cea plătită? **304 : 9,50 = 32**. Rezultă că **1** registru a costat **32** de lei, căci **32×1 = 32**, iar o carte a costat **48** de lei căci **32×1,50 = 48**.

Rezolvarea 4

Notăm cu a prețul unei cărți şi cu b prețul unui registru, se pot scrie relațiile: $2a = 3b$ şi $3a + 5b = 304$. Din prima relație rezultă: $a = \frac{3b}{2}$. Înlocuind în a doua relație, obținem: $\frac{9b}{2} + 5b = 304 \Leftrightarrow 9b + 10b = 608 \Leftrightarrow b = 608 : 19 = 32$; $a = 3\times 32 : 2 = 48$.

4. Rezolvarea 1

Dacă **1** m de tifon costă cât **4** metri de sfoară, înseamnă că în loc de **7** m de tifon putem cumpăra **28** m de sfoară, căci **7×4 = 28**.

Cu suma de **272** lei se pot cumpăra **34** m de sfoară, căci **28 + 6 = 34**.

Câți lei costă **1** m de sfoară? **272 : 34 = 8** (lei).

Câți lei costă **1** m de tifon? **4×8 = 32** (lei).

Câți lei costă **7** m de tifon? **7×32 = 224** (lei).

Câți lei costă **6** m de sfoară? **6×8 = 48** (lei).

Rezolvarea 2

Dacă **4** m de sfoară costă cât **1** m de tifon, transformăm suma într-o egalitate echivalentă, prin amplificare cu **2**, astfel ca numărul care exprimă lungimea sforii să fie multiplu de **4**, adică:

7 m de tifon şi **6** m sfoară costă **272** lei /×**2** ⇔

⇔ **14** m de tifon şi **12** m sfoară costă **544** lei.

Înlocuim **12** m de sfoară prin **3** m de tifon, pentru că **12 : 4 = 3**. Cu **544** lei se pot cumpăra **17** m de tifon, căci **14 + 3 = 17**.

Câți lei costă **1** m de tifon? **544 : 17 = 32** (lei).

Câți lei costă **1** m de sfoară? **32 : 4 = 8** (lei).

Sau, lucrând cu fracții:

Dacă **4** m de sfoară costă cât **1** m de tifon, un singur m de sfoară costă cât o pătrime dintr-un m de tifon. În loc de **6** m de sfoară se pot lua **6** pătrimi m de tifon. Cu suma **272** lei se pot cumpăra **34** pătrimi m de tifon, pentru că

$$7+\frac{6}{4}=\frac{34}{4}.$$

Câți lei costă **1** m de tifon? **272 : 34×4 = 32** (lei).

Câți lei costă **1** m de sfoară? **32 : 4 = 8** (lei).

Rezolvarea 3. *Prin falsă ipoteză*

Presupunem că **1** m de sfoară ar costa **1** leu, atunci **1** m de tifon ar costa **4** lei. Mărfurile cumpărate ar costa **34** de lei, pentru că **7×4 + 6×1 = 34**. De câte ori este mai mare suma cheltuită față de **34**? **272 : 34 = 8**. Rezultă că **1** m de sfoară nu costă **1** leu, ci de **8** ori mai mult, adică **8×1 = 8** (lei), iar **1** m de tifon costă **32** de lei, căci **8×4 = 32**.

Răspuns: **7** m de tifon costă **224** lei, iar **6** m de sfoară costă **48** de lei.

Rezolvarea 4

Notăm cu ***y*** prețul unui m de sfoară şi cu **4*y*** prețul unui m de tifon, obținem: $28y+6y=272 \Leftrightarrow 34y=272;\ y=8;\ 4y=32$.

5. Rezolvarea 1

Dacă **1** m de stofă este de **4** ori mai scump decât **1** m de tergal, în loc de **5** m de stofă se pot cumpăra **20** m de tergal, pentru că **5×4 = 20**. Cu **9 775** lei se pot cumpăra **23** m de tergal, căci **20 + 3 = 23**. Cât costă **1** m de tergal? **9 777 : 23 = 425** (lei). Cât costă **1** m de stofă? **425×4 = 1 700** (lei). După modelul de la problema anterioară, încercați celelalte variante de rezolvare!

Răspuns: **1** m de tergal costă **425** lei, iar **1** m de stofă costă **1 700** lei.

6. (*Înlocuire prin grupe de obiecte*)

Din datele problemei rezultă că la o *singură pereche de pantofi* s-au vândut **3** perechi de sandale.

Folosind această relație, formăm grupe, având grijă ca fiecare grupă să cuprindă **3** perechi de sandale şi o pereche de pantofi. Câți lei costă mărfurile dintr-o astfel de grupă? **270×3 + 524×1 = 1 334** (lei). Câte grupe cu valoarea de **1 334** lei se pot forma din **20 010** lei? Atâtea, de câte ori **1 334** se cuprinde în **20 010**, adică **20 010 : 1 334 = 15** (grupe). Înseamnă că s-au vândut **15** perechi de pantofi, fiindcă **15×1 = 15**, iar sandale, **45** de perechi, deoarece **15×3 = 45**.

Verificare: **45×270 + 15×524 = 12 150 + 7 860 = 20 010; 45 : 15 = 3.**

Rezolvarea 4

Notând cu ***y*** numărul perechilor de pantofi şi cu **3*y*** numărul perechilor de sandale, rezultă: $810y+524y=20\,010 \Rightarrow y=15;\ 3y=45$.

7. (Asemănătoare cu cea anterioară)

Analizând afirmațiile din enunț, se constată că la **1** m de stofă de calitaea a III-a, se iau, pentru a se respecta raportul dat, **2** m de stofă de calitatea a II-a şi **3** m de calitatea I.

Câţi lei se încasează pe stofa dintr-o astfel de grupă? **1×675 + 2×** **×1 250 + 3×1 720 = 8 335** (lei). Pentru a se consuma suma de **33 340** lei, rebuie să formăm mai multe astfel de grupe. Câte grupe se pot forma?

Atâtea, de câte ori suma de **8 335** se cuprinde în **33 340**, adică **33 340 : 8 335 = 4** (grupe). Cele **4** grupe cuprind **4** m de stofă de calitatea a III-a, **8** m de calitatea a II-a, pentru că **4×2 = 8** şi **12** m de stofă de calitatea I, căci **4×3 = 12**. *Verificare*:

12×1 720 + 8×1 250 + 4×675 = 20 640 + 10 000 + 2 700 = 33 340 (lei).

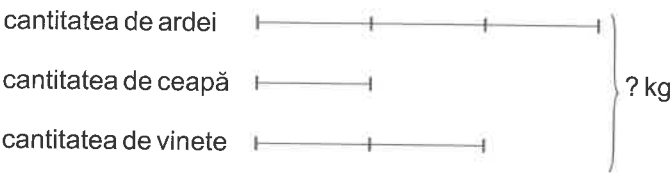
Rezolvarea 2

Notând cu ***y*** lungimea bucăţii a treia, atunci lungimea bucăţii a doua va fi ***2y***, iar a primei bucăţi, **3*y***. Rezultă:

$720\times3y + 1\,250\times2y + 625y = 33\,340 \Leftrightarrow 5\,160y + 2\,500y + 625y = 33\,340 \Leftrightarrow$
$\Rightarrow 8\,335y = 33\,340 \Leftrightarrow y = 33\,340 : 8\,335 = 4;\ 2y = 8;\ 3y = 12.$

. (Asemănătoare cu problemele **6** şi **7**)

Putem să apelăm şi la metoda grafică: figurăm într-un desen *cantităţile* cumpărate de tata, observăm că sunt **3** părţi ce reprezintă cantitatea de ardei, o parte cantitatea de ceapă, **2** părţi ce reprezintă cantitatea de vinete, adică:



Nu cunoaştem cantitatea totală de legume (aceasta este cerinţa), iar preţurile unitare sunt diferite.

Singura soluţie este să organizăm suma totală în grupe formate din sume care să respecte raportul dat în problemă, corespunzător cantităţilor.

Câţi lei valorează o grupă formată dintr-un kg de ceapă, **2** kg de vinete şi kg de ardei? **1×30 + 2×60 + 3×50 = 300** (lei).

Câte astfel de grupe se pot forma cu suma de **600** lei? **600 : 300 = 2**. eci, tata a cumpărat **2** kg de ceapă, căci **2×1 = 2**, **4** kg de vinete, deoarece **×2 = 4** şi **6** kg de ardei, pentru că **2×3 = 6**.

Rezolvarea 2

Notând cantitatea de ceapă cu ***y***, atunci cantitatea de vinete este **2*y***, ea de ardei, **3*y***.

Rezultă: $30y + 120y + 150y = 600 \Leftrightarrow y = 600 : 300 = 2;\ 2y = 4;\ 3y = 6.$

Rezolvarea 1

Din enunţ rezultă că preţul pentru **3** trandafiri este egal cu preţul pentru lalele.

Ne imaginăm faptul că Ionela a cumpărat **3** trandafiri, dar se răzgândeş-. Îi cere vânzătoarei ca în loc de cei **3** trandafiri să îi dea **3** lalele. Dar ebuie să primească şi bani înapoi, pentru că un trandafir este mai scump ecât o lalea cu **6** lei, iar **3** lalele sunt mai ieftine cu **18** lei decât **3** trandafiri, deoarece $3 \times 6 = 18$.

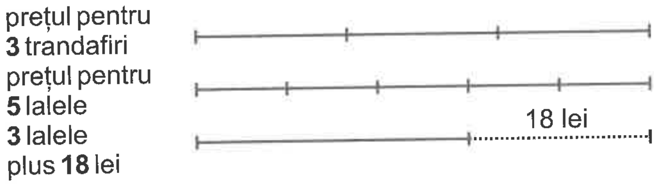
Va primi înapoi **18** lei, banii pentru **2** lalele, pentru că ea putea lua, cu aceeaşi sumă, **5** lalele, iar $5 - 3 = 2$. Deci, **2** lalele costă **18** lei, iar o lalea costă **9** lei, deoarece $18 : 2 = 9$, iar un trandafir costă **15** lei, căci $9 + 6 = 15$.

Câți lei avea Ionela? $9 \times 5 = 45$ sau $3 \times 15 = 45$.

Rezolvarea 2

Dacă un trandafir costă mai mult decât o lalea cu **6** lei, atunci **3** trandafiri costă mai mult decât **3** lalele cu **18** lei, pentru că $3 \times 6 = 18$.

Rezultă reprezentarea grafică:



Din ultimele două reprezentări, se observă că diferența de **18** lei reprezintă costul pentru **2** lalele, căci cu prețul pentru **5** lalele se pot cumpăra **3** lalele şi mai rămân **18** lei. Câți lei costă o lalea? $18 : 2 = 9$ (lei).

Câți lei avea Ionela? $5 \times 9 = 45$ (lei).

Rezolvarea 3

Notând cu t prețul unui trandafir şi cu b, cel al unei lalele, putem scrie: $3t = 5b$. În cei doi membri ai egalității, factorii cunoscuți sunt numere prime între ele.

Rezultă că, pentru a se păstra egalitatea, t trebuie să fie un multiplu de **5**, iar b, un multiplu de **3**, adică $3 \times t = 5 \times b$.

Dacă $t = 5$ şi $b = 3$, $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$, dar $5 - 3 \neq 6$.
Dacă $t = 10$ şi $b = 6$, $3 \times 10 = 5 \times 6$, dar $10 - 6 \neq 6$.
Dacă $t = 15$ şi $b = 9$, $3 \times 15 = 5 \times 9$, iar $15 - 9 = 6$.
Deci, $t = 15$, iar $b = 9$.

Rezolvarea 4

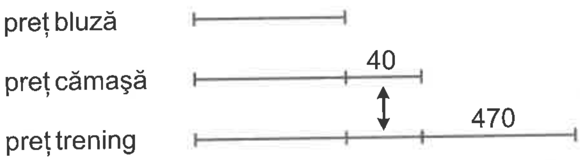
Notând cu a prețul unei lalele, cu $a + 6$, prețul unui trandafir, rezultă:
$3(a + 6) = 5a \Leftrightarrow 2a = 18 \Leftrightarrow a = 9$; $a + 6 = 9 + 6 = 15$.
Suma totală era **45** de lei, căci $5 \times 9 = 45$.

10. (*Înlocuire pe baza diferenței, **3** mărimi*)

Rezolvarea 1

Considerăm că se cumpără numai bluze.

Dacă privim reprezentarea grafică:



Observăm că, pentru a cumpăra o bluză, din prețul cămăşii rămân **40** de lei, iar din prețul treningului, **510** lei, căci $470 + 40 = 510$.

Atunci, modificările în suma totală ar fi: în loc de **2** cămăşi se pot lua **2** bluze, dar mai rămân **80** de lei, căci $2 \times 40 = 80$; în loc de **3** treninguri se pot lua **3** bluze, dar mai rămân **1 530** lei, fiindcă $3 \times 510 = 1\,530$.

Sumele rămase trebuie scăzute din suma totală.

Deci: **10** bluze (adică **5 + 2 + 3**) costă **4500** lei, căci $6\,110 - 80 - 1\,530 = 4\,500$.

Cât costă o bluză? $4\,500 : 10 = 450$ (lei). Dar **5** bluze? $5 \times 450 = 2\,250$ (lei).
Cât costă o cămaşă? $450 + 40 = 490$ (lei). Dar **2** cămăşi? $2 \times 490 = 980$ (lei).
Cât costă un trening? $490 + 470 = 960$ (lei). Dar **3** treninguri? $3 \times 960 = 2\,880$ (lei).

Rezolvarea 2

Considerăm că se cumpără numai cămăşi. În loc de **1** trening se poate cumpăra o cămaşă, dar mai rămân **470** lei. În loc de **3** treninguri se pot lua **3** cămăşi, dar mai rămân **1 410** lei, căci $3 \times 470 = 1\,410$.

În loc de o bluză, se poate cumpăra o cămaşă, dacă la suma totală se mai adaugă **40** de lei. În loc de **5** bluze se pot cumpăra **5** cămăşi, dacă la suma totală se mai adaugă **200** de lei, fiindcă $5 \times 40 = 200$.

Dacă s-ar cumpăra numai cămăşi, preţul total ar fi **4 900** lei, deoarece $6\,110 - 1\,420 + 200 = 4\,900$. Cu **4 900** lei se pot cumpăra **10** cămăşi, căci $3 + 2 + 5 = 10$. Cât costă o cămaşă? $4900 : 10 = 490$ (lei). Dar **5** bluze? $5 \times 450 = 2\,250$ (lei). Cât costă un trening? $490 + 470 = 960$ (lei). Dar **3** treninguri? $3 \times 960 = 2\,880$ (lei).

Rezolvarea 3

Considerăm că s-au cumpărat numai treninguri. În loc de **2** cămăşi, se pot lua **2** treninguri, dacă se mai adaugă la sumă **940** lei, căci $2 \times 470 = 940$.

Din enunţ rezultă că **1** trening este mai scump decât o bluză cu **510** lei, căci $470 + 40 = 510$. În loc de **5** bluze se pot lua **5** treninguri, dacă mărim suma cu **2 550** lei, căci $5 \times 510 = 2\,550$. Preţul total ar fi **9 600** lei, deoarece $6\,110 + 940 + 2\,550 = 9600$. Câte treninguri se pot cumpăra cu această sumă? $3 + 2 + 5 = 10$. Câţi lei costă un trening? $9\,600 : 10 = 960$ (lei). Dar **3** treninguri? $3 \times 960 = 2\,880$ (lei). Cât costă o cămaşă? $960 - 470 = 490$ (lei). Dar **2** cămăşi? $2 \times 490 = 980$ (lei). Cât costă o bluză? $960 - 510 = 450$ (lei). Dar **5** bluze? $5 \times 450 = 2\,250$ (lei).

Rezolvarea 4

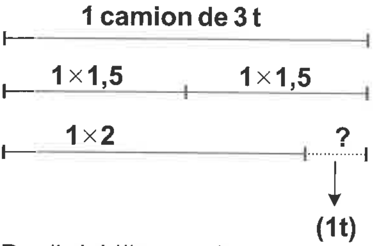
Notând cu b preţul unei cămăşi, preţul treningului cu $b + 470$, iar al bluzei cu $b - 40$, rezultă:

$$3(b+470) + 2b + 5(b-40) = 6\,110 \Leftrightarrow 3b + 1\,410 + 2b + 5b - 200 = 6\,110 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10b = 4\,900 \Leftrightarrow b = 490;\ b + 470 = 490 + 470 = 960;\ b - 40 = 490 - 40 = 450.$$
$$3(b+470) = 3 \times 490 + 3 \times 470 = 2\,880;\ 2b = 2 \times 490 = 980;\ 5(b-40) = 5 \times 450 = 2\,250.$$

11. Rezolvarea 1

Pentru că este aceeaşi cantitate transportată în camioane diferite, cea mai mică cantitate care poate fi este **6** tone, cel mai mic număr care se împarte şi la **3**, şi la **1,5**, şi la **2** (adică c.m.m.m.c. al acestor numere, căci (pentru elevii mici):

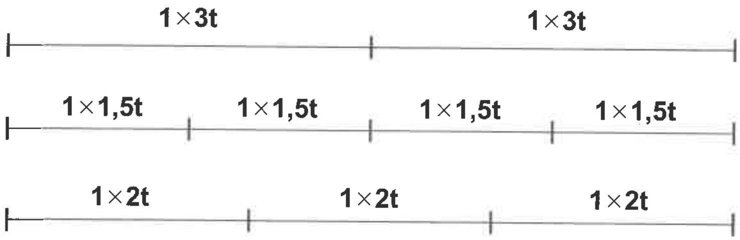
Dacă este cantitatea de **3** tone, câte camioane de fiecare fel sunt necesare?



Dacă dublăm cantitatea ce trebuie transportată, şi diferenţa de **1** t se dublează şi încape într-un camion de **2** tone.

Atunci dublăm cantitatea de **3** tone.

Câte camioane de fiecare fel sunt necesare pentru a transporta **6** tone?



Deci, pentru aceeaşi cantitate, dacă ar fi **2** camioane de câte **3** tone, ar fi **4** camioane de câte **1,5** tone, iar cele de **2** tone ar fi **3**.

Câte camioane ar fi la o asemenea grupă? $\mathbf{2+3+4=9}$.

Câte asemenea grupe de câte **9** camioane se pot forma din numărul total de **81** de camioane? $\mathbf{81:9=9}$.

Deci, au fost:

– **18** camioane de câte **3** tone, deoarece $\mathbf{9\times2=18}$;
– **36** camioane de câte **1,5** tone, pentru că $\mathbf{9\times4=36}$;
– **27** camioane de câte **2** tone, fiindcă $\mathbf{9\times3=27}$.

<u>Rezolvarea 2</u>

Putem presupune, pe rând, că trebuie să se transporte **3** t, **1,5** t, **2** t.

Acum, vrem să vedem câte camioane de fiecare fel ar fi fost necesare, dacă trebuie să se transporte **3 t**.

Atunci, erau camioane:

de câte **3** t: **1** camion;
de câte **1,5** t: **2** camioane;
de câte **2** t: **3** jumătăţi de camion, adică **1** camion şi jumătate.

În total, ar fi fost **4** camioane şi jumătate.

Dar în total sunt **81** de camioane (era o altă cantitate care nu ne interesează acum).

Câte grupe de câte **4** camioane şi jumătate se pot forma din **81** camioane? **81 : 9** (jumătăţi) **= 9** (grupe).

Deci erau **18** camioane de câte **3** t, căci **1** are **2** jumătăţi, iar $\mathbf{9\times2=18}$; **36** camioane de câte **1,5** tone, căci **2** are **4** jumătăţi, iar $\mathbf{4\times9=36}$; **27** camioane de câte **2** t, căci $\mathbf{3\times9=27}$.

<u>Rezolvarea 3</u>

Fie cantitatea care trebuie să se transporte **1,5** t.

Atunci, ar trebui:

camioane de câte **1,5** t: **1** camion;

camioane de câte **2** t: $\frac{3}{4}$ camion, căci **1,5 : 2** = $\frac{3}{4}$

camioane de câte **3** t: $\frac{1}{2}$ camion, căci **1,5 : 3** = o jumătate = $\frac{2}{4}$

În total, ar fi **9** pătrimi de camion.

Câte asemenea grupe sunt în **81**? **81 : 9 = 9**. Deci erau **36** camioane de câte **1,5** t, căci **1** întreg are **4** pătrimi, iar $9 \times 4 = 36$; **27** camioane de câte **2** t, căci $9 \times 3 = 27$; **18** camioane de câte **3** t, căci $9 \times 2 = 18$.

Rezolvarea 4

Fie cantitatea ce trebuie transportată **2** t.

Atunci, numărul de camioane de fiecare fel ar fi:

camioane de câte **2** t: **1** camion;

camioane de câte **1,5** t: **4** treimi camion, căci **2 : 1,5** = $\frac{4}{3}$;

camioane de câte **3** t: $\frac{2}{3}$ camion, căci **2 : 3** = $\frac{2}{3}$.

Câte camioane ar fi într-o astfel de grupă? $1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 3$ (camioane).

Câte grupe de câte **3** camioane se pot forma din **81** de camioane? **81 : 3 = 27.**

Deci erau **27** camioane de câte **2** t, **36** camioane de câte **1,5** t, căci 27×4 treimi = **108** treimi = **36** întregi; **18** camioane de câte **3** t, căci 27×2 treimi = = **54** treimi = **18** întregi.

Rezolvarea 5

Fie a numărul camioanelor de **1,5** t, b, al celor de **2** t, iar c, numărul camioanelor de **3** t, atunci $a + b + c = 81$ şi $\frac{3}{2}a = 2b = 3c$, ultima egalitate devenind $3a = 4b = 6c$. Înlocuim pe a şi b prin c şi obţinem: a = **6** treimi din $c = 2c$; b = **6** pătrimi din c = **3** doimi din c, iar $2c$ + **3** doimi din $c + c = 81$. De aici, rezultă $c = 18$; $a = 36$; $b = 27$.

12. Pe scurt, problema: Diferenţa de preţ: **I – II = 1 150** lei.

4 m din **I** costă cât **3** m din **II** plus **130,50** lei;

3 m din **I** şi **4** m din **II** costă **1 201** lei.

Rezolvarea 1. *Prin înlocuire*

Dacă împărţim fiecare termen al celei de-a doua egalităţi prin **4**, obţinem ca termen de comparaţie **1** m din **I**, adică: **1** m din **I** costă cât $\frac{3}{4}$ m din **II** plus **32,625** lei. Dacă în loc de **1** m din balotul **I** se pot lua **3** pătrimi de m din balotul al **II**-lea şi mai rămân **32,625** lei, atunci în loc de cei **3** m (din relaţia a treia) voi lua **9** pătrimi de m din **II** şi mai rămân **97,875** lei. Relaţia a treia devine:

$\frac{9}{4}$ m din **II** şi **4** m din **II** costă **11003,125** lei, căci **1 201 – 97,875** = = **1103,125.** Atunci $\frac{25}{4}$ m din **II** costă **1103,125** lei, o pătrime de m din **II** costă

44,125 lei, iar **1** m din **II** costă **176,50** lei, căci $4 \times 44{,}125 = 176{,}50$.

Un metru din **I** costă **165** lei, căci $(1\,201 - 4 \times 176{,}50) : 3 = 165$.

Rezolvarea 2. *Comparaţie prin scădere*

4 m din **I**	– **3** m **II** costă	**130,50** lei	/ ×**3**
3 m din **I**	+ **4** m **II** costă	**1 201** lei	/ ×**4**
12 m din **I**	– **9** m **II** costă	**391,50** lei	
12 m din **I**	+ **16** m **II** costă	**4 804** lei.	

Scădem, termen cu termen, prima egalitate din a doua şi obţinem:

25 m din balotul al **II**-lea costă **4 412,50** lei.

Cât costă **1** m din balotul al doilea? $4\,412{,}50 : 25 = 176{,}50$ (lei).

Câţi lei costă un metru de tercot din primul balot?

$(1\,201 - 4 \times 176{,}50) : 3 = 165$ (lei).

Pentru *ambele moduri*:

Ca să aflăm câţi m are fiecare balot, observăm că diferenţa de preţuri dintre cele două baloturi este de **1 150** lei, iar un metru din **II** costă cu **11,50** lei mai mult decât **1** m din primul balot, căci $176{,}50 - 165 = 11{,}50$. De la câţi metri se adună diferenţa de **1 150** lei? De la atâţia metri de câte ori **11,50** se cuprinde în diferenţa totală, adică $1\,150 : 11{,}50 = 100$.

Deci, fiecare balot are câte **100** metri.

Rezolvarea 3

Fie y preţul unui metru din primul balot, z preţul unui metru din al doilea balot, se pot scrie: $4z + 3y = 1\,201$ şi $4y - 3z = 130{,}50$.

Se poate proceda ca la modul anterior de rezolvare sau prin substituţie. Se ajunge la: $25z = 4412{,}50$, de unde $z = 176{,}50$; $y = 165$.

13. Rezolvarea 1. *Prin înlocuire*:

Scriem pe scurt problema:

Suma **I** + $\frac{3}{4}$ din suma **II** = **48** lei,

$\frac{3}{4}$ din S.**I** + suma **II** = **46, 50** lei.

Rezultă că o pătrime din suma primului copil reprezintă cu **1,50** lei mai mult decât o pătrime din suma celui de-al doilea, căci $48 - 46{,}50 = 1{,}50$. În loc de $\frac{3}{4}$ din suma celui de-al doilea, considerăm că a fost $\frac{3}{4}$ din suma primului, dar la total mai trebuie **3,50** lei, adică suma va fi **52,50**, pentru că $48 + 3 \times 1{,}50 = 52{,}50$.

Deci, **7** pătrimi din suma primului copil reprezintă **52,50** lei.

Atunci, suma lui a fost de **30** lei, căci $52{,}50 : 7 \times 4 = 30$.

Suma celui de-al doilea era **24** lei, deoarece $(30 : 4 - 1{,}50) \times 4 = 24$.

Rezolvarea 2. *Prin aducerea la acelaşi termen de comparaţie*:

S.**I** +	$\frac{3}{4}$ din S.**II**	= **48** lei	$/ \times \frac{4}{3}$
$\frac{3}{4}$ din S.**I** +	S.**II**	= **46,50** lei	
$\frac{4}{3}$ din S.**I** +	S.**II**	= **64** lei	
$\frac{3}{4}$ din S.**I** +	S.**II**	= **46,50**.	

Scăzând membru cu membru obținem:

$\frac{7}{12}$ din S.**I** reprezintă **17,50** lei, adică S.**I** = **30** lei. Al doilea avea **24** lei, căci $(48-30):3\times4=24$.

Rezolvarea 3

Fie a suma primului copil, iar b suma celuilalt.

Se poate scrie: $a+\frac{3}{4}b=48$, echivalent cu: $4a+3b=192$ (prin amplificare cu **4**), iar $a=(192-3b):4$. Dar și $\frac{3}{4}a+b=46{,}50$. Înlocuind pe a, rezultă:

$\frac{3}{4}\times\frac{192-3b}{4}+b=46{,}50 \Leftrightarrow \frac{576-9b}{16}+b=46{,}50 \Leftrightarrow 576+7b=744$, de unde $b=24$; $a=(192-3\times24):4=30$.

14. Rezolvarea 1. Pe scurt:

	Echipa I	a II-a echipă
varianta a)	**18** zile și	**16** zile = toată lucrarea;
varianta b)	**21** zile și	**12** zile = toată lucrarea;

Se observă că în a doua variantă prima echipă lucrează cu **3** zile mai mult decât în prima variantă, căci **21 – 18 = 3**, iar a doua echipă cu **4** zile mai puțin, pentru că **16 – 12 = 4**. Dacă în ambele variante se termină aceeași lucrare, rezultă că partea lucrată de a doua echipă în **4** zile este făcută de prima echipă în **3** zile.

1) Dacă pentru lucrarea efectuată de a doua echipă în **4** zile, primei echipe îi trebuie **3** zile, atunci pentru lucrarea efectuată de a doua echipă în **12** zile, primei echipe îi trebuie de **3** ori câte **3** zile, adică **9** zile, pentru că din **12** zile se pot face **3** grupe de câte **4** zile, căci $12:4=3$, iar $3\times3=9$. Pentru toată lucrarea, primei echipe îi trebuie **30** de zile, căci $21+9=30$. Dacă înlocuirea are loc în varianta a), rezultă $18+16:4\times3=30$.

2) Dacă pentru lucrarea efectuată de prima echipă în **3** zile, celei de-a doua echipe îi trebuie **4** zile, atunci, pentru lucrarea efectuată de prima echipă în **18** zile, celei de-a doua îi trebuie de **6** ori câte **4**, adică **24** de zile, pentru că din **18** zile se pot face **6** grupe de câte **3** zile, căci $18:3=6$, iar $6\times4=24$.

Pentru toată lucrarea, celei de-a doua echipe îi trebuie **40** de zile, pentru că $24+16=40$ sau, dacă înlocuirea are loc în varianta b), rezultă:

$12+21:3\times4=40$.

Rezolvarea 2

Scriem problema pe scurt:

		Echipa I	a II-a echipă	
varianta	a)	**18** zile și	**16** zile ....lucrarea	$/\times7$
varianta	b)	**21** zile	și **12** zile ....lucrarea	$/\times6$
	a)	**126** zile	și **112** zile ... **7** lucrări	Efectuăm
	b)	**126** zile	și **72** zile ... **6** lucrări	a – b
		/	**40** zile ...lucrarea.	

Deci, a doua echipă termină singură lucrarea în **40** de zile.

a) **18** zile	şi **16** zile ... lucrarea	/×**3**	
b) **21** zile şi	**12** zile ...lucrarea	/×**4**	
a) **54** zile şi	**48** zile ... **3** lucrări		Efectuăm
b) **84** zile şi	**48** zile ... **4** lucrări		b – a
30 zile	/	...lucrarea	

Deci, prima echipă termină singură lucrarea în **30** de zile.

Rezolvarea 3

Notăm cu ***L*** lungimea şanţului, cu ***a***, partea din şanţ pe care o sapă prima echipă într-o zi,cu ***b***, partea din şanţ pe care o sapă într-o zi a doua echipă. Se poate scrie relaţia: $18a + 16b = 21a + 12b \; / - (18b + 12b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4b = 3a$, de unde $b = \frac{3a}{4}$. Dacă lungimea şanţului este $L = 18a + 16b$, atunci prima echipă sapă şanţul în $\frac{L}{a}$ zile, adică $\frac{L}{a} = 18 + 16 \times \frac{b}{a} = 18 + 16 \times \frac{3}{4} =$ $= 18 + 12 = 30$. A doua echipă termină singură lucrarea în $\frac{L}{b}$ zile, adică

$\frac{L}{b} = 18 \times \frac{a}{b} + 16 = 18 \times \frac{4}{3} + 16 = 24 + 16 = 40.$

15. Rezolvarea 1

Enunţul problemei pe scurt:

– **50** kg de carne gâscă şi **20** kg carne curcan şi **30** kg carne găină costă **15 450** lei;

– **1** kg carne de curcan costă cât **1** kg carne de găină şi **1** kg de carne gâscă la un loc;

– **1** kg carne de găină costă mai puţin decât **1** kg de carne de gâscă cu **15** lei.

Câţi lei costă fiecare fel de carne?

Înlocuim în suma de **15 450** lei toate mărimile prin cea mai ieftină (carne de găină). În loc de ***20** kg carne de curcan* putem lua ***20** kg carne de găină* şi ***20** kg carne de gâscă*.

Câtă carne de gâscă s-ar putea lua? **20 + 50 = 70**.

Câtă carne de găină s-ar putea lua? **20 + 30 = 50**.

În loc de **70** kg carne de gâscă luăm carne de găină, dar mai rămân bani. Câţi? Dacă la **1** kg rămân **15** lei, la **70** kg vor rămâne de **70** de ori câte **15** lei, adică **70×15 = 1 050**.

Deci: **70** kg carne de găină şi **50** kg carne de găină costă cu **1 050** lei mai puţin decât **15 450** lei, adică **15 450 – 1 050 = 14 400**.

Câţi lei costă **1** kg carne de găină? **14 400 : 120 = 120** (lei).

Câţi lei costă **1** kg carne de gâscă? **120 + 15 = 135** (lei).

Câţi lei costă **1** kg carne de curcan? **120 + 135 = 255** (lei).

Câţi lei costă fiecare cantitate cumpărată?

– cele **30** kg carne de găină au costat **3 600** lei, pentru că **30×120 = 3 600**;

– cele **50** kg carne de gâscă au costat **6 750** lei, deoarece **50×135 = 6 750**;

– cele **20** kg carne de curcan au costat **5 100** lei, căci **20×255 = 3 100**.

Rezolvarea 2

Înlocuim toate mărimile prin cea mai scumpă.

Dacă **1** kg carne de găină şi **1** kg carne de gâscă costă cât un singur kg carne de curcan, atunci în loc de **30** kg carne de găină şi **30** kg carne de gâscă se pot lua **30** kg carne de curcan.

Din cele **50** kg carne de gâscă mai rămân **20** kg, căci **50 – 30 = 20**.

Cum putem să înlocuim cele **20** kg carne de gâscă cu carne de curcan? În **20** kg carne de gâscă sunt de **2** ori câte **10** kg.

Dacă la o grupă de câte **10** kg carne de gâscă adăugăm **10** kg carne găină (în locul celeilalte grupe de **10** kg carne de gâscă), mai rămân de **10** ori câte **15** lei, pentru că **1** kg carne de găină este mai ieftin decât unul de carne de gâscă cu **15** lei.

Deci, în locul celor **20** kg carne de gâscă se pot lua **10** kg carne de curcan (pentru **1** kg trebuie **1** kg carne de gâscă şi unul de găină), dar mai rămân **150** lei.

Prin urmare, în locul celor **50** kg carne de gâscă se vor lua **40** kg carne de curcan, adică **30 + 10 = 40**, dar mai rămân **150** lei.

Atunci, cu suma totală, câte kg de carne de curcan se pot lua?

41 kg + **20** kg = **60** kg, dar mai rămân **150** lei.

Câţi lei costă cele **60** kg carne de curcan? **15 450 – 150 = 15 300**.

Câţi lei costă **1** kg carne de curcan? **15 300 : 60 = 255** (lei).

Deci, **1** kg carne de găină şi unul de gâscă costă **255** lei, iar **1** kg carne de gâscă costă cu **15** lei mai mult decât **1** kg carne de găină.

Este o problemă de sumă şi diferenţă.

Aplicând formula (a se vedea rezolvarea **4**, de la problema **1**, capitolul al **II**-lea), obţinem: **1** kg carne de gâscă costă **(255 + 15) : 2 = 135**.

Un kg carne de găină costă **120** lei, căci **135 – 15 = 120**.

(Pentru a se afla cât s-a plătit pentru fiecare fel de carne, a se vedea rezolvarea anterioară).

Rezolvarea 3

Înlocuim toate cantităţile prin carne de gâscă. În loc de **1** kg carne de găină se poate lua **1** kg carne de gâscă, dacă se mai adaugă **15** lei.

În loc de **30** kg carne de găină se pot lua **30** kg carne de gâscă, dacă se mai adaugă **450** lei, căci **30** × **15 = 450**.

În loc de **20** kg carne de curcan se pot lua **20** kg carne de gâscă şi **20** kg carne de găină.

În loc de aceste **20** kg carne de găină se pot lua **20** kg carne de gâscă, dacă se mai adaugă **300** lei, deoarece **20** × **15 = 300**.

50 kg carne de gâscă + **30** kg carne de gâscă (dar mai trebuie **450** lei) + + **20** kg carne de gâscă + **20** kg carne de gâscă (dar mai trebuie **300** lei) valorează **16 050** lei.

Câte kg carne de gâscă s-ar cumpăra? **50 + 30 + 20 + 20 = 120**.

Câţi lei costă **120** kg carne de gâscă? **15 450 + 450 + 300 = 16 050**.

Câţi lei costă **1** kg carne de gâscă? **16 050 : 12 = 135**.

Câţi lei costă **1** kg carne de găină? **135 – 15 = 120**.

Dar **1** kg carne de curcan? **135 + 120 = 255**.

(Pentru a se calcula cât a costat fiecare cantitate cumpărată, a se vedea rezolvarea **1**).

Rezolvarea 4

Notăm cu y preţul unui kg carne de găină, cu $y + 15$ preţul unui kg carne de gâscă, iar preţul unui kg de carne de curcan cu $2y + 15$.

Se poate scrie: $50(y + 15) + 20(2y + 15) + 30y = 15\,450 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **50y + 750 + 40y + 300 + 30y = 15 450** $\Leftrightarrow$ **120y + 1 050 = 15 450** $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$**120y = 14 400** $\Leftrightarrow$ **y = 14 400 : 120 = 120, y + 15 = 120 + 15 = 135**; **2y + 15 = = 120 × 2 + 15 = 255**.

16. Rezolvarea 1

Dacă numărul grupelor de câte **2** nuci (perechile) este egal cu dublul numărului grupelor de câte **13**, rezultă că, pentru a se obține egalitatea între numerele acestor grupe, trebuie să dublăm numărul de nuci din fiecare grupă de câte **2**. O grupă de acest fel va avea câte **4** nuci.

Dacă numărul grupelor de câte **2** nuci este egal cu numărul grupelor de câte **5**, rezultă că şi acesta este dublul numărului grămezilor de câte **13** nuci.

Dacă dublăm şi numărul de nuci din fiecare grupă de câte **5**, în fiecare grupă vor fi câte **10** nuci, iar numărul grupelor de câte **10** va fi egal cu numărul grupelor de câte **13** nuci.

Câte nuci sunt în **3** asemenea grupe distincte? **4 + 10 + 13 = 27**.

Dacă numărul total de nuci este cuprins între **250** şi **300**, pentru a determina acest număr, trebuie să aflăm câte grupe de câte **27** sunt în numerele limită: **250 = 27 × 9 + 7**.

Deci, la **250** mai trebuie adăugate încă **20** (**7 + ? = 27**), pentru a fi un număr întreg de grupe de câte **27** nuci.

Acel număr este **270**, căci **250 + 20 = 270**.

Vor fi **10** grupe de câte **27** de nuci, astfel că fiecare copil are:

- primul copil: **10** grupe a câte **4**, adică **40** de nuci;
- al doilea copil: **10** grupe a câte **10**, adică **100** nuci;
- al treilea copil: **10** grupe a câte **13**, adică **130** nuci.

Verificare:

Numărul grupelor:

40 (nuci): **2** (câte **2**) = **20** (grupe);
100 (nuci): **5** (câte **5**) = **20** (grupe);
130 (nuci): **13** (câte **13**) = **10** (grupe);
20 = 20; **20 : 10 = 2**; **250 < 270 < 300**.

Câte grupe de câte **27** nuci sunt în celălalt număr limită, adică în **300**? **300 = 27 × 11 + 3**.

Deci, putem forma **11** grupe, dar mai rămân **3** nuci. Deci, numărul este **297**, adică **300 – 3 = 297**. (Putem să gândim şi astfel: adăugăm, la numărul **270**, grupe de câte **27**, observând că mai este numărul **297** care cuprinde **11** asemenea grupe.)

Sunt **11** grupe de câte **27**, adică **11** grupe de câte **4**,**11** grupe de câte **10** şi **11** grupe de câte **13** nuci.

Primul copil putea să aibă **44** de nuci, căci **11 × 4 = 44**; al doilea, **110** nuci, căci **11 × 10 = 110**; al treilea avea **143** nuci, căci **11 × 13 = 143**.

Verificare:

numărul grupelor: **44 : 2 = 22** (grupe); **110 :5 = 22** (grupe);
143 : 13 = 11 (grupe); **22 : 11 = 2**; **22 = 22**; **250 < 297 < 300**.

Observație:

După ce am stabilit că numărul total de nuci trebuie să se împartă exact la **27**, putem gândi şi în alt mod.

Care sunt numerele cuprinse între **250** şi **300**, ce sunt multipli ai numărului **27**?

Pe baza regulilor de calcul rapid, se pot determina numerele:

270, căci $27 \times 10 = 270$;

297, căci $27 \times 11 = 297$.

Apoi, se parcurge aceeaşi cale, ca la rezolvarea anterioară.

Rezolvarea 2

Notăm cu ***a*** numărul grupelor de câte **2** nuci, cu ***b*** numărul grupelor de câte **5** nuci şi cu ***c*** numărul grupelor de câte **13** nuci.

Se pot scrie: $250 < 2a + 5b + 13c < 300$ şi $a = b = 2c$.

Înlocuim totul prin ***a*** şi rezultă: $250 < 2a + 5a + \frac{13}{2}a < 300 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 500 < 7a + 13a < 600$ (prin amplificare cu **2**).

Rezultă $500 < 27a < 600$; $a > 500 : 27 \Leftrightarrow a > 18,4$; $a < 600 : 27 \Leftrightarrow a < 22,2$.

Deci ***a*** poate fi: **19**; **20**; **21**; **22**.

Dar ***a*** trebuie să fie multiplu de **2**, ca să se poată exprima numărul de grămezi de câte **13** nuci. Atunci $a \in \{20, 22\}$.

Câte nuci a avut primul copil? $20 \times 2 = 40$ sau $22 \times 2 = 44$.

Câte nuci avea al doilea copil? $20 \times 5 = 100$ sau $22 \times 5 = 110$.

Câte nuci avea al treilea copil? $(20 : 2) \times 13 = 130$ sau $(22 : 2) \times 13 = 143$.

17. Pentru a afla din câţi litri de lapte se obţin **12** litri de smântână, trebuie să aflăm din câţi litri de lapte se obţine *un singur litru de smântână*.

De aceea, metoda se numeşte *reducere la unitate* (reducere la **1**).

Deoarece problema conţine **3** elemente cunoscute şi unul necunoscut, două câte două, de acelaşi fel, metoda se mai numeşte *regula de trei simplă*.

Dacă pentru obţinerea a **5** litri de smântână trebuie **45** litri de lapte, pentru un singur litru de smântână trebuie o cantitate de lapte de **5** ori mai mică decât **45**, căci **1** este mai mic decât **5** de **5** ori; deci, $45 : 5 = 9$ (litri de lapte). Dacă pentru obţinerea unui litru de smântână trebuie **9** litri de lapte, atunci pentru obţinerea a **12** litri de smântână vor fi necesari de **12** mai mulţi litri decât **9**, pentru că şi **12** este mai mare decât **1** de **12** ori.

Sunt necesari **108** litri, căci $12 \times 9 = 108$.

Judecata şi rezolvarea se pot scrie şi astfel:

pentru **5** litri smântână,	trebuie	**45** litri lapte;
pentru **1** litru smântână,	cât trebuie?	$45 : 5 = 9$ (litri lapte).
pentru **12** litri smântână,	cât trebuie?	$12 \times 9 = 108$ (litri lapte).

Mai observăm un lucru: atunci când am micşorat valoarea unei mărimi de un număr de ori şi valoarea celeilalte mărimi cu care este în relaţie s-a micşorat de acelaşi număr de ori şi invers.

(În clasele următoare, elevii vor învăţa că aceste mărimi se numesc *mărimi direct proporţionale*.)

18. (Asemănătoare cu cea anterioară, puţin mai complicată)

Pentru a afla cât costă cele **18** mese, trebuie să se determine preţul unei singure mese (potrivit regulii: pentru a afla valoarea mai multor unităţi, trebuie să ştim valoarea unei singure unităţi). Pentru a afla preţul unei mese, trebuie să se determine preţul pentru **4** mese, care este cât preţul pentru **3** dulapuri. Câţi lei costă **1** dulap? $36\,720 : 12 = 3\,060$. Câţi lei costă **3** dulapuri? $3 \times 3\,060 = 9\,180$. Pentru **4** mese s-au plătit tot **9 180** lei.

Câți lei a costat o masă? **9 180 : 4 = 2 290**. Câți lei s-au plătit pentru cele **18** mese cumpărate? **18×2 295 = 41 310**.

Rezolvarea se poate scrie şi astfel:

12 dulapuri	**36 720** lei
1 dulap	**36 720 : 12 = 3 060** (lei)
3 dulapuri (sau **4** mese)	**3×3 060 = 9 180** (lei)
1 masă	**9 180 : 4 = 2 295** (lei)
18 mese	**18×2 295 = 41 310**
	Răspuns: **41 310** lei

19. Rezolvare

Pentru a afla câți metri avea fiecare bucată trebuie să determinăm câți lei costă **1** m de tergal.

Singura relație din care se poate determina prețul unui metru de tergal este cea în legătură cu prețul pentru **54** metri. Deci, **54** m de tergal costă **35 100** lei, pentru că **15 600 + 7 810 + 11 700 = 35 100**.

Dacă **54** m costă **35 100** lei, atunci **1** m costă de **54** de ori mai puțin, adică **650** lei, pentru că **35 100 : 54 = 650**. Dacă cu **650** lei se poate cumpăra **1** m de tergal, câți m se pot cumpăra cu **15 600** lei? Dar cu **11 700** lei? Dar cu **7 800** lei? Rezultă că:

– prima bucată avea **24** m, pentru că **15 600 : 650 = 24**;
– a doua bucată avea **18** m, căci **11 700 : 650 = 18**;
– a treia bucată avea **12** m, deoarece **7 800 : 650 = 12**.

Verificare: **24 + 18 + 12 = 54**; (efectuați celelalte calcule pentru determinarea valorii fiecărei bucăți).

20. Rezolvarea 1

Dacă la **9** pruni a plantat **4** meri, atunci la **18** pruni (numărul **18** este mai mare decât **9** de **2** ori), a plantat de **2** ori mai mult decât **4**, adică **2×4 = 8** (meri).

Rezolvarea 2

Dacă la **9** pruni a plantat **4** meri, atunci la **1** prun a plantat **4** noimi de măr (de **9** ori mai puțin decât **4**, pentru că şi **1** este mai mic decât **9** de **9** ori), atunci la **18** pruni a plantat de **18** ori câte **4** noimi de măr, adică **18×4** noimi = = **72** noimi= **8** întregi (adică **8** meri).

21. Câți km a parcurs în a doua zi? **360 : 3×2 = 240**.

Pentru a afla câți litri de benzină s-au consumat în cele două zile la un loc, trebuie să aflăm câți km au fost parcurşi în cele două zile. Au fost parcurşi **600** km, adică **360 + 240 = 600**. Dacă la **100** km s-au consumat **12** litri, atunci la **600** de km, câți litri de benzină se vor consuma?

Sunt **2** *variante de lucru*:

a) Dacă la **100** de km a consumat **12** litri, câte grupe de câte **100** sunt în **600**, tot atâtea grupe de câte **12** litri de benzină s-au consumat, adică **600 : 100 = 6**, iar **6×12 = 72** (litri);

b)

dacă la	**100** km	s-au consumat **12** litri,	atunci la
	600 km	s-au consumat ? litri;	
dacă la	**100** km	s-au consumat **12** litri,	atunci la
	1km	s-au consumat de **100** de ori mai puțin decât	

12, adică $\mathbf{12 : 100 = \frac{3}{25}}$ litri;

iar la **600** km s-au consumat de **600** de ori mai mult decât

$\frac{3}{25}$, adică $\mathbf{600 \times \frac{3}{25} = 72}$ (litri).

22. (mărimi invers proporționale: *mărirea* unei valori de un număr de ori determină *micşorarea* celeilalte valori de acelaşi număr de ori şi invers. Se spune că numărul de muncitori şi timpul necesar pentru terminarea aceleiaşi lucrări sunt mărimi invers proporționale.) Pentru a determina timpul necesar efectuării lucrării pentru **12** muncitori, trebuie să se determine timpul necesar pentru *un singur muncitor*. (De aceea spunem reducere la unitate.) Dacă **10** muncitori termină lucrarea în **6** zile, un singur muncitor (**1** este mai mic decât **10** de zece ori) termină lucrarea într-un timp de **10** ori mai mare decât **6**, adică $\mathbf{10 \times 6 = 60}$. Dacă unui muncitor îi trebuie **60** de zile, pentru **12** muncitori e necesar un timp de **12** ori mai mic decât **60**, pentru că **12** e mai mare decât **1** de **12** ori, adică **60 : 12 = 5** (zile).

Judecata şi rezolvarea se pot scrie şi astfel:

10 muncitori termină lucrarea	în **6** zile, atunci
1 muncitor termină lucrarea	într-un timp de **10** ori mai mare, adică $\mathbf{6 \times 10 = 60}$ (zile);
12 muncitori	într-un timp de **12** ori mai mic decât **60**, adică **60 : 12 = 5** (zile).

23. Dacă

3 muncitori termină lucrarea	într- oră, atunci
1 muncitor termină lucrarea	într-un timp de **3** ori mai mare decât o oră, adică $\mathbf{3 \times 1 = 3}$ (ore);
180 muncitori termină	într-un timp de **180** de ori mai mic decât **3** ore, adică **3** ore : **180** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{3 \times 60}$ minute: **180 = 180 : 180 = 1** minut.

24. Notăm lucrarea cu ***L*** (un întreg).

A câta parte din lucrare ar executa fiecare într-o singură oră?

tata: execută a patra parte din lucrare, adică o pătrime ($\frac{1}{4}L$);

mama: execută a şasea parte din lucrare, adică o şesime ($\frac{1}{6}L$);

fiul: execută a douăsprezecea parte din lucrare, adică $\frac{1}{12}L$.

Câte părți din lucrare execută cei **3** într-o oră?

$$\frac{1}{4}L + \frac{1}{6}L + \frac{1}{12}L = \frac{3+2+1}{12}L = \frac{6}{12}L = \frac{1}{2} \text{ din lucrare } (\frac{1}{2}L).$$

Dacă într-o oră cei **3** execută o jumătate din lucrare, atunci pentru toată lucrarea le trebuie un timp de **2** ori mai mare decât **1** oră (căci şi un întreg are **2** doimi), adică $\mathbf{2 \times 1 = 2}$ (ore).

Răspuns: **2** ore.

25. Dacă **5** copii mănâncă **5** înghețate în **5** minute, în câte minute mănâncă **1** copil o singură înghețată; cei **5** copii mănâncă simultan cele **5** înghețate, deci **1** copil mănâncă **1** înghețată tot în **5** minute. Câte înghețate mănâncă **1** copil în **15** minute? Va mânca **3** înghețate, pentru că **5** se cuprinde în **15** de **3** ori, adică **15 : 5 = 3**. Dacă un copil mănâncă **3** înghețate în **15** minute, câți copii trebuie să fie pentru a mânca **30** de înghețate tot în **15** minute?

Deoarece **30** este mai mare decât **3** de **10** ori, adică **30 : 3 = 10**, înseamnă că numărul copiilor va fi mai mare decât **1** de **10** ori, adică $\mathbf{10 \times 1 = 10}$.

Rezolvarea pe scurt:

5 copii............**5** înghețate............**5** minute

1 copil............**1** înghețată............**5** minute

5 copii............? înghețate............**15** minute

Deoarece **15** este mai mare decât **5** de **3** ori, adică **15 : 5 = 3**, şi numărul de înghețate va fi mai mare decât **1** de **3** ori, adică **3**.

1 copil............ **3** înghețate............**15** minute, atunci

? copii............**30** înghețate............**15** minute.

Deoarece **30** este mai mare decât **3** de **10** ori, şi numărul necesar de copii va fi mai mare decât **1** de **10** ori, adică **10** copii.

10 copii mănâncă **30** de înghețate în **15** minute.

26. În **12** zile prima echipă execută $\frac{2}{5}$ din lucrare ($\frac{2}{5}$ *L*), iar a doua $\frac{4}{9}$ din rest.

Dar care este restul? $\frac{5}{5}L - \frac{2}{5}L = \frac{3}{5}L$. Dar $\frac{4}{9}$ din $\frac{3}{5}L$? $\frac{4}{9} \times \frac{3}{5}L = \frac{4}{15}L$.

A câta parte din lucrare execută prima echipă într-o zi?

De **12** ori mai puțin decât $\frac{2}{5}L$, adică $\frac{2}{5}L \times \frac{1}{12} = \frac{1}{30}$ din lucrare.

Dar a doua echipă într-o zi? De **12** ori mai puțin decât $\frac{4}{15}L$, adică $\frac{4}{15}L \times \frac{1}{12} = \frac{1}{45}$ din lucrare. Cât (a câta parte) efectuează cele două echipe într-o zi? $\frac{1}{30}L + \frac{1}{45}L = \frac{5}{90}L = \frac{1}{18}L$. Dacă într-o zi termină a optsprezecea parte din lucrare, cele **18** părți le va termina într-un timp de **18** ori mai mare decât o zi, adică $\mathbf{18 \times 1 = 18}$ (zile).

27. Câte piese trebuia să efectueze zilnic conform sarcinii de lucru?

36 : 6 = 6.

Câte zile a lucrat cu această producție? **1 + 1 = 2**, adică luni şi marți.

Câte piese a executat în aceste **2** zile? $\mathbf{2 \times 6 = 12}$.

Câte piese mai avea de executat? **36 – 12 = 24**.

În câte zile a executat cele **24** de piese? **6 – 2 – 1 = 3**.

Câte piese a executat în fiecare dintre cele **3** zile? **24 : 3 = 8**.

Cu cât a executat mai mult joi față de luni? **8 – 6 = 2**.

Răspuns: cu **2** piese mai mult.

28. Rezolvarea 1

Câte tone de sfeclă se recoltează de pe primul ogor? $\mathbf{48 \times 50 = 2\,400}$.

Câte kg de zahăr se obțin din sfecla recoltată de pe primul ogor?

Dacă dintr-o tonă se extrag **160** kg, din **2 400** tone se vor extrage de **2 400** ori câte **160** kg zahăr, adică **2 400** × **160** = **384 000** (kg).

Câte tone de sfeclă se recoltează de pe **3** ha din primul teren sau de pe **4** ha din terenul al doilea? **3** × **50** = **150** (tone).

Câte tone de sfeclă se recoltează de pe **1** ha din terenul al doilea? **150 : 4 = 37,5** (tone) sau, pentru clasa a IV-a: **150 000** (kg) **: 4 = 37 500** (kg).

Câte tone (kg) se recoltează de pe cele **80** ha ale terenului al doilea? **80** × **37,5** = **3 000** (tone) sau **80** × **37 500** = **3 000 000** kg = **3 000** tone.

Câte kg de zahăr se obțin din **3 000** t de zahăr? **3 000** × **160** = **480 000**.

Cu câte kg de zahăr s-au obținut mai mult din sfecla de pe al doilea teren față de pe celălalt? **480 000 – 384 000 = 96 000** (kg).

Rezolvarea 2

Câte kg de zahăr se obțin din sfecla recoltată de pe primul teren? **50** × **48** × **160** = **384 000**.

Câte kg de zahăr se obțin din sfecla recoltată de pe un ha, adică din **50** tone de sfeclă? **50** × **160** = **8 000**.

Câte kg de zahăr se obțin din sfecla recoltată de pe **3** ha din primul teren *sau* de pe **4** ha din terenul al doilea? **3** × **8 000** = **24 000**.

Câte kg de zahăr se extrag din sfecla recoltată de pe **1** ha din terenul al doilea? **24 000 : 4 = 6 000**.

Câte kg de zahăr se obțin din sfecla recoltată de pe întreg terenul al doilea? **80** × **6 000** = **480 000**.

Câte kg de zahăr s-au obținut mai mult într-un caz față de celălalt? **480 000 – 384 000 = 96 000**.

Răspuns: cu **96 000** kg mai mult.

9. Rezolvarea 1

Dacă într-un minut muncitorul parcurge cu bicicleta mai mult cu **125** m (căci **7,5** km/h = **125** m/min.), atunci în **6** minute, va parcurge cu **6** × **125** m = **750** m mai mult decât în **6** minute pe jos.

Deci, când merge pe jos, în **16** minute, muncitorul parcurge o anumită distanță în **6** minute şi încă **750** m. Dacă în **16** minute, muncitorul parcurge distanța, înseamnă că în **10** minute, adică în **16** minute – **6** minute, parcurge **750** m.

Deci, *într-un minut*, pe jos, omul parcurge **75** m, căci **750 : 10 = 75** (m).

Distanța de la locul de muncă până acasă este de **1 200** m, căci **75** × **16** = **1 200** sau **(75 + 125)** × **6** = **1 200** (m).

Rezolvarea 2

$\boldsymbol{t_1 = 16}$ min.; $\boldsymbol{t_2 = 6}$ min.; v_1 = viteza pe jos; v_2 = viteza bicicletei;

$d = v_1 \times t_1$ sau $d = v_2 \times t_2$.

Din enunț: $v_2 = v_1 + 125$ m/min, iar $16\,v_1 = 6v_1 + 750$ m/min $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\,v_1 = 750$ m/min.

Rezultă: $v_1 = 75$ m/min., iar $d = 16 \times 75 = 1\,200$ (m) sau

$d = 6 \times (75 + 125) = 1\,200$ (m).

Rezolvarea 3

Din enunț rezultă că *într-un minut*, cu bicicleta, omul parcurge *cu* **125** m mai mult decât pe jos, căci **7,5** km/h = **125** m/min.

Dacă în **16** minute, muncitorul parcurge distanța d, atunci

într-un minut $\frac{1}{16}d$.

Dacă în **6** minute d,

într-un minut $\frac{1}{6}d$.

Deci: $\frac{1}{6}d - \frac{1}{16}d = \frac{5}{48}d$ reprezintă **125** m, iar $d = 125 : 5 \times 48 = 1\,200$ (m).

Răspuns: **1 200** m.

30. Câți km reprezintă o treime din drum? $d = v \times t$; $360 \times 2 = 720$ (km). Câte treimi sunt în restul distanței? **3** treimi – **1** treime = **2** treimi. Dacă o treime reprezintă **720** km, atunci **2** treimi vor reprezenta de **2** ori mai mult, adică $2 \times 720 = 1\,440$ (km). În câte ore parcurge **1 440** km? $t = d : v$; $1\,440 : 480 = 3$ (ore). În câte ore parcurge toată distanța? **2 + 3 = 5**. *Răspuns*: **5** ore.

Rezolvarea 2

$v_1 = 360$ km/h; $v_2 = 480$ km/h. Deci de câte ori este mai mare a doua viteză față de prima? $480 : 360 = \frac{4}{3}$. De câte ori este mai mare distanța a doua față de prima? De două ori, căci **2** treimi reprezintă o distanță de **2** ori mai mare decât o treime. Dacă vitezele ar fi fost egale, t_2 ar fi fost de **2** ori mai mare decât t_1. Dar vitezele nu sunt egale, ci v_2 este mai mare decât v_1 de $\frac{4}{3}$ ori, deci, la distanțe egale, t_2 este mai mic decât t_1 de același număr de ori, adică de $\frac{4}{3}$ ori. Combinând cele două relații, rezultă: $t_2 = t_1 \times 2 : \frac{4}{3} = 3$ (ore).

Timpul total: **5** ore, căci **2 + 3 = 5**.

31. (comparație prin scădere, **3** mărimi). Se pot scrie pe scurt astfel:

5 creioane şi	**3** gume şi	**6** rigle	...	**95** lei	Adunăm relațiile membru cu membru.
3 creioane şi	**5** gume şi	**4** rigle	...	**83** lei	
8 creioane şi	**8** gume şi	**10** rigle	=	**178** lei.	Scriem cea de-a treia relație şi o scădem din cea obținută.
8 creioane şi	**8** gume şi	**5** rigle	=	**133** lei	
/	/	**5** rigle	=	**45** lei.	

Cât costă o riglă? **45 : 5 = 9**. Luăm alte **2** relații în care înlocuim numărul de rigle prin prețurile lor.

3 creioane şi **5** gume ... **47** lei, căci $83 - 4 \times 9 = 47$.

8 creioane şi **8** gume ... **88** lei, căci $133 - 5 \times 9 = 88$.

Amplificăm cele două egalități, termen cu termen, cu **8** şi, respectiv, cu **3**, obținând:

24 creioane şi **40** gume ... **376** lei
24 creioane şi **24** gume ... **264** lei Scădem, membru cu membru.

16 gume = **102** lei.

Cât costă o gumă? **102 : 16 = 7** (lei).

Dacă **5** creioane şi **3** gume costă **47** lei, atunci **3** creioane costă **12** lei, căci **47 – 5×7 = 12**. Cât costă un creion? **12 : 3 = 4**.

Observații: În problema anterioară, cât şi în cea care urmează, recunoaştem o anumită caracteristică a enunțului: este alcătuit din **3** situații distincte, fiecare relație conținând aceleaşi mărimi (în cele cu **2** mărimi sunt **2** situații distincte). Pentru a reduce problema la una cu două mărimi, e necesar să aplicăm un procedeu de calcul auxiliar: adunarea sau scăderea numerelor, ce reprezintă mărimi de acelaşi fel, din două relații (situații) pentru a obține o egalitate în care **2** termeni sunt aceiaşi ca şi în a treia egalitate: prin scăderea, termen cu termen, a acestor două egalități, obținem valoarea unei singure mărimi.

32. **5** pixuri şi **5** stilouri şi **6** caiete ... **1 216** lei
2 pixuri şi **3** stilouri şi **7** caiete ... **737** lei
3 pixuri şi **2** stilouri şi **9** caiete ... **589** lei.

Adunând ultimele două relații, apoi scăzând suma lor cu a treia, obținem:

5 pixuri şi **5** stilouri şi **6** caiete ... **1 216** lei
5 pixuri şi **5** stilouri şi **16** caiete ... **1 326** lei
10 caiete ... **110** lei.

Cât costă un caiet? **110 : 10 = 11** (lei).

Eliminăm prețul caietelor din primele două relații (obținând o problemă cu **2** mărimi):

5 pixuri şi **5** stilouri ... **1 216 – 6×11 = 1 150** (lei)
2 pixuri şi **3** stilouri ... **737 – 7×11 = 660** (lei).

Pentru a egala primii doi termeni, înmulțim prima egalitate cu **2**, iar pe a doua cu **5**, obținându-se:

10 pixuri şi **10** stilouri ... **2 300** lei
10 pixuri şi **15** stilouri ... **3 300** lei.

Din a doua scădem pe prima:

/ **5** stilouri ... **1 000** lei
1 stilou ... **1 000 : 5 = 200** (lei). **1** pix = ?

Din a doua relație nemodificată (e mai uşor), determinăm prețul pentru **2** pixuri:

2 pixuri şi **3×200** lei ... **660** lei, adică
2 pixuri ... **660 – 600 = 60** (lei)
1 pix costă **60 : 2 = 30** (lei).

33. (Aplicăm regula de trei compusă)

Rezolvarea 1

În asemenea probleme, o mărime (aici numărul de zile) este în raport direct proporțional cu unele (aici, cantitatea de apă) şi în raport invers proporțional cu altele (aici, cu numărul de robinete, numărul de ore), adică:

dacă *mărim* cantitatea de apă, şi numărul de zile necesar *se măreşte* de acelaşi număr de ori (direct proporţional); dacă *mărim* numărul de robinete sau de ore, numărul zilelor necesare *se micşorează* de acelaşi număr de ori (invers proporţional).

Metoda se numeşte *regula de trei compusă*, deoarece, pentru rezolvare, problema se poate despărţi în mai multe probleme, în fiecare aplicându-se regula de trei simplă. Scriem primul şir de date:

Dacă pentru a curge

30 240 litri trebuie **3** robinete, curgând câte **7** ore în **4** zile, (continuăm judecata şi reducem, pe rând, *la unitate*, valorile mărimilor din primul şir, calculând de fiecare dată numărul de zile corespunzător), atunci pentru a curge **1** litru, trebuie un număr de zile de **30 240** ori mai mic, adică:

1 litru tot **3** robinete, câte **7** ore/zi în $\frac{4}{30\,240}$ zile,

1 litru dar **1** robinet, câte **7** ore/zi, într-un timp de **3** ori mai mare decât cel anterior, adică

$$\frac{4}{30\,240} \times 3 = \frac{1}{2\,520} \text{ zile, iar}$$

1 litru **1** robinet, numai câte **1** oră/zi, în câte zile? Într-un număr de zile de **7** ori mai mare decât cel anterior, adică

$$\frac{1}{2\,520} \times 7 = \frac{1}{360} \text{ zile.}$$

Am redus fiecare termen la unitate. Introducem, pe rând, valorile mărimilor din a doua situaţie:

21 600 litri **1** robinet, câte **1** oră/zi, în câte zile? Într-un număr de zile de **21 600** ori mai mare decât cel anterior, adică

$$\frac{1}{360} \times 21\,600 = 60 \text{ zile;}$$

21 600 litri **4** robinete, câte **1** oră/zi, în câte zile? Într-un număr de **4** ori mai mic decât cel anterior, adică **60 : 4 = 15** zile;

21 600 litri **4** robinete, câte **3** ore/zi, în câte zile? Într-un număr de zile de **3** ori mai mic decât **15**, adică: **15 : 3 = 5**.

Răspuns: **5** zile.

<u>Rezolvarea 2</u>

Cele **4** mărimi pot fi reduse la **3**, transformând numărul de zile, din primul şir, în ore: în **4** zile sunt folosite **28** de ore. Scriem datele:

3 robinete	**28** ore	**30 240** litri apă
3 robinete	**1** oră	**30 240 : 28 = 1 080** litri
1 robinet	**1** oră	**1 080 : 3 = 360** litri, atunci:
4 robinete	**1** oră	$\mathbf{4 \times 360 = 1\,440}$ litri,
4 robinete	**3** ore	$\mathbf{1\,440 \times 4 = 4\,320}$ litri.

Dacă prin acelaşi număr de robinete în **3** ore curg **4 320** litri, în câte grupe de câte **3** ore, vor curge **21 600** litri? **21 600 : 4 320 = 5** (grupe = zile).

34. Într-o examinare analitică, enunțul poate fi divizat în mai multe probleme mai simple.

1) Întrebarea pentru prima problemă este: Ce parte din lucrare execută cei **15** muncitori în **8** zile?

Rezolvarea poate fi scrisă astfel:

15 muncitori	în **20** zile	termină o lucrare, notată	**1** L,
15 muncitori	într-o zi		$\frac{1}{20}L$,
15 muncitori	în **8** zile		$\frac{8}{20}L$.

2) Ce parte din lucrare mai rămâne pentru următoarele **30** de zile?

$$1L - \frac{8}{20}L = \frac{12}{20}L.$$

3) Câți muncitori execută $\frac{12}{20}$ din L?

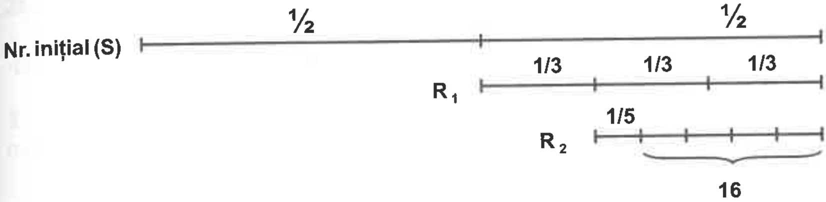
Pentru $\frac{8}{20}L$ este nevoie de **8** zile,	lucrând	**15** muncitori,
$\frac{1}{20}L$	**1** zi,	**15** muncitori,
$\frac{12}{20}L$	**30** zile,	$\mathbf{15 \times 12 : 30}$ muncitori, adică **6** muncitori

4) Câți muncitori au plecat pe alt şantier? **15 – 6 = 9**.
Răspuns: **9** muncitori.

CAPITOLUL AL VIII–LEA

Probleme care se rezolvă prin metoda retrogradă. Rezolvări

1. Rezolvarea 1. *Mers invers pe baza metodei grafice*



Se observă că **16** pepeni reprezintă $\frac{4}{5}$ din restul al doilea. Câți pepeni reprezintă restul al doilea? **16 : 4×5 = 20**. Tot **20** reprezintă $\frac{2}{3}$ din restul **1**. Câți pepeni constituie restul **1**? **20 : 2×3 = 30**. Tot **30** reprezintă $\frac{1}{2}$ din totalul inițial. Câți pepeni erau inițial? **30×2 = 60**.

Rezolvarea 2

Notăm cu S numărul inițial de pepeni, cu V_1, V_2, V_3, numărul de pepeni vânduți de fiecare dată, cu R_1, R_2, R_3, resturile corespunzătoare; se pot scrie:

Cât vinde	Cât rămâne
V_1 $\frac{1}{2}S$	$R_1 = ?$ (30)
V_2 $\frac{1}{3}R_1$	$R_2 = ?$ (20)
V_3 $\frac{1}{5}R_2$	$R_3 = 16$

$$R_2 = 16 + \frac{1}{5}R_2 \Leftrightarrow R_2 = 16 : 4 \times 5 = 20;\ R_2 + \frac{1}{3}R_1 = R_1 \Leftrightarrow R_1 = 30;$$

$$\frac{1}{2}S + R_1 = S \Leftrightarrow \frac{1}{2}S = 30 \Leftrightarrow S = 30 \times 2 = 60.$$

Rezolvarea 3

Modificările se pot trece în tabelul următor:

	Cât vinde	Cât rămâne
1)	$\frac{1}{2}S$	$\frac{1}{2}S$
2)	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$	$\frac{1}{2}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S$;
3)	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}S = \frac{1}{15}S$	$\frac{1}{3}S - \frac{1}{15}S = \frac{4}{15}S$.

Din enunț rezultă că **16** pepeni reprezintă $\frac{4}{15}S$. Câți pepeni erau inițial? **16 : 4×5 = 60** (pepeni).

Rezolvarea 4. *Falsă ipoteză*

Presupunem că producătorul ar fi avut un număr de pepeni divizibil cu **2**, cu **3** şi cu **5**. Fie numărul **30** (cel mai mic multiplu al acestor numere). Vânzările succesive şi resturile sunt:

1) **30 : 2 = 15**; i-au rămas **15**;
2) **15 : 3 = 5**; i-au rămas **10** pepeni, căci **15 – 5 = 10**;
3) **10 : 5 = 2**; i-au rămas **8** pepeni, pentru că **10 – 2 = 8**.

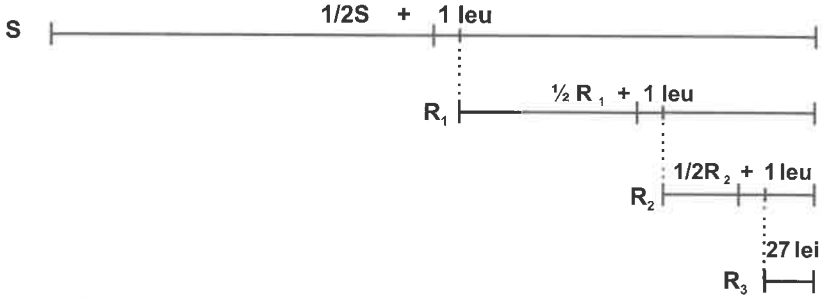
De câte ori i-au rămas mai mult decât am presupus noi? **16 : 8 = 2**. Deci, numărul din ipoteza noastră trebuie mărit de **2** ori, adică **2×30 = 60**.

Dacă am presupune că producătorul ar fi avut **120** pepeni, un alt multiplu de **2**, **5** şi **3**, vânzările succesive şi resturile ar fi:

1) **120 : 2 = 60**; i-au rămas tot **60**;
2) **60 : 3 = 20**; i-au rămas **40**;
3) **40 : 5 = 8**; i-au rămas **32**, de **2** ori mai mult decât în realitate.

Deci, numărul iniţial de pepeni era de **60**, nu de **120**, căci **120 : 2 = 60**.

2. Rezolvarea 1. *Grafic*, modificările în suma elevului sunt:



Câţi lei reprezintă R_2? **(27 +1)×2 = 56.**

Câţi lei reprezintă R_1? **(56 + 1)×2 = 114**. Care era suma iniţială? **(114 + 1)×2 = 230** (lei). Pentru a calcula câţi lei a cheltuit de fiecare dată, sunt două variante; cea mai uşoară este cea în care calculăm aceste valori o dată cu determinarea resturilor, adică: dacă o jumătate din R_2 reprezintă **28** de lei, atunci pe creioane a dat **29** de lei, căci **28 + 1 = 29**. Câţi lei a cheltuit pe un pix? **57 + 1 = 58**. Dar pe caiete? **115 + 1 = 116**.

Rezolvarea 2

Notăm cu S suma iniţială, cu C_1, C_2, C_3, cât a cheltuit de fiecare dată, cu R_1, R_2 şi R_3, resturile succesive; rezultă:

Cât cheltuieşte	Cât rămâne
$C_1 = \frac{1}{2}S + 1$ leu	$R_1 = ?$ (114)
$C_2 = \frac{1}{2}R_1 + 1$ leu	$R_2 = ?$ (56)
$C_3 = \frac{1}{2}R_2 + 1$ leu	$R_3 = 27$ lei

Deci: $C_3 + R_3 = R_2 \Leftrightarrow R_2 = (27 + 1)\times 2 = 56$; $C_2 + R_2 = R_1$, adică: $R_1 = (56 + 1)\times 2 = 114$ (lei); $C_1 + R_1 = S$, adică: $S = (114 + 1)\times 2 = 230$ (lei). (Pentru cealaltă cerinţă, a se vedea modul anterior).

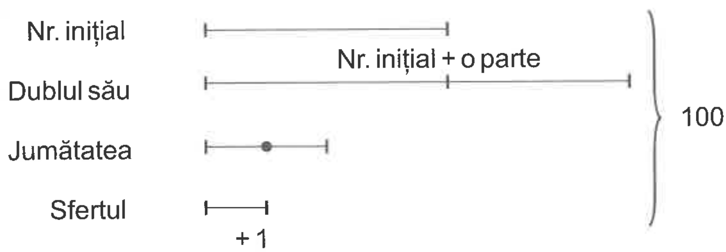
Rezolvarea 3. *Lucrând cu fracții*

Cât cheltuieşte	Cât rămâne
1) $\frac{1}{2}S + 1$ leu	$\frac{1}{2}S - 1$ leu
2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S - 1\text{leu}\right) + 1\text{leu} = \frac{1}{4}S + \frac{1}{2}$ leu;	$\frac{1}{2}S - 1\text{leu} - \left(\frac{1}{4}S + \frac{1}{2}\text{ leu}\right) = \frac{1}{4}S - \frac{3}{2}$ leu;
3) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}S - \frac{3}{2}\text{ leu}\right) + 1\text{leu} = \frac{1}{8}S + \frac{1}{4}$ leu;	$\frac{1}{4}S - \frac{3}{2}\text{ leu} - \left(\frac{1}{8}S + \frac{1}{4}\text{leu}\right) = \frac{1}{8}S - \frac{7}{4}$ leu $= 27$ lei,

de unde $S = \left(27\text{lei} + \frac{7}{4}\text{ leu}\right) \times 8 = 230$ lei.

3. (Aparent este aplicabilă metoda retrogradă, dar este o problemă de sumă şi raport.)

Rezolvarea 1. *Grafic*, modificările numărului de elevi sunt:



Observație: Când dublăm numărul, îi adăugăm o parte, care este egală cu numărul inițial. Câte părți (pătrimi) ar fi în suma obținută? **1 + 2 + 4 + 4 = 11**. Care este suma ce poate fi organizată în **11** asemenea părți? **100 – 1 = 99**. Cât reprezintă un sfert din numărul inițial? **99 : 11 = 9**.

Câți elevi erau în clasă? $4 \times 9 = 36$.

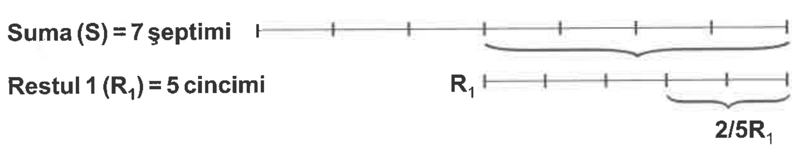
Verificare: **36 + 36 + 18 + 9 + 1 = 100**.

Rezolvarea 2

Fie y numărul de elevi din clasă, se poate scrie:

$$2y + \frac{y}{2} + \frac{y}{4} + 1 = 100 \Leftrightarrow 11y = 396 \Rightarrow y = 396 : 11 = 36.$$

4. Rezolvarea 1. *Grafic*



$2/5R_1 = 12$ lei $+ 24$ lei

Câți lei reprezintă restul **1**? (Sau $\frac{4}{7}$ din suma inițială)? $(12 + 24) \times 5 = 90$.

Câți lei a avut elevul? $90 : 4 \times 7 = 157{,}50$ (lei).

Rezolvarea 2

Tot metoda retrogradă, dar fără reprezentarea grafică:

	Cât a cheltuit	Cât i-a rămas
1)	$\frac{3}{7}S$	$R_1 = ?$
2)	$\frac{3}{5}R_1$	$R_2 = ?$
3)	**12** lei	$R_3 =$ **24** lei.

Deci, $R_2 = 12$ lei + **24** lei = **36** lei; **36** lei + $\frac{3}{5}R_1 = R_1$, adică: $R_1 = 36 : 2 \times 5 = 90$ (lei); **90** lei + $\frac{3}{7}S = S$, adică $S = 90 : 4 \times 7 = 157{,}50$.

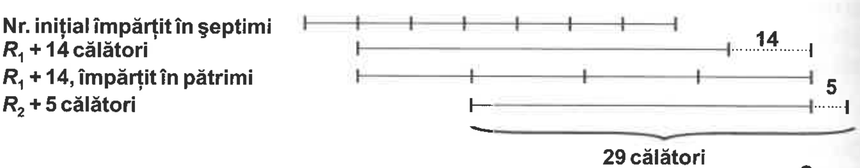
Rezolvarea 3

	Cât a cheltuit	Cât i-a rămas
1)	$\frac{3}{7}S$	$\frac{4}{7}S$;
2)	$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}S = \frac{12}{35}S$	$\frac{4}{7}S - \frac{12}{35}S = \frac{8}{35}S$;

3) $\frac{8}{35}S - 12$ lei $= 24$ lei. Rezultă că suma inițială era de **157,50** lei, căci $(24 + 12) : 8 \times 35 = 157{,}50$.

5. Rezolvarea 1

Modificările în numărul călătorilor din autobuz sunt:



Câți călători reprezintă R_2? $29 - 5 = 24$. Tot **24** călători reprezintă $\frac{3}{4}R_1 +$ + **14** călători. Câți călători reprezintă R_1? $24 : 3 \times 4 - 14 = 18$. Tot **18** călători reprezintă şi $\frac{6}{7}$ din numărul inițial de călători. Câți călători erau la început în Autobuz? $18 : 6 \times 7 = 21$.

Verificare: $21 : 7 = 3$; $21 - 3 = 18$; $18 + 24 = 42$; $32 : 4 = 8$; $32 - 8 = 24$; $24 + 5 = 29$.

Rezolvarea 2

Tot metoda retrogradă, dar fără reprezentarea grafică. Fie T numărul inițial de călători din autobuz (semnificația celorlalte abrevieri este dată în tabelul de mai jos). Se pot scrie:

Au coborât	Au rămas	Au urcat	Sunt
1) $\frac{1}{7}T$	$R_1 = \frac{6}{7}T$	**14** călători	$S_1 = \frac{6}{7}T + 14$ călători
2) $\frac{1}{4}S_1$	$R_2 = \frac{3}{4}S_1$	**5** călători	$S_2 = 29$ călători

Se observă că $R_2 = S_2 - 5$ călători $\Leftrightarrow R_2 = 29$ călători $- 5$ călători $= 24$ călători. $\frac{1}{4}S_1 + 24$ călători $= S_1$; $S_1 = 24 : 3 \times 4 = 32$, adică $\frac{6}{7}T + 14$ călători $= 32$ călători. Atunci, $T = (32 - 14) : 6 \times 7 = 21$.

Rezolvarea 3

	Au coborât	Au rămas	Au urcat	Sunt
1)	$\frac{1}{7}T$	$\frac{6}{7}T$	14 căl.	$\frac{6}{7}T + 14$ căl.
2)	$\frac{1}{4}(\frac{6}{7}T + 14\text{ căl.}) = \frac{6}{28}T + \frac{14}{4}$ căl.;	$\frac{6}{7}T + 14$ căl. $-(\frac{6}{28}T + \frac{14}{4}$ căl.);	5 căl.	?

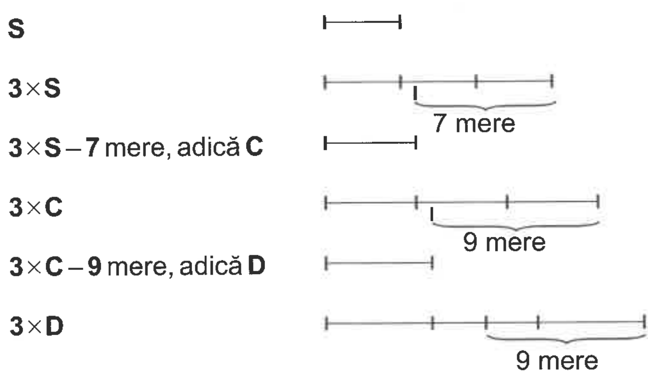
După urcarea celor **5** călători, numărul este:

$$\frac{18}{28}T + \frac{42}{4}\text{ căl.} + 5\text{ căl.} = 29\text{ căl., de unde } \frac{18}{28}T = 29\text{ căl.} - 5\text{ căl.} - \frac{42}{4}\text{ căl.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{18}{28}T = \frac{54}{4}\text{ călători. Atunci, } T = \frac{54}{4}\text{ căl.} : 18 \times 28 = 21\text{ călători.}$$

6. Rezolvarea 1

Fie **S** numărul inițial de mere pe care le avea Mitruț, rezultă reprezentarea grafică:



Câte mere avea Mitruț înainte de a-i lua Vitalie ultimele **9** mere? **9 + 9 = 18**. Câte mere avea înainte de a şi le tripla ultima dată? **18 : 3 = 6**. Câte mere avea Mitruț înainte de a-i lua verişorul său celelalte **9** mere? **6 + 9 = 15**. Care este triplul numărului inițial (adică înainte de a-i lua Vitalie **7** mere)? **5 + 7 = 12**. Câte mere avea Mitruț la începutul jocului? **12 : 3 = 4**.

Răspuns: **4** mere.

Verificare: $4 \times 3 = 12$; $12 - 7 = 5$; $5 \times 3 = 15$; $15 - 9 = 6$; $6 \times 3 = 18$; $18 - 9 = 9$.

Rezolvarea 2

Fie **S** numărul pe care îl avea inițial Mitruț, se pot scrie:

	Are		Cât îi ia	Cu cât rămâne	
	S				
1)	$3S$	–	7 mere =	$R_1 = ?$	(**5** mere);
2)	$3R_1$	–	9 mere =	$R_2 = ?$	(**6** mere);

3) $3R_2$ – 9 mere = $R_3 = 9$ mere. Rezultă:

$3R_2 = 9 + 9 = 18$ (mere); $R_2 = 18 : 3 = 6$ (mere);
$3R_1 = 6 + 9 = 15$ (mere); $R_1 = 15 : 3 = 5$ (mere);
$3S = 5 + 7 = 12$ (mere); $S = 12 : 3 = 4$ (mere).

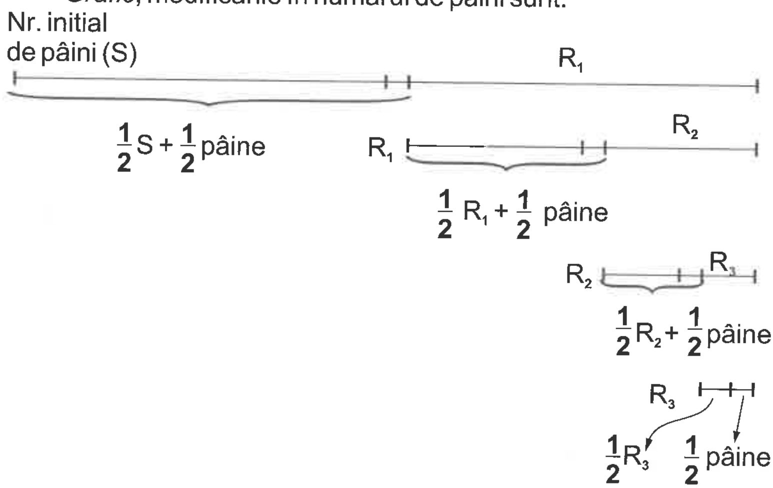
Rezolvarea 3

Fie y numărul de mere la începutul jocului, se pot scrie:

$3[3(3y-7)-9]-9=9 \Leftrightarrow 3[3(3y-7)-9]=9+9=18 \Leftrightarrow 3(3y-7)-9=$ $=18:3=6 \Leftrightarrow 3(3y-7)=6+9=15 \Leftrightarrow 3y-7=15:3=5 \Leftrightarrow 3y=5+7=12; y=4.$

7. Rezolvarea 1

Grafic, modificările în numărul de pâini sunt:



Dacă după ultimul cumpărator pâinea se termină, rezultă că restul al treilea reprezintă o pâine, căci $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Câte pâini reprezintă restul al doilea? $(1 + \frac{1}{2}) \times 2 = 3$ (pâini). Câte pâini au rămas după primul cumpărător? $(3 + \frac{1}{2}) \times 3 = 7$ (pâini). Câte pâini erau inițial? $(7 + \frac{1}{2}) \times 2 = 15$ (pâini).

Rezolvarea 2

Fie T numărul inițial de pâini, C_1, C_2, C_3 şi C_4 cele **4** cumpărături, R_1, R_2, R_3 şi R_4 resturile succesive, se pot scrie:

Au luat	Au rămas
$C_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}$ pâine	$R_1 = ?$ (**7** pâini)
$C_2 = \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}$ pâine	$R_2 = ?$ (**3** pâini)
$C_3 = \frac{1}{2}R_2 + \frac{1}{2}$ pâine	$R_3 = ?$ (**1** pâine)
$C_4 = \frac{1}{2}R_3 + \frac{1}{2}$ pâine	$R_4 = 0$ pâini

"Mergând" în sens invers scrierii relațiilor, rezultă:

$C_4 + R_4 = R_3 \Rightarrow R_3 = \frac{1}{2}\ R_3 + \frac{1}{2}$ pâine $\Rightarrow R_3 = 1$ pâine;

1 pâine $+ \frac{1}{2}$ pâine $+ \frac{1}{2} R_2 = R_2 \Rightarrow R_2 = 3$ pâini;

3 pâini $+ \frac{1}{2}$ pâine $+ \frac{1}{2} R_1 = R_1 \Rightarrow R_1 = 7$ pâini;

7 pâini $+ \frac{1}{2}$ pâine $+ \frac{1}{2} T = T \Rightarrow T = 15$ pâini

Rezolvarea 3

Au luat | Au rămas

1) $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}$pâine | $\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}$pâine

2) $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\text{pâine}) + \frac{1}{2}$ pâine $= \frac{1}{4}\ T + \frac{1}{4}$pâine;

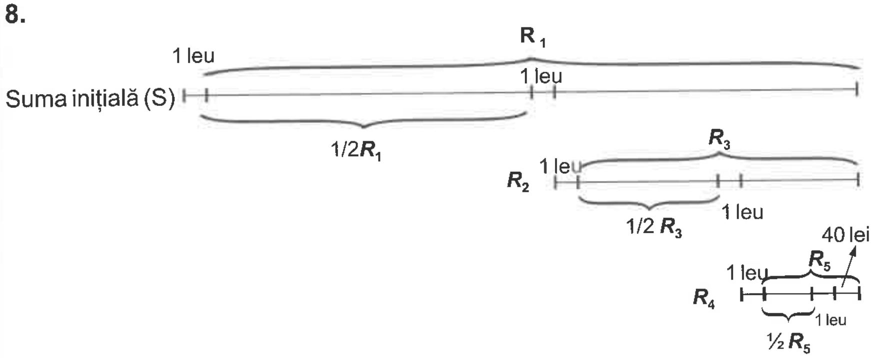
$\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\text{pâine} - (\frac{1}{4}T + \frac{1}{4}\text{pâine}) = \frac{1}{4}T - \frac{3}{4}$ pâine;

3) $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}T - \frac{3}{4}\text{ pâine}) + \frac{1}{2}$ pâine $= \frac{1}{8}T + \frac{1}{8}$ pâine;

$\frac{1}{4}T - \frac{3}{4}\text{ pâine} - \frac{1}{8}T - \frac{1}{8}$ pâine $= \frac{1}{8}\ T - \frac{7}{8}$ pâine;

4) $\frac{1}{2}(\frac{1}{8}T - \frac{7}{8}\text{pâine}) = \frac{1}{2}$ pâine $\Leftrightarrow \frac{1}{16}\ T = \frac{15}{16}$ pâini $\Rightarrow T = 15$ pâini.

8.



Câți lei a avut înainte de a intra în al treilea magazin?
$(40 + 1) \times 2 + 1 = 83$.
Câți lei a avut înainte de a intra în al doilea magazin?
$(83 + 1) \times 2 + 1 = 169$.
Câți lei a avut inițial? **$(169 + 1) \times 2 + 1 = 341$**.

A doua parte a problemei şi verificarea:

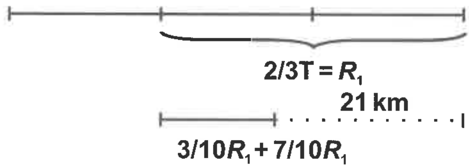
Câți lei a cheltuit în primul magazin (inclusiv leul de la intrare şi cel de la ieşire)? **$1 + (341 - 1) : 2 + 1 = 172$**.

Câți lei i-au mai rămas? **$341 - 172 = 169$**.

Câți lei a cheltuit în al doilea magazin? **$1 + (169 - 1) : 2 + 1 = 86$**.

Cât i-a mai rămas? **169 – 84 = 83**.
Cât a cheltuit a treia oară? **1 + (83 – 1) : 2 + 1 = 43**.
Câţi lei i-au mai rămas după cel de-al treilea magazin? **83 – 43 = 40**.

9. Rezolvarea 1
Tot drumul (T)



Din desen, rezultă că **7** zecimi din $\boldsymbol{R_1}$ reprezintă **21** km.

Atunci, $\boldsymbol{R_1 = 21 : 7 \times 10 = 30}$ (km). Dar $\frac{2}{3}\,T$ reprezintă tot **30** km. Câţi km avea tot drumul? $\mathbf{30 : 2 \times 3 = 45}$.

Rezolvarea 2

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{3}T + 21\text{ km} = \frac{2}{3}T \Leftrightarrow \frac{1}{5}T + 21\text{ km} = \frac{2}{3}T;\ T = 21 : 7 \times 15 = 45.$$

Răspuns: **45** km.

10. Notăm cu ***A*** şi ***B*** cantităţile din primul şi, respectiv, al doilea vas.

Rezolvarea 1

Vasul ***A*** Vasul ***B***

1) Turnăm din ***A*** în ***B*** atât cât conţine ***B***. Dar ***B*** conţine ***B***, deci dublăm cantitatea din ***B***. Rămân:

$A - B$ $\qquad$ $2B$

2) La operaţia a doua, turnăm din **2*B*** în primul vas atât cât conţine acesta acum, adică $A - B$. Înseamnă că dublăm pe $A - B$, care devine $2(A - B)$. Vor fi:

$2(A - B)$ $\qquad$ $2B - (A - B)$

3) La operaţia a treia, turnăm din primul atât cât conţine acum al doilea, adică dublăm $2B - (A - B)$. Vor fi:

$2(A - B) - [2B - (A - B)];$ $\qquad$ $2[2B - 2(A - B)];$

4) La operaţia a patra, dublăm cantitatea existentă în primul vas. Vor fi:

$2\{2(A - B) - [2B - (A - B)]\} = 16$ litri;

$2[2B - (A - B)] - \{2(A - B) - [2B - (A - B)]\} = 16$ litri.

Am ajuns cu ultima operaţie, turnând în primul vas. Pentru calcul, pornim în sens invers operaţiilor.

Înainte de ultima dublare, în primul erau **8** litri, căci **16 : 2 = 8**.

Tot **8** litri reprezintă şi scăzătorul din operaţia ultimă pentru vasul al doilea, adică: $2(A - B) - [2B - (A - B)] = 8$. Atunci, expresia ce reprezintă descăzutul = **24** litri, căci **16 + 8 = 24**.

Deci: $2[2B - (A - B)] = 24$; rezultă $2B - (A - B) = 24 : 2 = 12$, iar $2(A - B) - [2B - (A - B)] = 8$; $2(A - B) = 8 + 12 = 20$; $A - B = 20 : 2 = 10$.

Dacă $2B - (A - B)] = 12$, rezultă $2B = 12 + 10 = 22$, iar $B = 22 : 2 = 11$.

Dacă $A - B = 10$, iar $B = 11$, rezultă $A = 21$, căci $10 + 11 = 21$.

Verificare:

	A	***B***
1)	$21 - 11 = 10$;	$2 \times 11 = 22$
2)	$2 \times 10 = 20$;	$22 - 10 = 12$

$A \qquad\qquad\qquad B$

3) $20-12=8$; $\qquad 2\times 12=24$

4) $2\times 8=16$; $\qquad 24-8=16$.

<u>Rezolvarea 2</u>

După operația a patra, în fiecare vas sunt câte **16** litri. Deci:

A	B
16	16

Dar **16** litri s-au obținut în ***A*** prin dublarea unei cantități, $2\times ?=16$, adică: $16:2=8$. Aceşti **8** litri au fost luați din ***B***.

Câți litri erau în fiecare vas după operația a treia?

$16:2=8 \qquad ?-8=16$, adică $16+8=24$

Cei **24** de litri din ***B*** s-au obținut prin dublarea unei cantități, $2\times ?=24$, adică: $24:2=12$. Aceşti **12** litri au fost luați din ***A***.

Câți litri erau în fiecare vas după operația a doua?

$8+12=20 \qquad 24:2=12$

Cei **20** de litri din ***A*** s-au obținut prin dublarea unei cantități, $2\times ?=20$, adică: $20:2=10$. Aceşti **10** litri au fost luați din ***B***.

În fiecare vas după operația I, erau:

$20:2=10 \qquad 12+10=22$

Cei **22** litri s-au obținut prin dublarea lui **11**, deci transferând **11** litri din ***A***. Inițial, in fiecare vas erau:

$10+11=21. \qquad 22:2=11.$

A doua cerință din ultima parte a problemei: "dacă ar fi avut loc numai **3** asemenea operații, câți litri erau la început în fiecare vas?" poate fi soluționată astfel:

1) A $\qquad$ B

2) A – B $\qquad$ B $\qquad$ 2B

3) 2(A – B) $\qquad$ A – B $\qquad$ 2B – (A – B)

$\qquad$ 2B – (A – B)

$2(A-B)-[2B-(A-B)]=16$ litri; $\qquad 2[2B-(A-B)]=16$ litri.

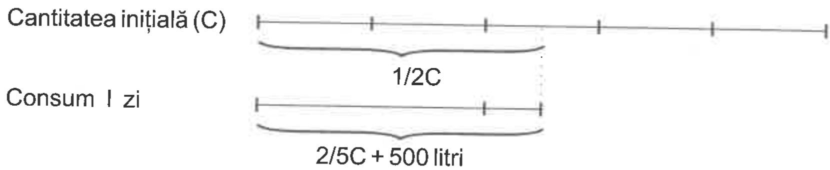
Din ultima operație, rezultă:

$2B-(A-B)=16:2=8$, iar $2(A-B)=16+8=24$; deci $A-B=24:2=12$. Dacă $2B-(A-B)=8$, rezultă $2B=12+8=20$, iar $B=20:2=10$. Dacă $A-B=12$, iar $B=10$, rezultă $A=12+10=22$.

11. <u>Rezolvarea 1</u>

Reprezentăm printr-un segment cantitatea totală de benzină, îl împărțim în cincimi, apoi delimităm cantitatea vândută în prima zi.

Din desenul următor se observă că o jumătate din cantitatea inițială este constituită din **2** cincimi din toată cantitatea plus **500** litri; rezultă că şi cealaltă jumătate este constituită la fel; deci $\frac{2}{5}$ din toată cantitatea + $\frac{2}{5}$ din toată cantitatea + **500** litri + **500** litri = **1 000** litri + $\frac{4}{5}$ din toată cantitatea. Dar orice întreg are **5** cincimi. Rezultă că o cincime din cantitatea inițială de benzină reprezintă **1 000** de litri, iar toată cantitatea era de **5 000** litri, căci **5×1 000 = = 5 000**, ca în desenul:



Rezolvarea 2

Din enunț, rezultă: $\frac{1}{2}C - \frac{4}{10}C = \frac{1}{10}C$. Dar $\frac{1}{10}C$ reprezintă **500** litri.

Toată cantitatea era de **5 000** litri, căci **10×500 = 5 000**.

Observație: Se putea afla ce fracție din întreg reprezintă cei **500** de litri și astfel: o cincime împărțită în două părți la fel de mari = o zecime; deci o zecime din ***C* = 500** litri.

Rezolvarea 3

Notând cu ***y*** cantitatea inițială de benzină, se poate scrie: $\frac{2}{5}y + 500 = \frac{1}{2}y$.

Prin aducere la același numitor, obținem $4y + 5\,000 = 5y$, de unde $y = 5\,000$.

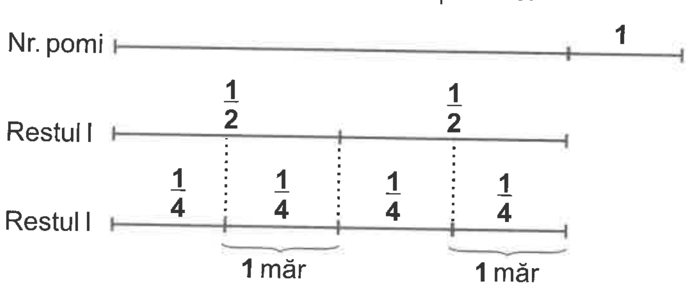
12. Din enunț rezultă: $\frac{3}{4}T - \frac{1}{4}T = 12$ km. Deci, $\frac{2}{4}T$ reprezintă **12** km.

Atunci, tot drumul (***T***) este **24** km, căci **12 : 2×4 = 24** sau **2×12 = 24**.

13. Rezolvarea 1

Reprezentăm numărul merilor printr-un segment, delimităm apoi **1** pom (un măr), apoi o doime din rest și, tot din același rest, o pătrime.

Comparăm o doime din rest cu o pătrime:



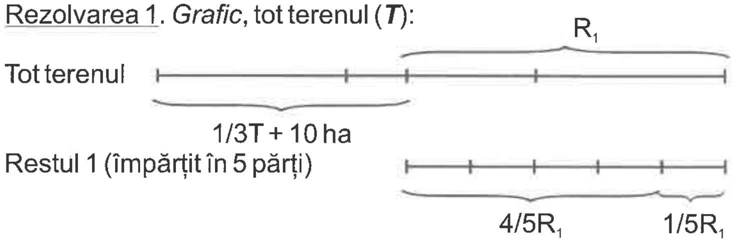
Dacă o doime are **2** pătrimi și dacă o doime reprezintă mai mult decât o pătrime cu un pom, rezultă că o pătrime din restul **1** reprezintă un pom, iar primul rest reprezintă **4** pomi, căci **4×1 = 4**. Numărul de pomi este **5**, căci **4 + 1 = 5**.

Rezolvarea 2

Notăm cu ***y*** numărul inițial al merilor, se poate scrie:

$(y-1):2-1=(y-1):4 \Leftrightarrow 2(y-1)-4=y-1$, adică $y-1=4$. Rezultă $y=5$.

14. Rezolvarea 1. *Grafic*, tot terenul (***T***):



Se observă că în a treia zi s-a recoltat grâul de pe o cincime din restul **1**; această cincime, conform enunțului, este egală cu o optime din tot terenul. Dacă o cincime din primul rest este egală cu o optime din întreaga suprafață, atunci toate cele **5** cincimi (tot restul **1**) cu câte optimi vor fi egale? Cu de **5** ori câte o optime, adică cu **5** optimi.

Rezultă că celelalte **3** optimi din tot terenul reprezintă suprafața de pe care s-a recoltat în prima zi. Dar, suprafața din prima zi era cât o treime din întreg plus **10** ha; deci, sunt două relații echivalente, adică:

$\frac{1}{3}T + 10$ ha $= \frac{3}{8}T$. Rezultă că 10 ha $= \frac{3}{8}T - \frac{1}{3}T = \frac{1}{24}T$.

Câte ha are tot terenul? $24 \times 10 = 240$.

Rezolvarea 2

O altă variantă de rezolvare

Dacă restul **1** reprezintă cât **5** optimi din ***T***, atunci restul **1** plus **10** ha = **2** treimi din ***T***, ceea ce se poate scrie:

$\frac{5}{8}T + 10$ ha $= \frac{2}{3}T \Leftrightarrow \frac{15}{24}T + 10$ ha $= \frac{16}{24}T$.

Rezultă că $\frac{1}{24}T$ reprezintă **10** ha, iar tot terenul are **240** ha, căci $24 \times 10 = 240$.

Pentru ambele variante, răspunsul la întrebarea a doua:

În prima zi s-a recoltat grâul de pe **90** hectare, căci $240:3+10=90$.

În ziua a doua, de pe **4** cincimi din rest, adică $(240-90):5 \times 4 = 120$ (ha).

În a treia zi, restul de **30** ha, adică $240 - 90 - 120 = 30$ sau o optime din **240**, deci $240:8=30$.

Rezolvarea 3

Fie Z_1, Z_2, Z_3 suprafețele recoltate în fiecare din cele **3** zile, R_1, R_2, R_3 resturile succesive din ***T*** (toată suprafața), se pot scrie:

S-a recoltat	A rămas
$Z_1 = \frac{1}{3}T + 10$ ha	$R_1 = \left(\frac{5}{8}T\right)$;
$Z_2 = \frac{4}{5}R_1$	$R_2 = \frac{1}{8}T$;
$Z_3 = R_2 = \frac{1}{8}T$	$R_3 = 0$ ha

Se observă că $Z_2 + R_2 = R_1$, adică $\frac{4}{5}R_1 + \frac{1}{8}T = R_1$. Deci $\frac{1}{8}T = \frac{1}{5}R_1$, iar $R_1 = \frac{5}{8}T$ (acum se completează în tabel cu cât este egal R_1).

Dacă după prima zi a rămas o suprafață egală cu $\frac{5}{8}$ T, înseamnă că în prima zi suprafața recoltată este cât $\frac{3}{8}$ T, căci $T-\frac{5}{8}T=\frac{3}{8}T$.

Rezultă următoarea egalitate:

$$\frac{3}{8}T=\frac{1}{3}T+10\text{ ha}\Leftrightarrow\frac{9}{24}T=\frac{8}{24}T+10\text{ ha}\Rightarrow\frac{1}{24}T=10\text{ ha, iar }T=24\times10=240\text{ (ha)}.$$

Rezolvarea 4

Păstrând notațiile de la modul anterior de rezolvare, se pot scrie:

	S-a recoltat	A rămas
1)	$\frac{1}{3}T+10$ ha	$\frac{2}{3}T-10$ ha;
2)	$\frac{4}{5}(\frac{2}{3}T-10\text{ ha})=\frac{8}{15}T-8$ ha;	$\frac{2}{3}T-10\text{ ha}-\frac{8}{15}T+8\text{ ha}=\frac{2}{15}T-2$ ha;

Acest rest este cât o optime din T, adică $\frac{2}{15}T-2\text{ ha}=\frac{1}{8}T$.

Rezultă $2\text{ ha}=\frac{2}{15}T-\frac{1}{8}T$, iar $T=120\times2=240$ (ha) (prin aducerea fracțiilor la numitorul **120** şi efectuând scăderea se obține $2\text{ ha}=\frac{1}{120}T$).

Pentru cealaltă întrebare, a se vedea rezolvarea **1**.

15. Aparent este aplicabilă metoda retrogradă, dar raționamentul (mai accesibil pentru elevi) este cel din metoda *comparației prin înlocuire pe baza raportului* (a se vedea problemele **1**, **3**, **4**, **5** din capitolul al **VII**-lea).

Rezolvarea 1

Dacă două treimi din primul sector reprezintă cât **4** cincimi din al doilea, rezultă că o treime reprezintă cât **2** cincimi, iar **3** treimi din primul sector reprezintă cât **6** cincimi din sectorul al doilea, căci $2\times3=6$.

Deci, în totalul de **585** ha, primul sector poate fi înlocuit cu **6** cincimi din al doilea.

Dacă **7** zecimi din al treilea sector sunt echivalente cu **4** cincimi din al doilea, o zecime este echivalentă cu $\frac{4}{35}$ din al doilea teren, iar cele **10** zecimi din al treilea sector sunt echivalente cu $\frac{8}{7}$ II. Atunci, **585** ha reprezintă $\frac{117}{35}$ II, căci: $\frac{6}{5}\text{ II}+\frac{5}{5}\text{ II}+\frac{8}{7}\text{ II}=\frac{117}{35}\text{ II}$, iar $\frac{1}{35}$ II reprezintă **5** ha, pentru că $585:117=5$. Dacă $\frac{6}{5}\text{ II}=\frac{42}{35}\text{ II}$, rezultă că primul sector avea inițial **210** ha, căci $5\times42=210$. Dacă $\frac{5}{5}\text{ II}=\frac{35}{35}\text{ II}$, rezultă că al doilea sector avea inițial **175** ha, deoarece $5\times35=175$. Dacă $\frac{8}{7}\text{ II}=\frac{40}{35}\text{ II}$, sectorul al treilea avea **200** ha, căci $5\times40=200$.

Rezolvarea 2

Fie suprafețele celor **3** sectoare ***A***, ***B*** şi, respectiv, ***C***; se pot scrie:

$$A-\frac{1}{3}A=B-\frac{1}{5}B=C-\frac{3}{10}C \Leftrightarrow \frac{2}{3}A=\frac{4}{5}B=\frac{7}{10}C$$

Dacă înmulțim fiecare termen al egalității cu fracții care au ca numitor comun cel mai mic număr care se împarte la numărătorii fracțiilor (adică c.m.m.m.c. al numerelor **2**,**4**,**7**) obținem:

$$\frac{A}{42}=\frac{B}{35}=\frac{C}{40}=\frac{A+B+C}{42+35+40}=\frac{585}{117}$$

Dacă $\frac{A}{42}=\frac{585}{117}$, rezultă că $A=585\times42:117=210$.

Dacă $\frac{B}{35}=\frac{585}{117}$, rezultă că $B=585\times35:117=175$.

Dacă $\frac{C}{40}=\frac{585}{117}$, rezultă că $C=585\times40:117=200$.

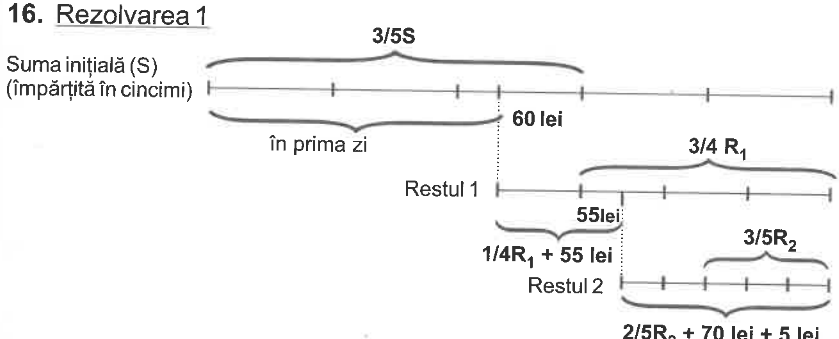
Rezolvarea 3. *O altă variantă a acestui raționament*:

Dacă $\frac{2}{3}A=\frac{4}{5}B=\frac{7}{10}C$, rezultă că A, B şi C sunt invers proporționale cu $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}$, respectiv, A, B şi C sunt direct proporționale cu inversele lor.

Rezultă:

$$\frac{A}{\frac{3}{2}}=\frac{B}{\frac{5}{4}}=\frac{C}{\frac{10}{7}}=\frac{A+B+C}{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{7}}=\frac{585}{\frac{117}{28}};\quad A=140\times3:2=210 \text{ etc.}$$

16. Rezolvarea 1



Se observă că $\frac{3}{5}$ din restul al doilea reprezintă **75** de lei, căci $70+5=75$.

Atunci restul al doilea reprezintă **125** de lei, pentru că $75:3\times5=125$.

Dacă la restul **125** lei adăugăm **55** lei, obținem valoarea a **3** pătrimi din primul rest; restul **1** este **240** lei, deoarece $(125+55):3\times4=240$.

Dacă din **240** lei scădem **60** lei, obținem valoarea a **2** cincimi din suma inițială, adică $240-60=180$ (lei); suma inițială este **450** de lei, căci $180:2\times5=450$.

Verificare:

Restul$_1$: $450:5\times3-60=210$ (lei); $450-210=240$ (lei);

Restul$_2$: $240:4+55=115$; $240-115=125$ (lei);

Restul$_3$: $125-(125:5\times2+70)=5$ (lei).

Rezolvarea 2

Fie S suma inițială, C_1, C_2 și C_3 cele 3 cheltuieli, R_1, R_2 și R_3, resturile succesive, se pot scrie:

A cheltuit	A rămas
$C_1=\frac{3}{5}S-60$ lei	$R_1=?$ (240 lei)
$C_2=\frac{1}{4}R_1+55$ lei	$R_2=?$ (125 lei);
$C_3=\frac{2}{5}R_2+70$ lei	$R_3=5$ lei

Rezultă:

1) 5 lei $+ 70$ lei $+\frac{2}{5}R_2=R_2$; rezultă $R_2=75:3\times5=125$ (lei);

2) 125 lei $+ 55$ lei $+\frac{1}{4}R_1=R_1$; deci $R_1=180:3\times4=240$ (lei);

3) $\frac{3}{5}S-60$ lei $+240$ lei $=S$; $S=180:2\times5=450$ (lei).

Rezolvarea 3

Păstrând notațiile de la modul anterior, se pot scrie:

A cheltuit:	A rămas:
$C_1=\frac{3}{5}S-60$ lei	$\frac{2}{5}S+60$ lei;
$C_2=\frac{1}{4}(\frac{2}{5}S+60\text{ lei})+55\text{ lei}=\frac{1}{5}S+70$ lei	$\frac{2}{5}S+60\text{ lei}-\frac{1}{10}S-70\text{ lei}=\frac{3}{10}S-10$ lei
$C_3=\frac{2}{5}(\frac{3}{10}S-10\text{lei})+70\text{ lei}=\frac{3}{25}S+66$ lei	$\frac{3}{10}S-10\text{ lei}-\frac{3}{25}S-66\text{ lei}=\frac{9}{50}S-76$ lei.

Dar, $\frac{9}{50}S=76$ lei $+ 5$ lei. Atunci suma inițială este 450 lei, căci $81:9\times50=$ $=450$.

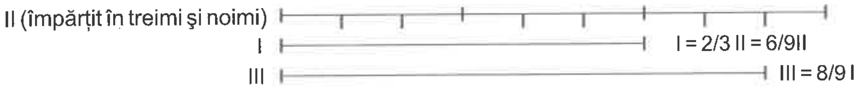
17. Rezolvarea 1 (A se vedea observația de la problema **15**, din acest capitol)

Se observă că: **I** (primul lot) $=\frac{2}{3}$ din suprafața celui de-al doilea (**II**); **III** (suprafața celui de-al treilea lot) $=\frac{8}{9}$ din **II**. Dacă exprimăm suprafețele celorlalte loturi în funcție de suprafața celui de-al doilea, pentru al patrulea lot rezultă: $\mathbf{IV}=\frac{1}{6}(\frac{2}{3}\mathbf{II}+\frac{3}{3}\mathbf{II}+\frac{8}{9}\mathbf{II})=\frac{23}{54}\mathbf{II}$. În total: $\frac{161}{54}\mathbf{II}$, care reprezintă **966** ha.

Atunci: $\mathbf{I}=966:161\times36=216$ (ha); $\mathbf{II}=966:161\times54=324$ (ha); $\mathbf{III}=966:161\times48=288$ (ha); $\mathbf{IV}=966:161\times23=138$ (ha).

Rezolvarea 2

Pentru o reprezentare grafică corectă, ca să putem exprima suprafața primului și a celui de-al treilea în funcție de mărimea suprafeței celui de-al doilea lot, facem următoarea observație: segmentul pentru al doilea să se împartă în mod convenabil în **3** și, respectiv, în **9** părți egale:

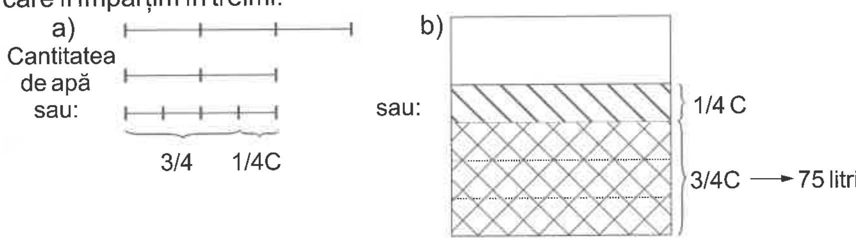


Pentru a exprima suprafața celui de-al patrulea lot care este cât o șesime din suma celorlalte trei, observăm că în această sumă sunt **23** de noimi din suprafața celui de-al doilea. Aflăm a șasea parte din **23** de noimi:

23 noimi : **6** = **3** noimi și **5** șesimi dintr-o noime. Pentru a exprima suma de **966** ha în părți egale, transformăm fiecare noime în șesimi.

Câte asemenea părți (șesimi din noimi) sunt în fiecare lot?
– al doilea lot are **54** de părți, căci $\mathbf{9\times6=54}$;
– primul lot are **36** de părți, căci $\mathbf{6\times6=36}$;
– al treilea lot are **48** de părți, căci $\mathbf{8\times6=48}$;
– al patrulea lot are **23** de părți; în total sunt **161** de asemenea părți. Cât reprezintă o parte? **966 : 161 = 6** (ha). Câte ha are fiecare lot? Primul are **216** ha; căci $\mathbf{36\times6=216}$; al doilea lot are **324** ha, căci $\mathbf{54\times6=324}$; al treilea are **288** ha, deoarece $\mathbf{48\times6=288}$; al patrulea are **138** ha; pentru că $\mathbf{23\times6=138}$.

18. Rezolvarea 1 Reprezentăm capacitatea vasului printr-un segment, pe care îl împărțim în treimi:



Se obsevă că **3** pătrimi din cantitatea de apă era de **100** litri, căci $\mathbf{75:3\times4=100}$. Tot **100** litri reprezintă și **2** treimi din capacitatea vasului.

Câți litri încăpeau în vas? $\mathbf{100:2\times3=150}$ (litri).

Rezolvarea 2

Cât reprezintă o pătrime din **2** treimi din capacitatea vasului? $\mathbf{\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}}$.

Deci, din vas s-a scos apă cât o șesime din capacitatea vasului.

Câte șesimi reprezintă cantitatea rămasă? $\mathbf{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}}$ (din capacitatea vasului). Dacă $\mathbf{\frac{1}{2}}$ din capacitatea vasului reprezintă **75** litri, rezultă că în vas încăpeau **150** litri, căci $\mathbf{2\times75=150}$.

Sau: Dacă apa scoasă reprezintă o pătrime din cantitatea totală de apă care, la rândul ei, reprezintă $\mathbf{\frac{1}{6}}$ din capacitatea vasului, atunci $\mathbf{\frac{3}{4}}$ din cantitatea de apă (ceea ce a rămas) reprezintă $\mathbf{\frac{3}{6}}$ din capacitatea vasului, căci $3\times\mathbf{\frac{1}{6}}=\mathbf{\frac{3}{6}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$ (din capacitatea vasului). Deci în vas încap **150** litri.

19. Din enunț, rezultă că **3** cincimi din prețul dicționarului reprezintă **75** lei. El costa **125** lei, căci $\mathbf{75:3\times5=125}$.

CAPITOLUL AL IX–LEA

Probleme de logică şi perspicacitate. Rezolvări

Problemele de mai jos presupun noţiunea de *interval*: dacă anumite obiecte (arbori, stâlpi etc) sunt dispuse *în mod regulat pe o linie, distanţa care desparte două obiecte se numeşte interval*.

Dacă înmulţim lungimea unui interval cu numărul intervalelor obţinem lungimea totală a liniei.

Dacă trebuie să determinăm numărul obiectelor, distingem mai multe situaţii:

a) obiectele sunt aşezate pe *o linie închisă*;

b) obiectele sunt aşezate pe *o linie deschisă* şi la fiecare capăt punem câte un obiect;

c) obiectele sunt aşezate pe *o linie deschisă*, dar la capete *nu* punem obiecte;

d) obiectele sunt aşezate pe *o linie deschisă*, dar punem un obiect la *unul* dintre capete.

1. Realizaţi un desen şi veţi deduce că pe acea linie închisă (cazul a) s-au plantat atâţia pomi câte intervale de 3 m sunt. Deci: Care este perimetrul figurii dreptunghiulare? **(12 + 9)•2 = 42** (m).

Câte intervale de **3** m se pot obţine din linia închisă de **42** m (câţi pomi s-au plantat)? **42 : 3 = 14** (pomi).

2. Pătratul (o linie închisă) cu latura de **7** m are perimetrul **4×7 = 28** m. Dacă pe această linie sunt **14** stâlpi (numărul de intervale), distanţa dintre primii **2** stâlpi este de **2** m, căci **28 : 14 = 2**.

3. Şoseaua (o linie deschisă) are **5** km = **5 000** m (cazul b). Dacă distanţa dintre **2** stâlpi (un interval) este de **50** de m, iar *la capetele liniei* s-au pus stâlpi, rezultă că *numărul stâlpilor este egal cu numărul intervalelor plus **1***, adică: **5 000 : 50 + 1 = 101** (stâlpi).

Deci: Câte intervale de **50** m sunt în **5 000** m? **5 000 : 50 = 100** (intervale).

Câţi stâlpi sunt? La **100** adăugăm şi stâlpul care marchează începutul şoselei, adică **100 + 1 = 101** (stâlpi).

4. Linia deschisă pe care se plantează un rând de pomi este de: **95 – 2 – 2 = 91** (m).
Câte intervale de **7** m se pot forma din **91** m? **91 : 7 = 13** (intervale).
Câţi pomi sunt plantaţi pe un rând? **13 + 1 = 14** (pomi).
Câţi pomi sunt în acea livadă? **14×15 = 210** (pomi).

5. Linia este deschisă. Câţi pomi sunt pe o parte a bulevardului? **202 : 2 = 101** (pomi).

Câte intervale (egale) sunt între **101** pomi? Deoarece numărul de pomi de pe o linie deschisă este egal cu numărul de intervale plus **1**, rezultă că numărul de intervale de pe **1 000** m este de **100**, căci **101 – 1 = 100**.

Ce distanţă este între **2** pomi alăturaţi? **1 000 : 100 = 10** (m).

6. Linia gardului are pe capete câte un stâlp (cazul c). Deci *numărul de stâlpi* necesari va fi egal cu *numărul intervalelor minus* **1** (pe capete nu mai punem stâlpi noi).

Câte intervale de **2** m sunt în **14** m? **14 : 2 = 7** (intervale).

Câți stâlpi noi sunt necesari? **7 – 1 = 6** (stâlpi noi).

7. Care este perimetrul dreptunghiului? **672 : 4 = 168** (m).

Care este semiperimetrul? **168 : 2 = 84** (m).

Câți m are lățimea? **(84 – 72 : 4) : 2 = 33** (m).

Câte intervale de **3** m se pot forma din **33** m? **33 : 3 = 11** (intervale).

Câți stâlpi sunt necesari pe o lățime? (Numărăm şi stâlpul din capătul lățimii; *într-o variantă*, putem să nu luăm în calcul stâlpii de la cele două capete ale fiecărei lățimi) **11 + 1 = 12** (stâlpi).

Câți stâlpi sunt pe **2** lățimi? **2×12 = 24** (stâlpi).

8. Câte intervale (bucăți de **6** cm) se obțin dintr-o singură bară?

300 : 6 = 50 (bucăți, intervale).

Câte tăieturi se fac pentru a obține **50** bucăți? (Este cazul **c**; diferența dintre cazul **a** şi cazul **c** este de **2** obiecte, tăieturi).

Deci: *Nr.de intervale minus* **1**, căci la ultima tăietură se obțin **2** bucăți (intervale), adică **50 – 1 = 49** (tăieturi).

Câte tăieturi se fac pentru ambele bare? **2×49 = 98** (tăieturi).

9. Câte tăieturi se fac pentru **13** bucăți? Vor fi **12** tăieturi, căci la ultima tăietură se obțin **2** bucăți, adică: **13 – 1 = 12** (tăieturi).

Dacă pentru **12** tăieturi primul muncitor are nevoie de **108** secunde, pentru o singură tăietură sunt necesare **108 : 12 = 9** secunde.

Deoarece **8 < 9**, rezultă că al doilea forestier a câştigat întrecerea.

Sau:

De câte secunde a avut nevoie al doilea muncitor pentru a realiza **12** tăieturi? Dacă pentru o tăietură a avut nevoie de **8** secunde, pentru **12** tăieturi (adică **13** intervale minus **1**) a avut nevoie de **12** ori mai mult decât **8**, adică **12×8 = 96** (secunde).

Deoarece **96 < 108**, rezultă că al doilea forestier a câştigat întrecerea.

10. Dacă Dan ar desface câte o za la unul dintre capetele celor **5** bucăți (dintre cele **6**), ar realiza **5** tăieturi (şi **5** lipituri).

Realizați un desen! Pentru a obține însă unirea celor **6** bucăți printr-un număr *minim* de tăieturi, Dan poate să desfacă cele **4** zale dintr-o singură bucată mică şi să folosească fiecare za pentru a uni capetele a două bucăți, realizând astfel numai **4** tăieturi (**2** capete rămân libere).

11. Deoarece un lănțişor de argint este purtat la gât, el este considerat ca find reparat dacă şi capetele terminale sunt unite (se obține un oval).

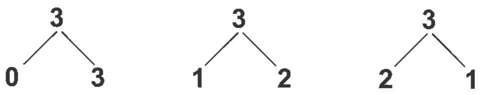
Într-o variantă, trebuie să se desfacă câte o za la capătul fiecărei bucăți pentru a obține un oval (cerc), deci ar realiza **6** tăieturi (şi **5** lipituri).

Dacă ar tăia cele **5** zale din bucata astfel existentă, ar putea folosi fiecare za pentru a obține lănțişorul în formă de oval.

12. În asemenea probleme putem aplica “principiul cutiei” (principiul lui Dirichlet), care poate fi formulat (pe înțelesul tuturor) astfel: dacă avem **2** cutii în care trebuie să distribuim **3** obiecte, adică **2 + 1**, atunci într-o cutie vom distribui cel puțin **2** obiecte;
sau: dacă avem ***n*** cutii în care trebuie să distribuim ***n* + 1** obiecte, atunci *cel puțin* într-o cutie vom pune *cel puțin **2** obiecte*.

Dacă nu ajungem *la o asemenea generalizare*, cum gândim?

Descompunem numărul **3** într-o sumă de **2** termeni, în toate posibilitățile:



Se observă că *nu este posibil* ca *fiecare* cutie să conțină *cel mult o bilă* (căci dacă într-o cutie punem o bilă sau nu punem nici una, cealaltă cutie va conține **2** sau, respectiv, **3** bile). Deci *cel puțin* o cutie va conține *cel puțin* **2** bile.

13. Descompunem numărul **15** în **5** numere distincte, diferite de **0**. Este posibil? Da, căci **1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15**. *Sau*: Punem câte o bilă în fiecare cutie, iar restul de **10** îl descompunem în **4** numere distincte pe care apoi le distribuim în fiecare cutie, începând cu a doua, adică:

1 + (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3) + (1 + 4) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Dacă avem **9** bile în **4** cutii, nu este posibil să nu existe două cutii cu același număr de bile, căci **1 + 2 + 3 + 4 = 10**, iar **9 < 10**.

Deci, **1 + 2 + 3 + 3 = 9**. Dacă avem **7** bile şi **3** cutii, este posibil, căci **7 = 1 + 2 + 4**.

14. Dacă în fiecare cutie sunt bile de toate culorile, rezultă că *în fiecare* sunt *cel puțin* **5** bile.

Dacă trebuie să demonstrăm că sunt **2** cutii cu același număr de bile, *presupunem că nu sunt **2** asemenea cutii*, adică toate cele **11** cutii conțin un număr diferit de bile. În această ipoteză, cel *mai mic* număr total de bile ar fi **110**, căci **5 + 6 + 7 + ... + 15 = 110**
11 (cutii)

În problemă însă numărul total de bile din cele **11** cutii este **109**, cu **1** mai puțin decât **110**, deci presupunerea noastră este falsă (absurdă). Pot fi: **2** cutii cu câte **14** bile, iar celelalte **9** vor avea **5 + 6 + 7 + ... + 12 + 13 = 81**; sau **2** cutii cu câte **5** bile, iar celelalte **9** cutii vor avea **7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + + 13 + 14 + 15 = 99** etc.; pot fi mai multe cutii cu același număr de bile: **2** cu câte **6**, **2** cu câte **11**, **2** cu câte **12**, iar celelalte **5** cutii vor avea **5 + 9 + 10 + + 13 + 14 = 51** bile etc.

15. Rezolvarea 1

Dacă scoatem **2** batiste, nu este posibil să fie ambele de aceeași culoare? Este posibil, dar *nu avem siguranța* (certitudinea) că sunt de aceeași culoare, deoarece este posibil şi ca o batistă să aibă o culoare, iar cealaltă, altă culoare. Dacă scoatem **3** batiste? Este posibil ca toate să aibă aceeași culoare *sau* **2** de o culoare, una de altă culoare sau toate cele **3** să fie *de culori diferite*. Deci nici acum nu avem *siguranța* că am scos **2** batiste de aceeaşi culoare. Dacă scoatem **4** batiste? Dacă am scos **3** batiste de culori diferite (situaţia cea mai nefavorabilă), când mai scoatem încă o batistă, *cu certitudine* ea va avea culoarea *uneia* dintre batistele deja scoase.

Răspuns: Numărul minim este **4** batiste.

Rezolvarea 2

Urmând "principiul cutiei", putem atribui câte o cutie fiecărei culori (în minte). În cazul *cel mai nefavorabil*, când batistele sunt amestecate, este posibil să scoatem ***3** batiste de culori diferite*, adică am scos câte o batistă din fiecare cutie. Când *mai scoatem o batistă* (indiferent de cutia luată în considerare), cu certitudine vom avea scoase *cel puţin* **2** batiste de aceeaşi culoare.

16. Sigur că s-ar putea ca, din întâmplare, să scoatem chiar **9** bile de aceeaşi culoare, luând numai **9** bile. Datorită însă cerinţei de *certitudine*, trebuie să luăm în considerare *situaţia cea mai nefavorabilă*, când am scos cele **2** bile verzi şi câte **8** din celelalte, adică $\mathbf{2 + 4 \times 8 = 34}$ bile, dar tot nu putem fi *siguri* că avem cel puţin **9** bile de aceeaşi culoare.

Câte bile am scos pentru a îndeplini obligaţia de certitudine? $\mathbf{34 + 1 = 35}$ bile.

17. Trebuie să luăm în considerare şi situaţia *cea mai nefavorabilă*, când Rada a luat cele **3** bomboane galbene şi cele **4** bomboane albe, dar tot nu a luat o bomboană roşie. Dacă mai ia o bomboană, cu siguranţă aceea va fi roşie, căci toate celelalte $\mathbf{3 + 4 = 7}$ au fost luate.

Răspuns: $\mathbf{7 + 1 = 8}$ (bomboane).

18. În situaţia *cea mai nefavorabilă*, George a putut scoate **5** cămăşi de alte culori, fără să aibă o cămaşă de culoare albă. Dacă mai scoate una, cu siguranţă ea va avea culoarea albă, celelalte fiind toate scoase din sertar.

Răspuns: $\mathbf{5 + 1 = 6}$ (cămăşi).

19. Pentru a forma o pereche, ne trebuie **2** ciorapi de acelaşi fel din cei $\mathbf{3 \times 2 = 6}$ ciorapi. Putem scoate $\mathbf{1 + 1}$ sau $\mathbf{1 + 1 + 1}$ ciorapi fără a avea siguranţa că **2** sunt de acelaşi fel. Atunci când mai scoatem încă unul, este cert că putem forma o pereche cu un ciorap din cei **3** deja scoşi.

Răspuns: **4** ciorapi, în care avem cel puţin o pereche.

20. Dacă cele **25** de lăzi au mere de trei calităţi, rezultă că le putem grupa în **3** categorii. Dacă fiecare grupă ar avea **9** lădiţe, în total ar fi $\mathbf{3 \times 9 = 27}$ lădiţe, deci prea multe lădiţe. Dacă fiecare grupă ar avea câte **8** lădiţe, în total ar fi $\mathbf{3 \times 8 = 24}$ lădiţe, deci ar mai trebui să existe încă una; vor fi **2** grupe de câte **8** lădiţe şi una cu câte **9** lăzi. Acesta este cazul cel mai nefavorabil, căci pot fi şi alte soluţii: $\mathbf{11 + 7 + 7 = 10 + 8 + 7 = 12 + 11 + 2}$ etc.,în care avem mai mult de **9** lădiţe cu mere de aceeaşi calitate, ba chiar **2** grupe de lădiţe cu mai mult de **9** lădiţe fiecare.

Deci:

1) Câte lădiţe *ar fi* în total, în situaţia în care presupunem că nu sunt **9** asemenea lăzi, ci mai puţine cu **1** în fiecare grupă? $\mathbf{(9 - 1) \times 3 = 8 \times 3 = 24}$ (lădiţe).

2) Pentru ca în total să fie **25** de lăzi este necesar ca măcar (*cel puțin*) **9** lăzi să aibă mere de aceeaşi calitate, căci $\mathbf{2 \times 8 + 9 = 16 + 9 = 25}$ (lăzi), adică $\mathbf{8 + 8 + 9 = 25}$.

21. Rezolvarea 1

Presupunem că nu există **3** astfel de elevi, ci cel mult **2**. Dacă în fiecare lună a anului îşi vor sărbători ziua de naştere **2** elevi, atunci în cele **12** luni ale anului îşi vor sărbători ziua $\mathbf{12 \times 2 = 24}$ elevi. În clasă sunt însă **25** elevi, deci cel de-al **25**-lea îşi va sărbători ziua de naştere împreună cu alți doi elevi.

Rezolvarea 2

Este posibil să folosim principiul lui Dirichlet: fixăm cutiile ca fiind cele **12** luni ale anului, iar obiectele, cei **25** elevi.

În cazul *cel mai nefavorabil*, când avem câte $\mathbf{3 - 1 = 2}$ elevi în fiecare lună (cutie), în total ar fi $\mathbf{12 \times 2 = 24}$ elevi. Al **25**-lea elev urmează să fie “distribuit” în una din lunile anului şi astfel există o lună (o cutie) în care îşi vor sărbători ziua de naştere cel puțin **3** elevi, căci $\mathbf{12 \times 2 + 1 = 25}$.

22. Câte săptămâni are un an? **52** de săptămâni. Presupunem că nu există **2** asemenea elevi, ci numai câte unul îşi serbează ziua de naştere într-o săptămână.

Câte săptămâni ar fi necesare? $\mathbf{53 \times 1 = 53}$ (de săptămâni).

Rezultă că presupunerea făcută este falsă, căci anul are **52** de săptămâni, nu **53**, deci cel puțin **2** elevi au ziua de naştere în aceeaşi săptămână.

23. Presupunem că nu există vreo clasă cu **28** de elevi, ci fiecare are cel mult **27** de elevi. Câți elevi ar fi în total? $\mathbf{30 \times 27 = 810}$ (elevi). Cu câți elevi ar fi mai puțin? $\mathbf{815 - 810 = 5}$ (elevi). Deci cei **5** elevi trebuie să fie “distribuiți” în alte clase, obținând astfel *cel puțin o clasă* cu *cel puțin* **28** elevi.

24. Presupunem că nici un elev nu a rezolvat toate cele **3** probleme, deci fiecare a rezolvat cel mult două. Dacă fiecare reprezentant al şcolii noastre a rezolvat câte **2**, atunci cei **14** elevi au rezolvat în total $\mathbf{14 \times 2 = 28}$ de probleme, cu **2** mai puține decât $\mathbf{11 + 10 + 9 = 30}$, câte probleme au fost rezolvate de cei **14** elevi. Rezultă că *cel puțin un elev* a rezolvat toate cele **3** probleme (În cazul în care toți ceilalți $\mathbf{14 - 2 = 12}$ elevi au rezolvat câte **2** probleme, **2** elevi au rezolvat câte **3** probleme etc.).

25. Oricum am lua **3** numere naturale, în mod obligatoriu *cel puțin două* dintre ele sunt de *aceeaşi paritate* (sunt ambele pare sau ambele impare).

Diferența dintre **2** numere pare sau dintre **2** numere impare este tot un număr par, deci diferența se împarte exact la **2**.

26. Rezolvarea 1

Primul dă mâna cu următorii **6**, deci au loc **6** strângeri de mână. Al doilea dă mâna cu următorii **5** (cu primul deja a dat, adică strângerea de mână cu prima persoană a fost deja numărată). Al treilea dă mâna cu următorii **4**, al patrulea dă mâna cu următorii **3**, al cincilea dă mâna cu următorii **2**, iar al şaselea dă mâna cu al şaptelea (cu toți ceilalți a dat deja mâna, dar strângerile de mână au fost numărate la cei din față).

În total au fost $\mathbf{6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21}$ strângeri de mână.

În general: Dacă sunt n persoane, ele realizează:

$(n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1 = k$ strângeri de mână.

Rezolvarea 2

Numărăm câte strângeri de mână realizează *fiecare* din cele **7** persoane. Fiecare dă mâna cu **6** persoane (nu dă mâna cu sine). În total *ar fi* $\mathbf{7 \cdot 6 = 42}$ de strângeri de mână. Astfel am numărat fiecare strângere de mână de **2** ori (primul cu al doilea sau al doilea cu primul realizează o singură strângere de mână etc.)

În total *au fost* $\mathbf{42 : 2 = 21}$ strângeri de mână.

Generalizare: Dacă sunt n persoane, fiecare realizează $n-1$ strângeri de mână, iar în total au loc $n(n-1) : 2$ strângeri de mână.

27. Dacă au fost n persoane, iar fiecare a realizat $n-1$ strângeri de mână, în total *ar fi fost* $n \cdot (n-1)$ strângeri de mână, dar astfel am numărat fiecare strângere de mână de **2** ori. Atunci *au fost* $n(n-1) : 2$ strângeri de mână. Rezultă $n(n-1) : 2 = 105 \Rightarrow n(n-1) : 2 = 210 \Rightarrow n(n-1) = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7$. Deoarece n şi $n-1$ sunt **2** numere consecutive, grupăm factorii pentru a obține astfel de numere, adică $n(n-1) = 14 \cdot 15 \Rightarrow n = 15$.

Sau: pentru n persoane numărul strângerilor de mână a fost:

$1 + 2 + 3 + ... + n - 1 = 105 \Rightarrow (1 + n - 1) \cdot (n-1) : 2 = 105$. (A se vedea regula de calcul rapid de la exercițiul **10**, din capitolul **I**).

Atunci $n(n-1) = 210 \Rightarrow n = 15$.

28. Câte echipe sunt într-o grupă? $\mathbf{24 : 6 = 4}$ (echipe).

Câte meciuri vor avea loc în fiecare grupă? Dacă fiecare echipă joacă cu celelalte **3**, atunci cele **4** echipe vor juca $\mathbf{4 \times 3 : 2 = 6}$ meciuri;

sau $\mathbf{3 + 2 + 1 = 6}$ meciuri.

Câte meciuri sunt în toate cele **6** grupe? $\mathbf{6 \times 6 = 36}$ meciuri.

29. *Precizări de vocabular*:

Turul unui campionat cuprinde meciurile fiecărei echipe pe care le joacă pe teren propriu (acasă). Cum la un meci iau parte două echipe, într-o etapă sunt **9** meciuri, adică $\mathbf{18 : 2 = 9}$.

În *returul* unui campionat, echipele care au jucat în tur în deplasare joacă pe teren propriu.

Rezolvarea 1

Dacă sunt **18** echipe, iar *în tur* fiecare echipă joacă **17** jocuri (nu joacă cu ea însăşi), în total ar fi $\mathbf{18(18 - 1) = 306}$ meciuri. Dar astfel am numărat fiecare meci din tur de **2** ori (de exemplu meciul dintre formațiile A şi B a fost numărat o dată pentru A, a doua oară pentru B).

Câte meciuri s-au jucat în tur? $\mathbf{306 : 2 = 153}$.

Câte meciuri s-au jucat în tur-retur? $\mathbf{153 + 153 = 306}$ (meciuri).

Rezolvarea 2

Pentru **18** echipe, numărul total de meciuri jucate în tur este:

$\mathbf{17 + 16 + 15 + ... + 2 + 1 = (1 + 17) \cdot 17 : 2 = 153}$.

În campionatul tur-retur s-au jucat $\mathbf{2 \times 153 = 306}$ (meciuri).

Rezolvarea 3

Dacă sunt **18** echipe, pentru ca o echipă să joace *acasă la ea* cu toate celelalte echipe, într-o etapă vor avea loc **9** meciuri, adică **18 : 2 = 9**.

Câte meciuri vor avea loc în **17** etape? $\mathbf{17 \times 9 = 153}$ (meciuri).

Câte meciuri vor avea loc în campionatul tur-retur? $\mathbf{2 \times 153 = 306}$ (meciuri) sau $\mathbf{2 \times 17 \times 9 = 306}$ (meciuri).

30. Fiecare dintre cei **6** prieteni trimite **5** poze, cu una mai puțin decât numărul de prieteni (nu-şi trimite sieşi).

Deci vor fi **6•5 = 30** fotografii schimbate.

În general: dacă sunt n persoane, fiecare trimite $n - 1$ fotografii; în total vor fi necesare $n \cdot (n - 1)$ fotografii.

31. Deoarece numărul total de poze este egal cu $n \cdot (n - 1)$, în care factorii sunt numere consecutive, cu certitudine produsul este număr par.

32. Fie n numărul elevilor. Fiecare elev primeşte $n - 1$ fotografii (nu-şi trimite sieşi). Dacă sunt n elevi şi fiecare a primit câte $n - 1$ fotografii, înseamnă că s-au schimbat în total $n \cdot (n - 1)$ fotografii. Deci $n \cdot (n - 1) = 380$. Deoarece **380 = 2•10•19 = 20•19**, rezultă $n = 20$. În acea clasă erau **20** de elevi.

33. Rezolvarea 1

Fie cele **3** persoane ***a***, ***b*** şi, respectiv, ***c***. Schemele de aşezare pot fi:

1) a; b; c; 2)a; c; b; 3) b; a; c; 4) b; c; a; 5) c; a; b; 6) c; b ; a.

Răspuns: **6** schimbări.

Rezolvarea 2

De fapt, problema cere aflarea numărului de *permutări* ce se pot obține cu această mulțime compusă din **3** persoane.

Ce este o permutare? Este o schimbare sau o modificare care se realizează în modul de aranjare a unei mulțimi ordonate, *păstrând* de fiecare dată *numărul total de elemente*. Modificarea poate să privească **2** sau mai multe (chiar toate) elemente(le). Numărul permutărilor se notează P_n şi este egal cu *n factorial*, adică $n!$; $n!$ este egal cu produsul tuturor numerelor consecutive de la n până la **1**, adică:

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

34. Fiind **4** cifre se pot obține $P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (numere).

Verificați, încercând să obțineți cele **24** de numere prin combinarea celor **4** cifre.

35. a) Deoarece **6 = 1•2•3**, rezultă că am combinat **3** cifre.

b) Deoarece **720 = 6•5•4•3•2•1**, rezultă că am combinat **6** cifre (diferite de zero).

36. Numărul **5 040** nu depinde de cifrele pe care le-am combinat, ci de numărul acestor cifre. Deoarece **5 040 = 7•6•5•4•3•2•1**, rezultă că sunt **7** cifre. Care sunt aceste **7** cifre? Sunt grupe de câte **7** dintre cifrele de la **1** la **9**, adică: de la **1** la **7**; de la **2** la **8**; de la **3** la **9** sau **1**; **3**; **4**; **5**; **6**; **7**; **8** etc.

37. Numerele sunt de forma $\overline{abc}$. Cifra ***a*** poate lua **2** valori: **8** şi **9**; cifra ***b*** poate lua **3** valori: **0**, **8** şi **9**; cifra ***c*** poate lua **3** valori. Numerele vor fi: **809**; **890**; **908**; **980**. Sunt **4** numere.

38. Rezolvarea 1

Cifra ***a*** poate lua **9** valori: de la **1** la **9**; cifrele ***b*** şi ***d*** pot lua **10** valori; de la **0** la **9**; în total vor fi **9•10•10 = 900** numere.

Rezolvarea 2

Cel mai mic număr de forma $\overline{abcd}$ este **1 000**, iar cel mai mare **9 999**. Câte numere cu cifra zecilor **3** sunt? De la **1 000** la **1 100** sunt **10** numere de forma $\overline{ab3d}$, iar de la **1 000** la **2 000** sunt **10•10 = 100** asemenea numere. Atunci de la **1 000** la **9 999** sunt **9•100 = 900** numere de forma $\overline{ab3d}$.

Rezolvarea 3

Câte numere consecutive sunt de la **1 000** la **9 999**? **9 999 – 999 = 9 000** (numere).

Câte numere de la **1 000** la **1 099** nu sunt de forma $\overline{ab3d}$? **100 – 10 = 90**. Rezultă că de la **1 000** la **1 999** sunt **10•90 = 900** asemenea numere, iar de la **1 000** la **9 999** sunt **9•900 = 8 100** asemenea numere (care nu sunt de forma $\overline{ab3d}$). Atunci **9 000 – 8 100 = 900** numere sunt de forma $\overline{ab3d}$.

39. Câte pagini sunt numerotate cu numere de o cifră? Primele **9** pagini.
Câte cifre s-au folosit pentru aceste pagini? **9×1 = 9** (cifre).
Câte pagini sunt numerotate cu numere de **2** cifre? **99 – 9 = 90** (pagini).
Câte cifre s-au folosit pentru paginile de la **10** la **99**? **90×2 = 180** (cifre).
Câte cifre s-au folosit pentru paginile numerotate cu **3** cifre?
(999 – 99)×3 = 2 700 (cifre).
Câte cifre sunt pe primele **999** de pagini? **9 + 180 + 2 700 = 2 889** (cifre).

Câte cifre sunt folosite pentru paginile următoare (numerotate cu **4** cifre)? **3 517 – 2 889 = 628** (cifre).

Câte pagini sunt numerotate cu numere de **4** cifre? **628 : 4 = 157** (pagini).
Câte pagini are cartea? **999 + 157 = 1 156** (pagini).

40. Câte cifre se folosesc pe primele **9** pagini? **9×1 = 9** (cifre).

Câte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor cu numere de **2** cifre? **(99 – 9)•2 = 180** (cifre). Câte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor cu numere de **3** cifre? **[999 – (9 + 90)]•3 = 900•3 = 2 700** (cifre).

Câte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor de la **1 000** la **1 056**? **(1 056 – 999)•4 = 57•4 = 228** (cifre).

Câte cifre sunt necesare în total? **9 + 180 + 2 700 + 228 = 3 117** (cifre).

41. *Observaţie*: A se vedea şi problemele **214** din capitolul al **V**-lea şi **2**, din capitolul al **VI**-lea. Putem concepe un tabel ca la problema de mai sus. Ecuaţia obţinută la Rezolvarea 2 (de mai jos) se mai numeşte *ecuaţie diofantică* (după numele matematicianului Diofant din Alexandria, sec. **III**).

Rezolvarea 1

Se observă că toate trusele au costat o sumă care se termină în zero, căci şi preţul unitar se termină în zero. Atunci **9 176** – $\overline{...0}$ = $\overline{...6}$, deci **1 784•*a*** = $\overline{...6}$. Care număr înmulţit cu **1 784** (adică cu $\overline{...4}$) dă un produs terminat în **6**, produs mai mic decât **9 000**?

Este numărul **4**, căci $\mathbf{1\,784 \times 4 = 7\,136}$. Deci s-au cumpărat **4** pixuri şi **3** truse de creioane, căci: $\mathbf{(9\,176 - 7\,136) : 680 = 2\,040 : 680 = 3}$.

Rezolvarea 2

Notăm cu x numărul de truse şi cu y numărul de pixuri. Din enunţ, rezultă $680x + 1\,784y = 9\,176 \,/ : 8 \Rightarrow 85x + 223y = 1\,147 \Rightarrow x = (1\,147 - 223y) : 85$ $\Rightarrow 223y \leq 1\,147 \Rightarrow y \leq 5$. Se observă că $1\,147 - 223y$ se împarte exact la **5**, adică se termină în **5** sau în **0**. Rezultă $3y = \overline{...7}$ sau $3y = \overline{...2}$.

Deoarece $y \leq 5$, rezultă $3y = \overline{...2}$, iar $y = 4$.

Atunci $x = (1\,147 - 223 \cdot 4) : 85 \Rightarrow x = 3$.

42. Rezolvarea 1

Notăm cu x numărul de bancnote, cu y numărul monedelor de **50** lei, iar cu z numărul monedelor de **20** lei. Rezultă:

1) $x + y + z = 23$, iar $20x + 50y + 20z = 1\,000$;

2) $x, y, z \in \mathbb{N}^*$;

3) deoarece sunt **23** de monede şi bancnote, iar valoarea totală este de numai **1 000** lei, rezultă că trebuie să fie mai multe monede cu valoare mică, deci $x < y < z$;

4) deoarece $1 \times 50 + 1 \times 20 < 100$, $1 \times 50 + 2 \times 20 < 100$, iar $1 \times 50 + 3 \times 20 > 100$, rezultă că $50y = \overline{..00}$, iar $20z = \overline{..00}$, adică y este număr par, iar z este un multiplu de **5**, mai mic decât **25** (numărul total este de **23**);

5) deoarece $200x + 50y + 20z = 1\,000 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow 50y \leq 700 \Leftrightarrow y \leq 14$.

a) dacă $x = 1$, iar $z = 5$, rezultă $y = 23 - 6 \Rightarrow y = 17$ (fals, nu este par);

dacă $x = 1$, iar $z = 5$, rezultă $y = 23 - 1 \Rightarrow y = 12$, *dar*: $200 \times 1 + 12 \times 50 + 10 \times 20 = 1\,000$; dacă $x = 1$, iar $z = 15$, rezultă $y = 7$ (fals);

dacă $x = 1$, iar $z = 20$, rezultă $y = 23 - 21 \Rightarrow y = 2$, *dar*: $200 \times 1 + 2 \times 50 + 20 \times 20 < 1\,000$.

b) dacă $x = 2$, iar $z = 5$, rezultă $y = 16$, *dar* $2 \times 200 + 16 \times 50 + 5 \times 200 > 1\,000$;

dacă $x = 2$, iar $z = 10$, rezultă $y = 11$ (fals);

dacă $x = 2$, iar $z = 15$, rezultă $y = 6$, iar $2 \times 200 + 6 \times 50 + 15 \times 20 = 1\,000$;

dacă $x = 2$, iar $z = 20$, rezultă $y = 1$ (fals).

Valorile **3** şi **4** pentru x nu convin.

Rezolvarea 2

Păstrăm notaţiile de mai sus. Obţinem: $200x + 50y + 20z = 1\,000 \,/ : 10$ $\Rightarrow 20x + 5y + 2z = 100$, iar $x + y + z = 23$, de unde avem $z = 23 - x - y$, iar $20x + 5y + 2(23 - x - y) = 100 \Rightarrow 18x + 3y = 54 \Rightarrow 6x + y = 18$. Deoarece $y \neq 0$, rezultă $6x < 18 \Rightarrow x < 3$. Deoarece $6x$ şi **18** sunt numere pare, rezultă y este număr par.

Dacă $x = 1$, rezultă $y = 12$, iar $z = 10$.

Dacă $x = 2$, rezultă $y = 6$, iar $z = 5$.

43. Rezolvarea 1

Notăm cu x numărul monedelor de **3** lei, cu y numărul monedelor de **5** lei, iar numărul monedelor de **10** lei cu z. Rezultă:

1) $x + y + z = 26$, iar $x, y, z \in \mathbb{N}^*$;

2) $3x + 5y + 10z = 109$;

3) deoarece $10 \times 10 + 1 \times 3 + 1 \times 5 = 108$, rezultă $z < 10$; atunci $x + y > 26 - 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y > 16$;

4) deoarece $x+y \geq 17$, iar $17 \times 3 = 51$, rezultă că $10z \leq 109-51 \Leftrightarrow z \leq 5$;
5) din $5y < 90 \Rightarrow y < 18$;
6) deoarece $10z = \overline{..0}$, rezultă $3x+5y=\overline{..9}$;
7) din $3x+5y=\overline{..9}$ rezultă:
dacă $5y=\overline{..0} \Rightarrow 3x=\overline{.9} \Rightarrow x=\overline{.3}$; dacă $5y=\overline{..5} \Rightarrow 3x=\overline{.4} \Rightarrow x=\overline{.8}$.
Verifică numai $z \in \{1, 3\}$, căci $1 \times 10 + 13 \cdot 3 + [26-(13+1)] \cdot 15 = 109$;
$3 \times 10 + 18 \cdot 3 + (26-21) \cdot 5 = 109$.

Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus. Obținem:

$3x + 5y + 10z = 109$ şi $x + y + z = 26 \Rightarrow x = 26 - y - z$. Prima egalitate devine: $3 \cdot (26 - y - z) + 5y + 10z = 109 \Rightarrow 2y + 7z = 31$. Deoarece **31** este număr impar, iar $2y$ este număr par, rezultă că z este un număr impar.

Deoarece $7z < 31$, rezultă $z < 4 \Rightarrow z \in \{1, 3\}$.

Dacă $z=1$, atunci $2y=31-7 \Rightarrow y=12$, iar $x=13$.

Dacă $z=3$, atunci $2y=31-21 \Rightarrow y=5$, iar $x=18$.

44. Rezolvarea 1

Notăm cu x, y şi, respectiv, cu z numărul monedelor care *se află* în puşculițe. Din enunț rezultă $x=y$, iar $100x+20x+3z=900$ şi $100x : 5 = z \Rightarrow$ $\Rightarrow 100x=5z$. Atunci $x=5$, $z=100$, iar $y=5$. *Sau*:

Dacă $100x : 5 = z \Rightarrow 100x = 5z \,/ : 5 \Rightarrow 20x = z$. Înlocuim totul prin z în sumă şi obținem: $5z+z+3z=900 \Rightarrow z=100$; $x=100:20 \Rightarrow x=5$; $y=5$.

Verificare: $5 \times 100 + 5 \times 20 + 100 \times 3 = 900$; $5=5$;
$5 \times 100 : 5 = 100$; $100 = 100$.

45. A se vedea şi problema **203**, din capitolul al **V**-lea.

Dacă în distribuirea fructelor, bunica respecta raportul inițial dintre numerele celor două feluri de fructe, atunci:
1) Câte mere trebuia să primească fiecare copil la **7** nuci? $7 \times 2 = 14$ (mere).
2) Câte mere trebuia să rămână la grupul de **3** nuci? $2 \times 3 = 6$ (mere)
3) Cu câte mere au rămas mai mult? $42 - 6 = 36$ (mere). De unde provine această diferență? Din faptul că fiecare nepot a primit câte **2** mere, nu **14**.
4) Cu câte mere a primit mai puțin fiecare nepot? $14 - 2 = 12$.
5) Câți nepoți au primit fructe de la bunica? (De la câți nepoți se adună diferența de **36** mere)? Dacă la un nepot au rămas **12** mere, atunci diferența de **36** s-a acumulat de la atâția nepoți de câte ori **12** se cuprinde în **36**, adică $36 : 12 = 3$ (nepoți).

46. Deoarece *în fiecare joc* sunt *numai* ***3*** *tipuri* de probleme (una dificilă, una medie, una uşoară), rezultă că, pentru fiecare joc, cei trei primesc *la un joc* acelaşi punctaj (p). Dacă înmulțim acest punctaj cu numărul de jocuri (n), obținem $16 + 17 = 33$ puncte, adică $n \cdot p = 33 \Rightarrow 3 \times 11 = 33$. Care dintre factorii **3** şi **11** reprezintă numărul de jocuri *şi* care reprezintă punctajul obținut *la un loc* de cei trei copii într-un singur joc? Deoarece fiecare problemă este cotată cu cel puțin **1** punct, iar $1 + 2 + 3 > 3$, rezultă că au fost **3** jocuri, iar punctajul obținut de cei trei după un singur joc este **11**. Notând cu d, m şi, respectiv, cu u punctajul pentru fiecare tip de problemă, putem scrie: $d+m+u=11$, în care $d > m > u$, iar $u \geq 1$. Rezultă $d \leq 11-2-1 \Rightarrow d \leq 8$.

Ținând cont şi de faptul că Alex, după **3** jocuri, a obținut **16** puncte, iar ultimii doi copii au primit împreună **17** puncte, putem concepe un tabel:

Nr.joc	Total	Punctajul pentru:		
		Alex	Bogdan	Cristian
1)	**11** =	**6** +	**4** +	**1**
2)	**11** =	**6** +	**4** +	**1**
3)	**11** =	**4** +	**6** +	**1**

Total **33** = **16** + (**14** + **3**) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ **33** = **16** + **17**.

Răspuns: **3** jocuri, iar punctajul pentru fiecare problemă a fost respectiv: **6**; **4**; **1**.

Mai sunt şi alte soluții? De ce? (Când explicați, aveți în vedere faptul că din trei probleme distincte se pot obține **11** puncte şi deci, pentru a obține **16** puncte, din **3** jocuri, Alex a rezolvat **2** probleme de aceeaşi dificultate).

47. Procedăm astfel:

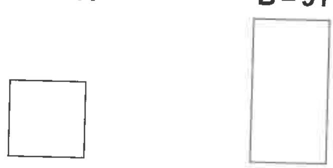
1) umplem vasul de **9** l;

2) luăm de **2** ori din el câte **4** l, separând astfel **1** l, căci $9-2\times4=1$;

3) turnăm acest litru de apă în vasul de **4** l (care a fost golit);

4) umplem vasul de **9** l, din care umplem vasul de **4** l; în vasul de **4** l mai încap **3** l, căci $1+3=4$, iar în vasul de **9** l rămân **6** l, căci $9-3=6$. *Sau*:

A = 4 l **B = 9 l**



1) Umplem de **3** ori vasul A, deşertându-l în B, obținând:
3 l **9 l**

2) Răsturnăm vasul B şi turnăm cei **3** litri din A în B, rezultând:
0 l **3 l**

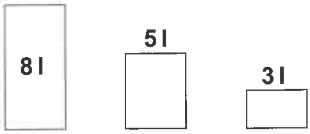
3) Umplem de **2** ori vasul A, deşertându-l în B, în care încap acum numai $9-3=6$ l; în A rămân **2** l, căci $2\times4-6=2$ litri, adică:
2 l **9 l**

4) Răsturnăm vasul B, obținând:
2 l **0 l**

5) Turnăm cei **2** litri din A în B, adică:
0 l **2 l**

6) Umplem vasul A şi îl deşertăm în B, obținând astfel în B cei **6** l, adică:
0 l **6 l**

48. Fie vasele următoare:

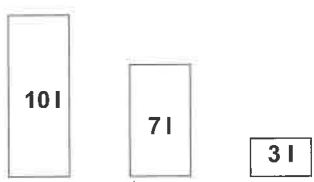


1) 5 l — Rămân:
3 l 5 l 0 l
3 l
2) Rămân:
3 l 2 l 3 l
3) 3 l Vor fi:
6 l 2 l 0 l
2 l
4) Vor fi:
6 l 0 l 2 l
5 l
5) Vor fi:
1 l 5 l 2 l
1 l
6) Vor fi:
1 l 4 l 3 l
3 l
7) Rămân:
4 l 4 l 0 l

Adică: 1) Umple vasul de **5** l din care, apoi, umple vasul de **3** l; 2) Toarnă cei **3** l din vasul mai mic în vasul mai mare în care vor fi **6** l; 3) Răstoarnă cei **3** l din vasul de **5** l în vasul de **3** l; 4) Din vasul de **8** l (acum are **6** l) umple vasul de **5** l; 5) Toarnă din vasul de **5** l un litru în vasul mic unde se obțin **3** l; în vasul mijlociu rămân **4** l, iar în celelalte **1** l şi **3** l, adică **4** l.

49. Pe baza desenului anterior, ne oprim după operația nr. **5**.

50. Fie vasele A, B şi C (vezi figura).



	A	B	C
1) Umplem vasul B din vasul A, obținând:			
2) Umplem vasul C din vasul B. Rezultă:	3 l	7 l	0 l
3) Răsturnăm vasul C în vasul A:	3 l	4 l	3 l
4) Umplem vasul C din vasul B:	6 l	4 l	0 l
5) Răsturnăm vasul C în vasul A:	6 l	1 l	3 l
6) Turnăm litrul din vasul B în vasul C:	9 l	1 l	0 l

7) Umplem vasul B din vasul A:	9 l	0 l	1 l
		7 l	
8) Umplem din vasul B vasul C:	2 l	7 l	1 l
		2 l	
9) Răsturnăm din vasul C în vasul A, obținând:	2 l	5 l	3 l
		3 l	
	5 l	5 l	0 l

51. Fie vasele A şi B.

1) Umplem vasul A din care umplem vasul B, obținând:	10 l		6 l
2) Răsturnăm cei 6 l, iar din cei 4 l din A îi turnăm în B, rezultând:	4 l		6 l
	0 l		4 l
3) Umplem vasul A de la robinet şi turnăm din el în vasul B, în care încap 2 l, obținând:	10 l	2 l	4 l
	8 l		6 l

52. Punem pe un taler greutatea de **1** kg şi împărțim cantitatea de făină pe cele două talere, obținând echilibrul acesteia. Pe talerul cu greutatea vor fi **3** kg de făină, iar pe celălalt **4** kg.

53. Se pune pe un taler masa de **100** g. Apoi se împart pe cele două talere cele **3** kg de ipsos, astfel ca balanța să fie în echilibru. Pe un taler vor fi (**100** g + **3 000** g) : **2** = **1 550** g de ipsos, iar pe celălalt, care are piatra, **1 450** g de ipsos. Se dau deoparte cele **1 550** g de ipsos de pe taler. Ca balanța să fie în echilibru, se mută ipsos de pe un taler pe celălalt .Talerul cu masa de **100** g va conține: (**1 450** + **100**) : **2** – **100** = **775** – **100** = **675** g de ipsos.

54. S-au urcat mai mulți elevi pe cântar, astfel încât au depăşit **200** kg. Ultimul s-a urcat Dan. Diferența dintre cantitatea indicată înainte şi cea pe care a indicat-o cântarul după urcarea lui Dan reprezintă tocmai cât cântăreşte el.

55. Prin două folosiri succesive ale balanței, separăm câte **2,250** kg de zahăr (prima dată **4 500** g). La a treia folosire a balanței, punem pe un taler şi greutatea de **250** grame lângă cele **2,250** kg de zahăr. În acest moment, balanța se va dezechilibra. Ca să o readucem în echilibru, dăm deoparte de pe talerul care are piatra de **250** grame, tocmai **250** g de zahăr. Pe acest taler, rămân **2** kg de zahăr.

56. Din cele **9** monede, formați **3** grupe egale ca număr. Aşezați pe un taler al balanței o grupă, iar pe celălalt altă grupă de **3** monede. Dacă balanța indică egalitate, atunci moneda falsă se află în a treia grupă. Dacă nu, opriți cele **3** monede care au cântărit mai uşor şi dați jos pe celelalte de pe taler. Odată descoperită grupa în care se află moneda falsă, la a doua cântărire, aşezaţi câte o monedă pe fiecare taler. Dacă balanţa a indicat egalitate, moneda falsă este cea care nu a fost cântărită, iar dacă balanţa nu era în echilibru, moneda falsă este cea mai uşoară de pe talere.

57. Din cele **26** de mingi, formaţi **3** grupe: două de câte **9** şi una de **8**. Aşezaţi pe câte un taler al balanţei câte o grupă de **9** mingi. Dacă balanţa indică egalitate, mingea mai grea este în grupa de **8** mingi. Dacă nu, luaţi grupa de **9**, care cântăreşte mai mult, şi o împărţiţi în alte **3** grupe de câte **3** mingi. Prin alte două cântăriri (a se vedea problema anterioară), descoperiţi mingea mai grea.

Dacă după prima cântărire, deduceţi că mingea mai grea se află în grupa de **8** mingi, împărţiţi această grupă în **2** grupe de câte **3** şi una de **2** mingi. Prin cântărirea grupelor de câte **3**, descoperim dacă mingea mai grea se află în aceste grupe sau în grupa de **2**. Printr-o altă cântărire a două din grupa de **3** mingi (sau din grupa de **2** mingi), veţi descoperi mingea mai grea.

58. Pentru a afla câte mere a dat fiecare prietenului lor, trebuie să aflăm câte mere a mâncat fiecare.

Câte mere au împărţit cei patru? **5 + 4 + 3 = 12** (mere).
Câte mere a mâncat fiecare băiat? **12 : 4 = 3** (mere).
Câte mere a dat prietenului lor fiecare dintre cei **3** băieţi?
primul: **5 – 3 = 2** (mere);
al doilea: **4 – 3 = 1** (măr);
al treilea: **3 – 3 = 0** (mere).

Al treilea nu a dat nici un măr, deci nu trebuie să primească nici o nucă. Primii doi împart nucile astfel: cele **3** nuci reprezintă **3** părţi; o parte (o nucă) este luată de al doilea; două părţi (**2** nuci) sunt luate de primul băiat.

59. Cei doi trebuiau să-şi împartă suma de **5** lei după câtă pâine au dat celui de-al treilea.

Câtă pâine a consumat fiecare? $(\mathbf{2+3}):\mathbf{3}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ (adică **5** treimi).

Câte treimi de pâine a avut primul călător? $\mathbf{2}\times\mathbf{3}$ treimi = **6** treimi.
Dar al doilea? $\mathbf{3}\times\mathbf{3}$ treimi = **9** treimi.
Câte treimi de pâine a dat primul celui de-al treilea călător?
6 treimi – **5** treimi = **1** treime.
Dar al doilea? **9** treimi – **5** treimi = **4** treimi.

Câte treimi de pâine au dat cei doi împreună? **1** treime + **4** treimi = **5** treimi (părţi).

Dacă pentru cele **5** părţi au primit **5** lei, pentru fiecare parte au primit câte **1** leu. Deci primul trebuie să primească **1** leu, pentru că a dat o parte (o treime), iar al doilea va primi **4** lei, deoarece a dat **4** părţi (**4** treimi de pâine).

60. Prietenul a pus în grămada de **41** nuci şi nuca sa. Primul copil a luat **(41 + 1) : 2 = 42 : 2 = 21** nuci; al doilea a luat **42 : 3 = 14** nuci; al treilea a luat **42 : 7 = 6** nuci. Împreună au luat **21 + 14 + 6 = 41** nuci, iar prietenul şi-a luat nuca înapoi. (Cum a fost posibil? Ce parte din total, din întreg, voiau să împartă cei trei fraţi? $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}=\dfrac{\mathbf{41}}{\mathbf{42}}$. Deci nuca adăugată de către prieten reprezenta $\frac{1}{42}$ din întreg, care oricum rămânea).

61. Câte părți din total (întreg) voia să împartă Oana? $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{10}{12}$. Câte părți din întreg rămâneau neîmpărțite? $1-\frac{10}{12}=\frac{2}{12}$. Deci sora a mai luat în calcul **2** mere, obținând un total de **12** mere. Fiecare băiat a luat câte **12 : 4 = 3** mere; Oana a luat **12 : 3 = 4** mere; în total ei au primit **3 + 3 + 4 = 10** mere. Veronica a mai avut **2** mere, căci **12 – 10 = 2**.

62. Pe scurt:

1) spicul → **27** cm;

2) rădăcină → cât spicul plus un sfert din rădăcină;

3) tulpina → cât spicul plus rădăcina plus o jumătate din tulpină.

Din relația 2), rezultă că rădăcina va ocupa **27** de cm plus o lungime egală cu un sfert din rădăcină. Dar orice întreg are **4** sferturi; rezultă că **3** sferturi din rădăcină reprezintă **27** cm, adică toată rădăcina va ocupa **27 : 3 × 4 = 36** cm.

Din relația 3), rezultă că tulpina va ocupa **27** cm plus o lungime egală cu o jumătate din tulpină. Dar orice întreg are **2** jumătăți; rezultă că o jumătate din lungimea tulpinii reprezintă **27** + **36** = **63** cm, iar toată tulpina va ocupa **2 × 63 = 126** cm. Lungimea minimă a cartonului necesar va fi:

36 + 126 + 27 = 189 cm = **1,89** m.

63. Rezolvarea 1

Când numărul total de locuri este mic, un astfel de exercițiu-problemă este rezolvat prin *adunări* sau *scăderi succesive*, astfel:

a) **9 + 11 = 20**; **20 + 13 = 33**; **33 + 15 = 48**; **48 + 17 = 65**; **65 + 19 = 84**; **84 + 21 = 105**; **105 + 23 = 128**; deci numărul total de locuri este **105**, fiind **7** rânduri. *Sau*:

b) **128 – 9 = 119**; **119 – 11 = 108**; **108 – 13 = 95**; **95 – 15 = 80**; **80 – 17 = = 63**; **63 – 19 = 44**; **44 – 21 = 23**; **23 – 23 = 0**; deci rândul care s-ar adăuga ar avea **23** locuri; acum sunt **7** rânduri, ultimul rând având **21** de locuri.

Rezolvarea 2

Notam cu ***n*** numărul de locuri din ultimul rând care s-ar mai adăuga. Se ştie că dintr-un număr par de numere impare se obține o sumă pară, iar dintr-un număr impar de numere impare, o sumă impară, adică:

$$\underbrace{\mathbf{9+11+13+\ldots+}\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{a}\text{ termeni}}\mathbf{=128}.$$

Care este valoarea lui ***a*** (Câte numere consecutive impare sunt)? *Sau*: câte rânduri ar avea sala? Dacă şirul începe şi se termină cu un număr impar, rezultă că, de la **9** la ***n***, jumătate dintre numere sunt pare, iar jumătate plus **1** sunt numere impare. De la **1** la ***n*** ar fi ***n*** numere consecutive, iar de la **9** la ***n***, ar fi ***n* – 8** numere consecutive.

Câte numere consecutive impare ar fi, dacă ***a*** = ? Fiind ***n* – 8** numere consecutive, primul fiind **9**, iar ultimul, ***n***, tot un număr impar, vor fi ***a* = (*n* – 9) : 2 + 1** numere consecutive impare (l-am scăzut pe **9**, primul număr impar din şir, pentru ca împărţirea să fie exactă, apoi l-am adăugat). Care *ar fi* ultimul număr din şir, adică n = ? *Sau*: câte locuri *ar avea* ultimul rând?

$$9 + 11 + 13 + ... + n = 128 \Rightarrow \underbrace{(9 + n) + (11 + n - 2) + ...}_{(a-2) \text{ termeni, căci suma este pară.}} = 128$$

Atunci, $a : 2 = [(n - 9) : 2 + 1] : 2$, iar $(n + 9)[(n - 9) : 2 + 1] : 2 = 128$. Rezultă:

$$(9 + n)\left(\frac{n - 9 + 2}{2}\right) : 2 = 128 \Leftrightarrow (9 + n)(n - 7) : 4 = 128 \Leftrightarrow (9 + n)(n - 7) = 512 = 2^9.$$

Se observă că $(9 + n)$ este mai mare decât $(n - 7)$ cu $9 + 7 = 16$.

Dacă $n - 7 = 16$, rezultă $n = 23$, iar $9 + n = 9 + 23 = 2^5$.

Deci $2^5 \cdot 2^4 = 2^9$, $n = 23$, iar $a = (23 - 9) : 2 + 1 = 8$; atunci $a - 1 = 8 - 1 = 7$.
Deci sunt **7** rânduri, ultimul rând avea **21** locuri, în total fiind **105** locuri.

Rezolvarea 3

$$9 + 11 + 13 + ... + n = 128 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9 + (9 + 2 \cdot 1) + (9 + 2 \cdot 2) + ... + [9 + 2(a - 1)] = 128 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{9 + 9 + 9 + ... + 9}_{a \text{ termeni}} + \underbrace{2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2(a - 1)}_{a-1 \text{ termeni}} = 128 \Leftrightarrow$$

$$9a + 2(1 + 2 + 3 + ... + a - 1) = 128 \Leftrightarrow 9a + 2[(1 + a - 1) \cdot (a - 1) : 2] = 128.$$

(Am aplicat regula de calcul rapid la adunarea unor numere consecutive; a se vedea problema **10**, din capitolul **I**).

Rezultă că: $9a + a(a - 1) = 128 \Leftrightarrow a(9 + a - 1) = 128 \Leftrightarrow a(8 + a) = 128 = 2^7$.
Se observă că a este mai mic decât $a + 8$ cu $8 = 2^3$. Atunci $a = 2^3$, iar $a + 8 = 2^4$, adică $a = 8$, iar $a - 1 = 7$. Deci sunt **7** rânduri cu **105** locuri.

64. a) Dacă împărţim cele **4** borcane pline în **3** părţi, în prima grupă vor fi **2** pline, iar în celelalte câte unul plin. Cele **4** borcane umplute pe jumătate le împărţim în **2** părţi, în a doua şi a treia grupă punem câte **2** asemenea borcane, pentru a obţine cantităţi egale, căci **2** jumătăţi formează un întreg (unul plin).

Mai trebuie să obţinem şi acelaşi număr de borcane.

Punem **2** borcane goale în prima grupă şi câte un borcan gol în celelalte două grupe. Deci vor fi:
– în grupa I: **2** pline şi **2** goale; total: **4** borcane şi **2** (cantităţi) întregi;
– în grupa a II-a: **1** plin, **2** umplute pe jumătate şi **1** gol; total: **4** borcane şi **2** (cantităţi) întregi;
– în grupa a III-a: **1** plin, **2** umplute pe jumătate şi **1** gol; total: **4** borcane şi **2** (cantităţi) întregi.

b) După un raţionament asemănător, obţineţi:
– în grupa I: **3** pline, **1** umplut pe jumătate, **3** goale; total: **7** borcane şi $3\frac{1}{2}$ întregi;
– în grupa a II-a: **2** pline, **3** umplute pe jumătate, **2** goale; total: **7** borcane şi $3\frac{1}{2}$ (cantităţi) întregi;

– în grupa a III-a: **2** pline, **3** umplute pe jumătate, **2** goale; total: **7** borcane şi

$3\frac{1}{2}$ (cantităţi) întregi.

65. Fiecare dintre cei trei ar fi putut să numească culoarea fesului lor dacă vedeau în faţa lor (la ceilalţi doi) numai două fesuri albe. Andreea a folosit şi răspunsurile celorlalţi doi. Ea a gândit că dacă ar fi avut fes alb, Sandu ar fi văzut un fes alb şi unul roşu (la Vlad); în cazul în care şi Sandu ar fi avut fes alb, Vlad putea spune că are fes roşu. Ca urmare, Andreea a putut spune că are fes roşu.

66. Se ştie că într-o lună, ziua de sâmbătă cade din **7** în **7** zile. Dacă prima este datată în calendar cu număr impar, următoarea va avea o dată-număr par, căci număr impar plus număr impar (**7**) dă o sumă pară, a treia va fi datată cu un număr impar. Deci zilele de sâmbătă datate cu un număr impar sunt din **14** în **14** zile. Dacă prima zi de sâmbătă este **1** a lunii, următoarea datată cu număr impar va fi pe **15**, căci **1 + 7 + 7 = 15**, iar ultima pe **29**, căci **15 + 7 + 7 = 29**. (Dacă prima zi de sâmbătă din lună este pe data de **2**, atunci numai pe **9** şi pe **23** vor fi zilele de sâmbătă datate cu numere impare; a treia ar fi în luna următoare, căci **23 + 14 > 30**.) Deci pe **29** va fi zi de sâmbătă, pe **28** va fi vineri, pe **27** va fi joi, iar pe **26** va fi zi de miercuri.

67. *Observaţii*:

Din enunţ rezultă:

– omul a cumpărat cel puţin câte o pasăre de fiecare fel (a admite că a cumpărat zero porumbei înseamnă a contrazice logica enunţului);

– numărul potârnichilor este multiplu de (se împarte exact la) **5** mai mic decât **30** (adică **5**; **10**; **15**; **20**; **25**, căci un termen este mai mic, în acest caz, decât suma), iar cel al vrăbiilor este un multiplu de **2** (se pot forma perechi);

– o potârniche a costat $\frac{3}{5}$ de monedă, un porumbel **2** monede, o vrabie $\frac{1}{2}$ de monedă.

Rezolvarea 1

Pe baza observaţiilor de mai sus, formăm grupe de păsări.

Câte păsări ar fi într-*o asemenea grupă*?

5 (potârnichi) + **1** (porumbel) + **2** (vrăbii) = **8** (păsări), cu o valoare de **3 + 2 + 1 = 6** monede.

Câte grupe de **8** se pot forma din cele **30** de păsări? **30 = 8·3 + 6** (deci rămân **6** păsări negrupate).

Până aici putem spune că sunt:

3·5 = 15 potârnichi, în valoare de **3·3 = 9** monede;

3·2 = 6 vrăbii, în valoare de **3·1 = 3** monede;

3·1 = 3 porumbei, în valoare de **3·2 = 6** monede.

Câte monede ar fi costat? **9 + 3 + 6 = 18** (monede) sau **3·6 = 18** (monede).

Câte păsări ar fi fost? **15 + 6 + 3 = 24** (păsări).

Pentru că sunt prea puţine monede (**18** faţă de **30**), considerăm şi că acele **6** păsări (restul de la împărţirea de mai sus sau **30 – 24 = 6**) ca fiind porumbei, care valorează $\mathbf{6 \times 2 = 12}$ monede.

Deci omul a cumpărat:

$\mathbf{3 + 6 = 9}$ porumbei în valoare de $\mathbf{9 \cdot 2 = 18}$ monede;

15 potârnichi, în valoare de $\mathbf{15 : 5 \times 3 = 9}$ monede;

3 perechi (adică **6**) vrăbii, în valoare de $\mathbf{3 \times 1 = 3}$ monede;

În total, a cumpărat $\mathbf{9 + 15 + 6 = 30}$ păsări în valoare de $\mathbf{18 + 9 + 3 = 30}$ monede.

Rezolvarea 2. *Mai multe ipoteze succesive*

Sunt mai multe încercări: a) Presupunem că au fost **5** potârnichi (cu valoare de **3** monede). Restul de până la $\mathbf{30 - 5 = 25}$ păsări au fost porumbei şi vrăbii, în valoare totală de $\mathbf{30 - 3 = 27}$ monede. Presupunem (din nou) că ar fi fost numai porumbei toate cele **25** de păsări. (Pentru calea parcursă, a se vedea problemele de falsă ipoteză din capitolul **VI**). Câte vrăbii ar fi fost?

$\mathbf{(25 \times 2 - 27) : (2 - \frac{1}{2}) = \frac{46}{3}}$, dar $\mathbf{\frac{46}{3}} \notin \mathbf{N}$. b) La fel şi pentru ipotezele **10** sau **25** de potârnichi. c) Presupunem că au fost **15** potârnichi, cu valoare de **9** monede. Restul de $\mathbf{30 - 15 = 15}$ păsări au fost porumbei şi vrăbii, în valoare totală de $\mathbf{30 - 9 = 21}$ monede. Presupunem (din nou) că au fost cumpăraţi numai porumbei (toate cele **15** păsări rămase după prima ipoteză). Câte monede ar valora? $\mathbf{15 \times 2 = 30}$ (monede). Cu câte monede ar fi mai multe? $\mathbf{30 - 21 = 9}$ (monede). Înlocuim câte un porumbel din ipoteza noastră cu câte o vrabie, până dispare diferenţa de **9** monede. Câte înlocuiri vom face, tot atâtea vrăbii au fost. Care este diferenţa de preţ dintre un porumbel şi o vrabie?

$\mathbf{2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}}$ (monede). Câte vrăbii au fost? $\mathbf{9 : \frac{3}{2} = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6}$ (vrăbii).

Câţi porumbei au fost? $\mathbf{15 - 6 = 9}$ (porumbei). Potârnichi au fost **15**.

Sau: Înlocuim câte **2** porumbei cu câte *o pereche* de vrăbii, obţinând:

$\mathbf{9 : (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 9 : 3 = 3}$ (perechi de vrăbii) etc.

Rezolvarea 3

Notând cu $\boldsymbol{x}$ numărul potârnichilor, cu $\boldsymbol{y}$ numărul porumbeilor, cu $\boldsymbol{z}$ numărul de vrăbii, enunţul poate fi redat astfel: $\boldsymbol{x + y + z = 30}$, iar $\boldsymbol{\frac{3}{5}x + 2y + \frac{1}{2}z = 30}$. Înmulţind cu **2** fiecare membru al celei de-a doua egalităţi şi scăzând din ceea ce obţinem prima egalitate, rezultă: $\boldsymbol{\frac{1}{5}x + 3y = 30 \Rightarrow y = 10 - \frac{1}{15}x}$.

Deoarece $\boldsymbol{y} \in \mathbf{N^*}$, rezultă $\boldsymbol{x}$ este multiplu de **15** mai mic decât **30**, adică $\boldsymbol{x = 15}$, iar $\boldsymbol{y = 10 - 1 \Leftrightarrow y = 9; z = 6}$.

Sau:
$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 30 \,/ \cdot 2 \\ \frac{3}{5}x + 2y + \frac{1}{2}z &= 30 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{7}{5}x + \frac{3}{2}z = 30 \Rightarrow z = \left(30 - \frac{7}{5}x\right) \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 20 - \frac{14}{15} \cdot x.$$ Deoarece $\boldsymbol{x = M_{15} < 30}$, rezultă: $\boldsymbol{x = 15}$, $\boldsymbol{z = 6}$, iar $\boldsymbol{y = 9}$.

68. Notăm cu $\boldsymbol{x}$ cantitatea cumpărată de primul copil la preţul de **320** lei/kg şi cu y cantitatea la prețul de **400** lei/kg. Din enunț, rezultă:

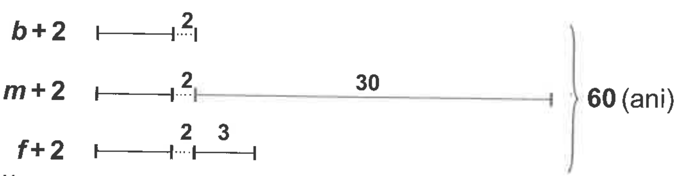
$320x + 400y = 340(x + y)$, unde $x + y < 10$. Prin împărțirea la **10** a fiecărui membru din prima egalitate, obținem: $32x + 40y = 34x + 34y$. Prin împărțirea la **2**, apoi scăzând $(16x + 17y)$, egalitatea devine: $3y = x$. Dacă $y = 1$, atunci $x = 3$; dacă $y = 2$, atunci $x = 6$. Rezultă că fiecare dintre copii putea să cumpere **3** kg de mere de câte **320** lei şi un kg de **400** lei sau **6** kg de câte **320** lei şi **2** kg de câte **400** lei.

69. Se observă că în numărul de **21** nu sunt incluse şi picioarele rațelor care stau jos. Dacă rațele care stau în două picioare sunt cu **3** mai multe decât cele care stau într-un picior, rezultă că $21 - 3 \cdot 2 = 15$ picioare pot fi organizate în **3** părți, fiecare parte fiind egală cu numărul rațelor care stau într-un picior.

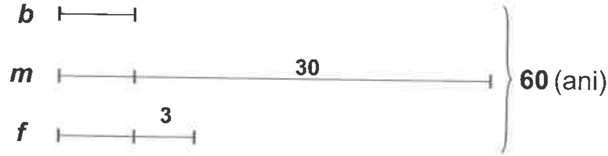
Câte rațe erau într-un picior? $15 : 3 = 5$ (rațe).
Câte rațe stăteau în două picioare? $5 + 3 = 8$ (rațe) sau $(21 - 5) : 2 = 8$.
Câte rațe stăteau jos? $4 - 2 = 2$ (rațe).
Câte rațe se află pe malul lacului? $5 + 8 + 2 = 15$ (rațe).

70. Care dintre copii este mai mare, fiul sau fiica? Deoarece mama avea **27** ani când s-a născut fiica şi **30** ani când s-a născut fiul, rezultă că fata s-a născut înaintea băiatului cu **3** ani, căci $30 - 27 = 3$. Diferența de vârstă dintre cei trei rămâne aceeaşi.

Rezolvarea 1. O reprezentare grafică a vârstelor poate fi:



Sau



$2 + 2 + 2 = 6$ ani

Care este triplul vârstei (actuale) a băiatului? $60 - (30 + 3 + 3 \cdot 2) = 21$ (ani). Câți ani are băiatul? $21 : 3 = 7$ (ani). Dar fiica? $7 + 3 = 10$ (ani). Ce vârstă are mama? $30 + 7 = 37$ sau $27 + 10 = 37$ (ani).

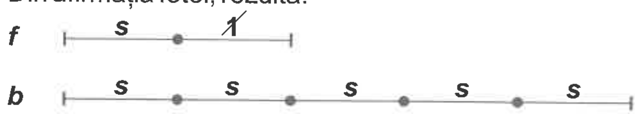
Rezolvarea 2. Notăm vârstele ca mai sus.
Din $b + 30 = m$ şi $f - b = 3$ şi $f + 2 + b + 2 + m + 2 = 60$, rezultă:
$3b + 39 = 60 \Leftrightarrow 3b = 21 \Rightarrow b = 7$; $f = 10$; $m = 37$.

71. Asemănătoare cu problema **30**, din capitolul al **V**-lea.

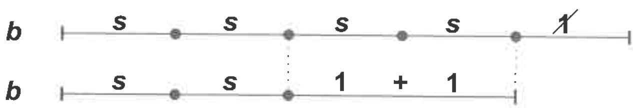
Notăm cu b numărul de băieți, cu f numărul de fete, iar cu s numărul de surori din afirmația fetei. Fata se autoexclude din calculul său (căci nu este soră cu ea însăşi). Ea intră în calculul din afirmația băiatului. La fel şi băiatul, nu este frate cu el însuşi, dar intră în calculul din afirmația fetei.

Rezolvarea 1

Din afirmația fetei, rezultă:



Numărul de băieți minus **1** (din afirmația băiatului) se poate obține dacă repetăm de **2** ori segmentul ce reprezintă numărul de fete. Pentru a stabili mai uşor relația de diferență şi raport, repetăm primul segment astfel: prima parte de **2** ori, apoi de **2** ori câte **1**, adică:

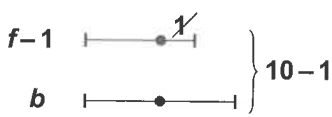


Din desen rezultă că $s = 1$, $f = 2$, iar $b = 5$. Atunci $f + b = 2 + 5 = 7$ (copii).

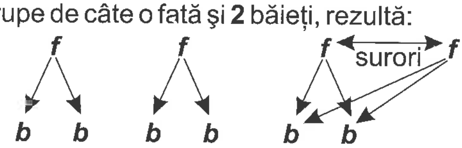
Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus. Avem: $(f - 1) \cdot 5 = b$ şi $b - 1 = 2f$. Rezultă $5f - 5 - 1 = 2f \Leftrightarrow 3f = 6 \Rightarrow f = 2$; $b = 5$.

72. Afirmația: fiecare fată are **2** frați poate fi înțeleasă în două moduri: a) fiecare fată are ca frați doi băieți; b) fiecare fată are ca frați o fată şi un băiat. a) Dacă fiecare fată are ca frați **2** băieți şi numai **2** fete sunt surori (deci frații pentru penultima sunt *aceiaşi* şi pentru ultima fată, adică **2** fete şi **2** băieți sunt frați), rezultă că, dacă din numărul fetelor scădem **1**, obținem jumătate din numărul băieților, adică:

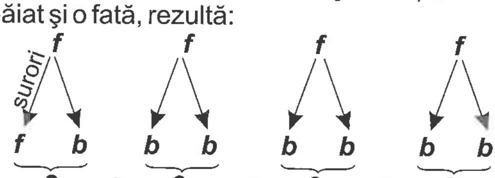


Din desen rezultă că jumătate din numărul băieților este **3**, căci $(10 - 1) : 3 = 3$. Câți băieți erau? $2 \times 3 = 6$ (băieți). Câte fete erau? $3 + 1 = 4$ sau $10 - 6 = 4$ (fete). *Sau*: Notând cu ***f*** o fată, cu ***b*** un băiat şi încercând să obținem grupe de câte o fată şi **2** băieți, rezultă:



$3 + 3 + 3 + 1 = 10$ (copii, dintre care **4** fete)

Sau: Notând cu x numărul de fete, cu y numărul de băieți, din enunț rezultă: $x + y = 10$ şi $(x - 1) \cdot 2 = y \Leftrightarrow 2x - 2 = y$. Prima egalitate devine $x + 2x - 2 = 10 \Leftrightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$; $y = 6$. b) Dacă înțelegem prin *frații unei fete* un băiat şi o fată, rezultă:



$3 + 3 + 3 + 3 = 12$ (copii).

dar **12 > 10**, deci nu sunt soluții. *Sau*: Din explicarea expresiei de mai sus astfel, rezultă că numărul fetelor şi al băieților sunt **2** numere *consecutive* care nu pot avea sumă pară (**10**), ci impară. Deci nu sunt soluții.

73. Rezolvarea pe baza metodei grafice este dificilă. De aceea apelăm la o variantă a metodei mersului invers (a se vedea rezolvarea **2**, problema **1**, din capitolul **VIII**).

Notăm cu C, S, L, I şi, respectiv, P perioadele de viață date în enunț, cu $R_1 - R_4$ perioadele care rămân de fiecare dată şi cu T numărul de ani pe care i-a trăit acel om. Putem scrie:

a trăit	i-a rămas de trăit
1) $C = \frac{1}{13}T$ + **2** ani	$R_1 = ?$ (**70** ani)
2) $S = \frac{1}{7}R_1$ + **6** ani	$R_2 = ?$ (**54** ani)
3) $L = \frac{2}{9}R_2$ + **14** ani	$R_3 = ?$ (**28** ani)
4) $I = \frac{1}{4}R_3$ + **3** ani	$R_4 = ?$ (**18** ani)
5) $P = \frac{1}{6}R_4$ + **15** ani	——

Observație: Dificultatea constă în a traduce în relație matematică ultima perioadă a vieții şi anume "beneficiază de pensie cu **15** ani mai mult decât $\mathbf{\frac{1}{6}}$ din numărul anilor rămaşi până la sfârşitul vieții", adică perioada cât a beneficiat de pensie ($\mathbf{\frac{1}{6}}$ din R_4 plus **15** ani), ceea ce înseamnă că perioada de pensie este R_4 (apoi a murit).

"Parcurgând" un traseu de la sfârşit spre început, în sensul săgeților, rezultă:

1) $\mathbf{R_4 = \frac{1}{6} R_4 + 15}$ ani $\Rightarrow \mathbf{\frac{5}{6} R_4 = 15}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_4 = 15 : 5 \times 6 \Rightarrow R_4 = 18}$ ani; deci **P** = **18**ani;

2) $\mathbf{R_3 = R_4 + \frac{1}{4} R_3 + 3}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_3 = 18}$ ani $\mathbf{+ \frac{1}{4} R_3 + 3}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_3 = 21}$ ani $\mathbf{+ \frac{1}{4} R_3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{\frac{3}{4} R_3 = 21}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_3 = 21 : 3 \times 4 \Rightarrow R_3 = 28}$ ani, iar $\mathbf{I = 28 : 4 + 3 \Rightarrow I = 10}$ ani;

3) $\mathbf{R_2 = R_3 + \frac{2}{9} R_2 + 14}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_2 = 28}$ ani $+$ **14** ani $+ \mathbf{\frac{2}{9} R_2 \Rightarrow R_2 = 42}$ ani $\mathbf{+ \frac{2}{9} R_2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{\frac{7}{9} R_2 = 42}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_2 = 42 : 7 \times 9 \Rightarrow R_2 = 54}$ ani, iar $\mathbf{L = 54 : 9 \times 2 + 14 \Rightarrow L = 26}$ani;

4) $\mathbf{R_1 = R_2 + \frac{1}{7} R_1 + 6}$ ani $\Rightarrow \mathbf{R_1 = 60}$ ani $\mathbf{+ \frac{1}{7} R_1 \Rightarrow R_1 = 60 : 6 \times 7 \Rightarrow R_1 = 70}$ ani, iar

$\mathbf{S = 70 : 7 + 6 \Rightarrow S = 16}$ ani;

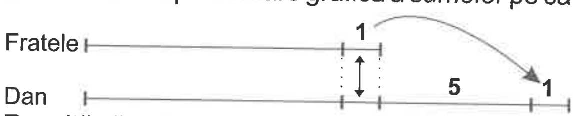
5) $\mathbf{T = R_1 + \frac{1}{13}T + 2}$ ani $\Rightarrow \mathbf{\frac{12}{13}\ T = 72}$ ani $\Rightarrow \mathbf{T = 78}$ ani, iar $\mathbf{C = 78 : 13 + 2 \Rightarrow C = 8}$ ani.

Observație: Problemele care sunt cuprinse în asemenea ...proze versificate (**74 – 79**), deşi sunt mai dificile, sunt mai atractive.

74. Enunțul cuprinde de fapt o glumă a unui pescar care dorea să arate că era priceput şi *în ale cifrelor* şi de aceea le *răsucea*. Deci în prezicerea lui, el se referă la cifre:

– "şase fără cap", adică cifra **6** fără cap devine $\cancel{6}$, deci **0**;
– "la nouă coad-ar lipsi", adică cifra **9** fără coadă devine $\cancel{9}$, deci **0**;
– "opt ar fi pe jumătate" adică cifra **8** pe jumătate devine $\cancel{8}$, deci **0**.
Răspunsul final este zero (peşti).

75. O eventuală reprezentare grafică a *sumelor* pe care le are fiecare ar fi:



Rezultă că Dan ar avea mai mult decât fratele cu **7** lei, căci **1 + 5 + 1 = 7**.

Sau: Deoarece suma fratelui se micşorează cu **1** leu, iar suma lui Dan se măreşte cu **1** leu, atunci diferența inițială de **5** lei se măreşte cu **1 + 1**, adică cu **2** lei.

Sau: Dacă $\mathbf{a - b = 5}$, atunci $\mathbf{(a + 1) - (b - 1) = 5} \pm ? \Leftrightarrow \mathbf{a - b + 2 = 5} \pm ? \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{5 + 2 = 5 + 2}$, deci diferența devine **7**.

76. Un miracol... s-a întâmplat numai pentru cei care nu sunt atenți la "jocul" dintre singularul şi pluralul verbului *a fi*. Când putem spune că *sunt* nuci? Când sunt două sau mai multe. Dar dacă există *o* nucă? *Este* o nucă. Din moment ce după lovirea crengilor pot spune că jos *sunt* nuci, înseamnă că, înainte, în copac, *era o nucă*, iar pe jos *era o nucă*. Când nuca din copac a căzut, pe jos *erau* (sunt) *nuci* (două).

77. a) În rezumat, avem că după plecarea celor **7** plus **5** porumbei, pe casă sau în copac au rămas cât un sfert din întregul stol.

Ce parte (cât) reprezintă porumbeii care au plecat? Dacă pe copac au rămas cât un sfert din întregul stol, iar pe acoperiş tot cât un sfert din acelaşi întreg, rezultă că porumbeii rămaşi reprezintă un sfert plus un sfert = = **2** sferturi = o jumătate din stolul de la început, iar porumbeii plecați, adică **7 + 5 = 12**, reprezintă cealaltă jumătate a stolului inițial. Câți porumbei erau la început în stol? $\mathbf{2 \times 12 = 12 + 12 = 24}$ (porumbei).

b) Dacă în loc de "Pe casă *sau* în copac" avem "Pe casă *şi* în copac", rezultă că porumbeii rămaşi reprezintă *la un loc* un sfert din stolul inițial, iar **7 + 5 = 12** porumbei reprezintă trei sferturi din acelaşi întreg. Câți porumbei ar avea acel stol? $\mathbf{12 : 3 \times 4 = 16}$ (porumbei).

78. (d) Atenție la timpul verbelor!

În rezolvarea acestei probleme, mulți au întâmpinat dificultăți în "traducerea" primului vers. Unii au afirmat că Anton era de aceeaşi vârstă cu Ion (erau de-o seamă), alţii, mai aproape de enunţ, au afirmat că Ion este mai în vârstă decât Anton.

Or, enunţul "Anton *era tot atât de tânăr*" ca Ion se poate traduce clar astfel: cu câţiva ani în urmă (= "mai tânăr"), Anton *avea* vârsta pe care o *are* acum Ion. Dacă notăm vârsta pe care o *are* Anton cu ***a***, iar vârsta pe care o *are* Ion cu ***b***, putem judeca astfel: când Anton *avea* vârsta ***b***, (vârsta actuală a lui Ion), bătrânul Miron *avea* o vârstă egală cu vârstele pe care le *au* cei doi acum împreună, adică ***a + b***. Pe scurt, vârsta lui Anton *era* (nu este) ***b***, iar vârsta bătrânului Miron *era* ***a + b***. Deci bătrânul Miron *era* (este şi va fi, căci diferenţa de vârstă se păstrează) cu ***a*** mai mare decât Anton, deoarece ***a + b > b*** cu ***a***. Dacă *acum* Anton *are* ***a*** ani, diferenţa păstrându-se, bătrânul Miron *are* tot cu ***a*** ani mai mult, deci are ***a + a = 2a*** (ani). Când bătrânul *avea* ***a*** ani, Anton era nou-născut (avea zero ani), căci **a – a = 0**.

Exemplu numeric:

Anton *are* **43** ani, iar Ion *are* **39** ani. Când Anton *avea* **39** ani, bătrânul *avea* suma vârstelor pe care le *au acum* cei doi tineri, adică bătrânul avea **43 + 39 = 82** ani. Cu cât este (a fost şi va fi) mai în vârstă bătrânul Miron faţă de Anton? **82 – 39 = 43** (ani). Ce vârstă *avea* Anton, când Miron *avea* vârsta pe care o *are acum* Anton? Deoarece Anton are **43** ani, iar bătrânul Miron este mai mare decât Anton cu **43** ani, rezultă că Anton avea zero ani (era nou-născut), căci **43 – 43 = 0**.

79. (d) Textul ascunde o problemă mai dificilă, în rezolvarea căreia putem apela la metoda falsei ipoteze în care avem trei mărimi. Înainte de a face vreo altă presupunere, considerăm că numărul grupelor (claselor) cu câte **35** de elevi este egal cu numărul grupelor (claselor) ce au câte **32** de elevi (deci din numărul total de **500** de elevi scădem **3** clase a câte **35** de elevi). Câţi elevi şi câte clase ar fi în total?

a) **500** elevi – **3** × **35** elevi = **395** elevi;

b) **15** clase – **3** clase = **12** clase.

Deoarece faţă de numărul claselor cu câte **30** de elevi nu avem o altă relaţie, *presupunem* că toate cele **12** clase (grupe) au câte **30** de elevi.

Câţi elevi ar fi? **12** × **30 = 360** (elevi).

Cu câţi elevi ar fi mai puţin decât **395**? **395 – 360 = 35** (elevi).

Înlocuim clasele de câte **30** de elevi din ipoteza (presupunerea) făcută cu *grupuri* de clase de câte **35** şi, respectiv, **32** de elevi, până dispare diferenţa de **35**, adică punem câte **2** clase (una cu **32** elevi şi una cu **35** elevi) în loc de **2** clase a câte **30** elevi.

Cu cât se micşorează diferenţa de **35** la o singură înlocuire?

1 × **32 + 1** × **35 – 2** × **30 = 7** (elevi).

Câte asemenea înlocuiri trebuie să facem pentru a dispărea diferenţa de **35** (câte clase de câte **32** elevi sunt)? **35 : 7 = 5** (clase).

Câte clase cu câte **35** de elevi erau? **5 + 3** (cele scăzute la început) = = **8** (clase).

Câte clase cu câte **30** elevi erau? **15 – (8 + 5) = 2** (clase).

(Pentru alte moduri de rezolvare, a se vedea problemele **8** şi **9**, din capitolul al **VI**-lea).

80. Putem rezolva problema, completând tabelul de mai jos (următor) în *ordinea* arătată de numerele scrise în dreptunghiuri (vezi tabelul):

numele/profesia	Croitoru	Zidaru	Lăcătuşu
croitor	nu (**1**)	nu (**6**)	DA (**5**)
zidar	DA (**9**)	nu (**2**)	nu (**4**)
lăcătuş	nu (**8**)	DA (**7**)	nu (**3**)

Dacă Croitoru nu este croitor, Zidaru nu este zidar, iar Lăcătuşu nu este nici lăcătuş, nici zidar, punem cuvântul *nu* în dreptunghiurile **1**, **2**, **3** şi **4**. Rezultă că *Lăcătuşu este croitor*, deci punem cuvântul DA în dreptunghiul **5**. Atunci Zidaru nu mai poate fi croitor (căci este Lăcătuşu), deci punem în dreptunghiul **6** cuvântul *nu*. Dacă *Zidaru* nu este nici zidar, nici croitor, *el este lăcătuş*, deci punem cuvântul DA în dreptunghiul **7**, iar în dreptunghiul **8**, cuvântul *nu*, căci Croitoru nu mai poate fi nici lăcătuş (meseria lui Zidaru). *Croitoru* nefiind nici croitor, nici lăcătuş, *este zidar*, deci punem în dreptunghiul **9** cuvântul DA.

Deci: Croitoru este zidar; Zidaru este lăcătuş; Lăcătuşu este croitor.

81. Putem rezolva problema folosindu-ne de un tabel asemănător celui de la problema anterioară sau judecând astfel:

Dacă Vasile nu are numele de familie nici Vasile, nici Marin, înseamnă că are numele de familie Dumitru (deci *Dumitru* Vasile). Pentru elevii cu prenumele Dumitru şi Marin au rămas numele de familie *Vasile* şi *Marin*; dar Marin nu are numele de familie Marin (din enunţ), atunci avem: *Vasile* Marin, *Marin* Dumitru şi *Dumitru* Vasile.

82. Din p_2 şi p_4, rezultă că al doilea a luat **2 100** lei, iar al patrulea **1 210** lei. Din acestea şi din p_1 şi p_3, rezultă că al treilea a dat **2 600** lei, iar primul a dat **2 300** lei.

83. Dacă presupunem că primul tânăr a apreciat corect primul loc pentru Bogdan, rezultă că afirmaţia celui de-al cincilea este falsă ("primul a fost Alex").

Dacă afirmaţia "primul a fost Alex" este falsă rezultă că a doua afirmaţie a celui de-al cincilea tânăr este adevărată, adică "Bogdan a fost ultimul".

Or, este imposibil: "Bogdan a fost şi primul şi totodată al cincilea".

Dacă numai o afirmaţie este adevărată, rezultă că primul tânăr a afirmat corect numai că Alex a fost al doilea. Atunci afirmaţia celui de-al cincilea tânăr despre Alex este falsă, fiind adevărată numai afirmaţia sa că Bogdan a fost ultimul.

Ce afirmaţii s-au mai făcut despre ultimul loc?

Al patrulea tânăr a afirmat că Emil a fost al cincilea, ceea ce este fals.

Rezultă că al patrulea a arătat corect numai locul lui Dany, adică primul.

Atunci afirmația despre Dany făcută de al treilea tânăr este falsă, fiind adevărată numai afirmația că pe locul patru a sosit Cristi.

Este falsă şi aprecierea despre locul lui Dany din afirmațiile celui de-al doilea tânăr, reținând ca adevărată aprecierea că "Emil a sosit al treilea".

Deci ordinea sosirii a fost: Dany, Alex, Emil, Cristi şi Bogdan.

84. Notăm casele prin inițialele culorilor. Pentru **5** locuri, avem culorile: ***g***, ***a***, ***n***, ***r*** şi ***v***. Din 1) şi 2) rezultă că ***a*** nu poate fi pe locurile **1**, **2** sau **4**, dar poate fi pe locurile **3** sau **5**; avem şi ordinea (***a***,***n***) sau (***n***,***a***).

Din 3) avem ordinea (***n***, ***r***) sau (***r***,***n***) şi *nu avem* (***r***,***v***) sau (***v***,***r***).

Din 2) avem ordinea (***a***,***n***,***r***).

Cum ordinea (***r***,***v***) sau (***v***,***r***) nu convine, rezultă că ***v*** este pe locul **2** (sau: dacă ***v*** ar fi pe ultimul loc, ***a*** ar fi vecină cu casa din mijloc, ceea ce nu convine).

Deci ordinea caselor este: galbenă, verde, albă, neagră şi roşie (se observă că în mijloc se află casa albă, deci "nu este vecină cu casa din mijloc").

85. Din relația 2) rezultă că după casa D urmează casa A.

Din relația 1) avem: casa C poate fi pe locurile **1**, **2**, **4** sau **5**, dar din 3) rezultă că această casă nu este nici pe extreme (pe margini).

Dacă distanța EC este egală cu distanța CD rezultă că ordinea primelor patru case era: E, C, D, A. Casa B este la urma şirului, căci dacă ar fi în față, casa C ar fi la mijloc, ceea ce nu convine.

Deci ordinea caselor este: E, C, D, A, B.

86. În privința Anei, avem două situații:

1) dacă Ana spune adevărul despre Barbu, înseamnă că acesta minte;

2) dacă Ana minte, înseamnă că Barbu spune adevărul.

Din moment ce Dan (în ultima propoziție) spune că Ana *sau* Barbu minte, rezultă că Dan spune adevărul, iar afirmația anterioară a lui Barbu despre Dan este falsă. Deci Barbu minte. Dacă Barbu minte, rezultă că Ana spune adevărul (despre Barbu).

Răspuns: Ana *şi* Dan spun adevărul, iar Barbu minte.

87.

$$\boxed{\text{cel din poză}} \xrightarrow[\text{fiu}]{\text{este}} \boxed{\text{tatăl}} \xrightarrow[\text{fiu}]{\text{este}} \boxed{\text{cel care vorbeşte (Barbu)}}$$

Rezultă că fotografia reprezintă pe nepotul celui care vorbeşte (Barbu îi este bunic).

88. Dacă figura nu este nici a vreunui frate nici a vreunei surori şi totuşi este figura unui copil al părinților celui care vorbeşte, rezultă că în tablou este figura celui care vorbeşte.

89. Câte grămezi a vândut în ziua anterioară prima femeie şi câți lei a încasat? **210 : 7 = 30** (grămezi); **30** $\times$ **50 = 1 500** (lei).

Dar cealaltă? **210 : 3 = 70** (grămezi); **70** $\times$ **50 = 3 500** (lei).

Câți lei a încasat femeia în ultima zi?

(210 + 210) : 10 × 100 = 420 : 10 × 100 = 42 × 100 = 4 200 (lei).

Câți lei trebuia să încaseze, dacă vindea prunele ca în ziua precedentă? **1 500 + 3 500 = 5 000** (lei).

Câți lei a pierdut (care este paguba)? **5 000 – 4 200 = 800** (lei).

Din ce cauză s-a produs paguba? Din moment ce prima femeie avea **30** de grămezi de câte **7** mere, înseamnă că numai **30** de grămezi din prunele celei de-a doua femei trebuiau vândute la un loc, iar restul până la **70** de grămezi (câte putea să realizeze ea din **210** prune grupându-le câte **3**), adică **70 – 30 = 40** grămezi de prune trebuiau vândute câte **3** la **50** lei şi se încasau astfel **30 × 100 + 40 × 50 = 3 000 + 2 000 = 5 000** lei. Ea a vândut cele **40 × 3 = 120** prune ale sale (restul) la un preț mai mic, deoarece şi pe acestea le-a grupat câte **10** la **100** lei, încasând astfel **30 × 100 + 120 : 10 × 100 = = 3 000 + 1 200 = 4 200** lei, pierzând astfel **5 000 – 4 200 = 800** lei (sau **40 × 50 – 12 × 100 = 800** lei).

Câți lei a primit fiecare, dacă paguba a fost suportată "pe din două"?
prima femeie: **1 500 – 800 : 2 = 1 500 – 400 = 1 100** lei;
a doua femeie: **3 500 – 800 : 2 = 3 500 – 400 = 3 100** (lei).

90. a) *Particularizare*

Luăm un exemplu: fie $t = 8$ ore, timpul în care parcurgem cu bicicleta distanța d. Pentru jumătate din distanță, avem nevoie de **8 : 2 = 4** ore, viteza fiind constantă (medie). Când ne deplasăm cu maşina, în loc de **4** ore, ne trebuie un timp de **4** ori mai mic, adică **4 : 4 = 1** oră, căci viteza este de **4** ori mai mare. Când mergem pe jos, în loc de **4** ore, ne trebuie un timp de **2** ori mai mare, adică **4 × 2 = 8** ore, căci viteza este de **2** ori mai mică. În total, în loc de **8** ore, ne trebuie **1 + 8 = 9** ore. Deci ne deplasăm mai repede, dacă parcurgem distanța d numai cu bicicleta, căci **9 > 8**.

b) *Generalizare*

Dacă atunci când ne deplasăm cu bicicleta parcurgem $\frac{1}{2}d$ cu viteza v în $\frac{1}{2}t$, rezultă:

– când ne deplasăm cu maşina, parcurgem $\frac{1}{2}d$ cu viteza maşinii $v_m = 4v$ într-un timp de **4** ori mai mic decât $\frac{1}{2}t$, adică în $\frac{1}{2}t : 4 = \frac{1}{8}t$ (căci dacă *viteza creşte* de un număr de ori, *timpul* necesar parcurgerii aceleiaşi distanțe *se micşorează* de acelaşi număr de ori);

– când ne deplasăm pe jos, parcurgem $\frac{1}{2}d$ cu viteza $v_p = v : 2$ într-un timp *de 2 ori mai mare* decât $\frac{1}{2}t$, adică în $\frac{1}{2}t \cdot 2 = t$.

Deci pentru toată distanța d, cu bicicleta ne trebuie timpul t, iar când mergem cu maşina, apoi pe jos, ne trebuie $\frac{1}{8}t + 1t = 1\frac{1}{8}t$. Deoarece $1\frac{1}{8}t > t$, rezultă că ne deplasăm mai repede dacă parcurgem toată distanța numai cu bicicleta.

91. Notăm numerele din a doua situație cu $a_1, a_2, a_3, ..., a_{12}, a_{13}$. Din enunț rezultă: $(a_1 + a_2 + ... + a_{12} + a_{13}) : 13 = 7 \Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{12} + a_{13} = 13 \times 7 = 91$.

Care sunt numerele naturale distincte nenule cu suma **91**?

Pentru început adunăm cele mai mici numere, începând cu **1** până la **10**, adică **1 + 2 + 3 + ... + 9 + 10 = 55**; apoi: **55 + 11 = 66**; **66 + 12 = 78**; **78 + 13 = 91**. Deci numerele sunt de la **1** la **13**. Suma numerelor din prima situatie este **91 + 1 = 92**. Deoarece **92 – 91 = 1**, iar **14 – 13 = 1**, luăm numerele de la **1** la **12**, îl excludem pe **13** şi îl înlocuim cu **14**, adică **78 + 14 = 92**.

Deci numerele pot fi: **1, 2, 3, 4**, ..., **11, 12, 14** etc.

92. Cu siguranță, sunt necesare piese de **1** g şi de **2** g. Cu ele putem cântări şi mase de **3** g. Pentru a cântări **4** g, ne trebuie o piesă de **4** g; cu acestea putem cântări şi mase de: **5** g = **4** + **1**; **6** g = **4** + **2**; **7** g = **4** + **2** + **1**.

Pentru a cântări o masă de **8** g, ne trebuie o piesă de **8** g; cu piesele de până acum putem cântări şi mase de: **9** g = **8** + **1**; **10** g = **8** + **2**; **11** g = **8** + **2** + **1**; **12** g = **8** + **4**; **13** g = **8** + **4** + **1**; **14** g = **8** + **4** + **2**; **15** g = **8** + **4** + **2** + **1**.

Pentru a cântări o masă de **16** g, ne trebuie o astfel de piesă de **16** g; cu piesele de până acum putem cântări orice greutate de la **16** la **31** g, pentru ultima, combinăm astfel: **1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31**. Urmează piesa de **32** g etc.

Până aici am stabilit piesele: **1** g; **2** g; **4** g; **8** g; **16** g; **32** g ...

Cum putem descoperi următoarea piesă fără a mai efectua asemenea calcule? Nu descoperiți o regulă (o cheie)? Primul număr este **1**, al doilea **2**. Ce relație se poate stabili între aceste două numere şi numărul următor, **4**?

(1 + 2) + 1 = 3 + 1 = 4. Mai departe este valabilă? Da:
(1 + 2 + 4) + 1 = 7 + 1 = 8; (1 + 2 + 4 + 8) + 1 = 15 + 1 = 16;
(1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1 = 31 + 1 = 32.
Următoarele piese sunt:
(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) + 1 = 63 + 1 = 64;
(1 + 2 + 4 + ... + 32 + 64) +1 = 127 + 1 = 128;
(1 + 2 + 4 + ... + 64 + 128) + 1 = 255 + 1 = 256;
(1 + 2 + 4 + ... + 128 + 256) + 1 = 511 + 1 = 512;
Generalizare:

În această serie, fiecare număr, începând cu al doilea, este cu **1** mai mare decât suma tuturor numerelor care îl preced. (Se observă că: **2 = 2**; $\mathbf{4 = 2^2}$; $\mathbf{8 = 2^3}$; $\mathbf{16 = 2^4}$; $\mathbf{32 = 2^5}$, deci puteri ale numărului 2).

93. a) Căutați în coloana a doua şi veți descoperi că $\mathbf{2 \times 2 + 6 = 10}$, iar în coloana a treia, $\mathbf{5 \times 5 + 1 = 26}$ etc. Deci regula: pătratul numărului din prima linie mărit cu numărul din a doua linie dă numărul din a treia linie. Mai departe: $\mathbf{3 \times 3 + 7 = 16}$.

b) **7 + 5 = 12**, iar **12 – 2 = 10**; **10 + 5 = 15**, **15 – 2 = 13** etc.

c) 1) Analizați a treia coloană, de exemplu şi veți descoperi:
$\mathbf{3 \times 3 + 4 = 13}$; $\mathbf{5 \times 5 + 4 = 29}$; $\mathbf{1 \times 1 + 4 = 5}$ etc.

2) Analizând coloana a treia sau a patra, observăm că dacă din numerele de pe prima linie scădem numărul **2**, obținem pătratul numărului din linia a doua, adică: **38 – 2 = 36**, dar $\mathbf{36 = 6 \times 6}$;
11 – 2 = 9, dar $\mathbf{9 = 3 \times 3}$;
3 – 2 = 1, dar $\mathbf{1 = 1 \times 1}$;
2 – 2 = 0, dar $\mathbf{0 = 0 \times 0}$.

94. Rezolvarea 1

Să luăm câteva exemple:

432 – 234 = 198; **541 – 145 = 396**; **673 – 376 = 297**;
792 – 297 = 495; **836 – 638 = 198**; **805 – 508 = 297**;
231 – 132 = 99.

Ce cheie ascund asemenea scăderi? La diferență, *cifra zecilor* este *permanent* aceeaşi, ***9***; dar ce relație este între cifra unităților şi cifra sutelor de la diferență? Dacă le adunăm, ce obținem? **1 + 8 = 9**; **2 + 7 = 9**; **1 + 8 = 9**; **3 + 6 = 9**; **4 + 5 = 9**; **0 + 9 = 9**.

Deci *suma dintre cifra unităților şi cifra sutelor este totdeauna* ***9***.

Acum putem scrie toate diferențele:

– dacă cifra unităților de la diferență este **2** (cifra **1** nu poate fi, căci ar însemna să-l scădem pe **9** din **0**, dar când răsturnăm numărul, avem **0** pe locul sutelor, ceea ce nu convine), atunci cifra sutelor este **9 – 2 = 7**, iar diferența este **792**;

– dacă cifra unităților de la diferență este **3**, cifra sutelor este **9 – 3 = 6**, iar diferența este **693**; diferențele sunt: **792**; **693**; **594**; **495**; **396**; **297**; **198**; **99** (pentru diferența **99**, avem exemplul: **231 – 132 = 99**, iar **9 – 9 = 0**, adică la sute nu avem cifre).

Rezolvarea 2

Să luăm exemplul: **541 – 145 = 396.**

Descăzutul poate fi scris sistematic astfel: **541 = 100×5 + 10×4 + 1**, dar **100×5 = 99•5 + 5**, atunci **541 = 99•5 + 10•4 + 6**.

Scăzătorul poate fi scris:

145 = 100×1 + 10×4 + 5 = (99×1 + 1) + 10•4 + 5 = 99×1 + 10×4 + 6.

Rezultă scăderea: **99•5 + 10•4 + 6 – (99•1 + 10•4 + 6)**. Scădem pe rând fiecare termen din paranteză, adică:

99•5 + 10•4 + 6 – 99•1 – 10•4 – 6 = 99•5 – 99•1 = 99(5 – 1) = 396.

Ce reprezintă **5** şi **1** din ultima scădere? Ele sunt cifrele de pe locul sutelor, respectiv, de pe locul unităților de la numărul inițial. Luând mai multe exemple, putem concluziona că *totdeauna diferența dintre un număr de* ***3*** *cifre distincte şi răsturnatul său* se poate obține şi *prin înmulțirea dintre numărul* ***99*** *şi diferența dintre prima şi ultima cifră* a numărului inițial.

Exemple: **972 – 279 = 99•(9 – 2) = 99•7 = 693**;
581 – 185 = 99•(5 – 1) = 99•4 = 396;
673 – 376 = 99•(6 – 3) = 99•3 = 297 etc.

Observație: Fiecare dintre aceste rezultate (diferențe), dacă este adunat cu răsturnatul său, dă suma **1 089**. Verificați!

95. a) **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8×9 = 100**;
1 + 2×3 + 4×5 – 6 + 7 + 8×9 = 100;
1 + 2×3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100;
1×2 + 34 + 56 + 7 – 8 + 9 = 100;
12 + 3 – 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100;
12 – 3 – 4 + 5 – 6 + 7 + 89 = 100;
123 + 4 – 5 + 67 – 89 = 100;
123 – 45 – 67 + 89 = 100;

b) **(1 + 2) : 3 = 1**; **1×(2 + 3) – 4 = 1**; **(1 + 23) : 4 – 5 = 1** sau

$(12-3):(4+5)=1$; $(12+3-4):(5+6)=1$ sau
$(12+3-4-5):6=1$; $(1\times2\times3\times4)-(5\times6-7)=1$;
$(1+2\times3\times4):5:(6+7-8)=1$; $(1\times2\times3\times4)-(5\times6-7)=1$;
$(1+2+3+4+5)-(6+7-8+9)=1$.
(Alte exerciții asemănătoare, la sfârşitul capitolului **I**).

c) $4=4$; $2\cdot\frac{1}{2}=1$, iar $2-1=1$; deci $1=1$;

$11\times1{,}1=12{,}1$, iar $11+1{,}1=12{,}1$; deci $12{,}1=12{,}1$;

$1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, iar $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; deci $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, iar ${}^{3)}\frac{1}{2}-{}^{2)}\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$,
deci $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ (adevărat).

d) 1) $13\times13+14\times14$; 2) $10\times10+11\times11+12\times12$.

e) 1) Pentru a continua piramida, să încercăm să aflăm cheia acestor curioase operații. Se ştie că numărul **12 345** devine **11 111** dacă avem scăderea **12 345 – 1 234**. Luăm un rând dat pe piramidă: $1\,234\times9+5=11\,111$. În locul înmulțirii cu **9**, putem înmulți cu **(10 – 1)**; rezultă:

$$\begin{aligned}1\,234\times9+5&=1\,234\times(10-1)+5\\&=12\,340-1\,234+5\\&=12\,345-1\,234\\&=11\,111.\end{aligned}$$

Piramida completă este următoarea:

$$\begin{gathered}1\times9+2=11\\12\times9+3=111\\123\times9+4=1111\\1234\times9+5=11111\\12345\times9+6=111111\\123456\times9+7=1111111\\1234567\times9+8=11111111\\12345678\times9+9=111111111\end{gathered}$$

e) 2) În $123\times8+3$, în loc de **8**, punem factorul **(9 – 1)**, iar în loc de **3**, punem **(4 – 1)**. Rezultă:

$$\begin{aligned}123\cdot(9-1)+(4-1)&=123\cdot9-123+4-1\\&=123\cdot9+4-123-1\\&=123\cdot9+4-124\end{aligned}$$

De la piramida anterioară (rândul al treilea), ştim că $123\times9+4=1\,111$. Atunci $1\,111-124=987$.

Piramida completă este:

$$\begin{gathered}1\times8+1=9\\12\times8+2=98\\123\times8+3=987\\1234\times8+4=9876\\12345\times8+5=98765\\123456\times8+6=987654\\1234567\times8+7=9876543\\12345678\times8+8=98765432\\123456789\times8+9=987654321\end{gathered}$$

e) 3) Pentru scrierea $987\times9+5=8\,888$ care este cheia? De la piramida e) 1) ştim că, de exemplu, $123\times9+4=1\,111$. Dacă înmulţim ambii membri ai egalităţii cu **8**, obţinem: $123\times8\times9+4\times8=8\,888$. De la piramida e) 2), ştim că $123\times8+3=987 \Leftrightarrow 123\times8=987-3 \Leftrightarrow 123\times8=984$.

A doua egalitate devine $984\times9+4\times8=8\,888$. De aici putem ajunge la prima scriere. Cum? Deoarece $4\times8=32$, iar primul produs are ca factor pe **9**, atunci $32=3\times9+5$, iar $984\times9+4\times8=8\,888 \Leftrightarrow 984\times9+3\times9+5=8\,888 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 987\cdot9+5=8\,888$ (am scos în factor comun pe **9**, obţinând $9\cdot(984+3)+5$).
Piramida completă este:

$$9\times9+7=88$$
$$98\times9+6=888$$
$$987\times9+5=8888$$
$$9876\times9+4=88888$$
$$98765\times9+3=888888$$
$$987654\times9+2=8888888$$
$$9876543\times9+1=88888888$$
$$98765432\times9+0=888888888$$

f) 1) Cum se ajunge la asemenea egalităţi? Din ultimul membru al piramidei e) 1), avem că $12345678\times9+9=111111111$. Din primul membru al egalităţii scoatem factor comun pe **9**, obţinând $9(12345678+1)=$ $=9\cdot12345679$. Înlocuind în prima egalitate, rezultă $12345679\times9=111111111$.

Pentru $12345679\times18=222222222$, avem
$12345679\times9\times2=111111111\times2=222222222$. Celelalte egalităţi sunt:

$$12345679\times9\times3=333333333$$
$$12345679\times9\times4=444444444$$
$$12345679\times9\times5=555555555$$
$$12345679\times9\times6=666666666$$
$$12345679\times9\times7=777777777$$
$$12345679\times9\times8=888888888$$
$$12345679\times9\times9=999999999$$

f) 2) Se observă că avem numai înmulţirea cu **1**, iar adunarea produselor parţiale are la bază numărarea unităţilor (câţi de **1**). La rezultat, în mijloc, avem **9**, iar celelalte cifre *descresc simetric* de la **9**, spre ambele capete, până la **1**. Verificaţi,efectuând înmulţirea în scris.

f) 3) Deoarece: $573\times999=573\cdot(1\,000-1)$
$=573\,000-573=572\,427$, rezultă că, la înmulţirea numărului **999** cu orice alt număr de trei cifre, obţinem un produs format de **6** cifre: primele trei cifre reprezintă numărul cu care înmulţim,dar micşorat cu o unitate, iar celelalte trei cifre completează pe cele dintâi până la **9**.

$$947\times999=\underbrace{946}_{(947-1)}\ \underbrace{053}_{\substack{9-9=0\\9-4=5\\9-6=3}}$$

$999\times981=980\,029$; $509\times999=508491$.

(Pentru alte moduri, a se vedea exerciţiul **58**, punctul **15**), capitolul **I**)

f) 4) Se observă că numerele se termină în **5** şi trebuie să le înmulţim cu ele însele (ridicăm la pătrat numerele terminate în **5**). În enunţ se observă că: – produsul se termină în **25**;

– celelalte cifre se obțin din înmulțirea cifrei zecilor numărului cu cifra consecutivă crescător *sau* celelalte cifre (din față) sunt tocmai produsul dintre numărul care se formează din cifrele rămase (fără cifra unităților) cu el însuşi, la care se adaugă încă o dată acest număr, adică:

$\mathbf{15\times15=\overline{\cdot\cdot25}}$

$\mathbf{1\times2=\underline{2}}$ sau $\mathbf{1\times1+1=2}$, deci $\mathbf{15\times15=225}$;

$\mathbf{25\times25=\overline{\cdot\cdot25}}$

$\mathbf{2\times3=\underline{6}}$ sau $\mathbf{2\times2+2=6}$, deci $\mathbf{25\times25=625}$;

$\mathbf{35\times35=\overline{\cdot\cdot25}}$

$\mathbf{3\times4=\underline{12}}$ sau $\mathbf{3\times3+3=12}$, deci $\mathbf{35\times35=1\,225}$;

$\mathbf{45\times45=\overline{\cdot\cdot25}}$

$\mathbf{4\times5=\underline{20}}$ sau $\mathbf{4\times4+4=2}$, deci $\mathbf{45\times45=2\,025}$;

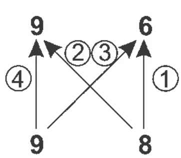
$\mathbf{55\times55=\overline{\cdot\cdot25}}$

$\mathbf{5\times6=\underline{30}}$ sau $\mathbf{5\times5+5=30}$, deci $\mathbf{55\times55=3\,025}$;

$\mathbf{905\times905=\overline{\cdot\cdot25}}$

$\mathbf{90\times91=8\,190}$ sau $\mathbf{90\times90+90=8\,190}$, deci $\mathbf{905\times905=819\,025}$.

f) 5) a) Utilizăm înmulțirea în cruce, aşezând (în minte) numerele astfel:

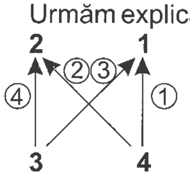


Efectuăm următoarele calcule (în ordinea numerelor de pe săgeți):
1) $\mathbf{8\times6=48}$, deci **8** este ultima cifră a rezultatului, iar **4** este cifră de transport;
2) $\mathbf{8\times9=72}$; $\mathbf{72+4=76}$;
3) $\mathbf{9\times6=54}$; $\mathbf{54+76=120}$; **0** este penultima cifră a produsului, iar pe **13** îl transportăm;
4) $\mathbf{9\times9=81}$; $\mathbf{81+13=94}$; deci primele două cifre ale produsului sunt **94**, iar produsul este **9 408**.

Observație:

Avantajul acestui mod de calcul se vede mai clar dacă avem numere mai mici, de exemplu: $\mathbf{21\times34}$ = ?

Urmăm explicațiile de mai sus:



1) $\mathbf{4\times1=4}$
2) $\mathbf{4\times2=8}$
3) $\mathbf{3\times1=3}$; iar $\mathbf{8+3=11}$
4) $\mathbf{3\times2=6}$; $\mathbf{6+1=7}$
deci produsul este **714**

b) Rotunjim *unul* din factori la **100**, adică:

98×96 = 100×96 – 2×96

= 9 600 – 192

= 9 408.

A se vedea şi **100×98 – 4×98**.

c) Rotunjim ambii factori până la **100**, adică:

fatorii sunt: **98** şi **96**

completăm până

la 100 cu: **2** şi **4**

Primele două cifre ale produsului final se obţin prin diferenţa dintre numerele indicate prin săgeţi adică **96 – 2 = 94** sau **98 – 4 = 94**. Deci până acum avem ***94** de sute*. Ultima cifră a produsului (sau ultimele două) le aflăm prin înmulţirea numerelor cu care am rotunjit factorii iniţiali, adică **2×4 = 8**.

Produsul final este: **94×100 + 8 = 9 408**.

d) Transformăm unul dintre factori într-o înmulţire succesivă, adică:

98×96 = 98×3×2×2×2×2×2

= 294×2×2×2×2×2

= 588×2×2×2×2

= 1 176×2×2×2

= 2 352×2×2

= 4 704×2

= 9 408.

96. Se numeşte *sumă magică* dacă *suma* obţinută din numerele înscrise într-un *pătrat* cu ***n·n*** căsuţe *este aceeaşi* (constantă) când adunăm numerele dispuse pe *rânduri*, pe *coloane* sau pe *diagonalele* pătratului.

Atenţie: În aceeaşi sumă nu este voie să se repete numerele!

a) În enunţ avem **9** cifre. Înseamnă că pătratul are **9** căsuţe (pentru a le folosi pe toate).

O variantă:

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

Am început prin înscrierea numărului **5** în pătratul din mijloc (a treia parte din sumă magică, pentru că fiecare sumă are câte **3** termeni). Celelalte două numere care completează pe **5**, trebuie să aibă suma **10**.

b) Numerele pare de la **1** la **9** sunt: **2**, **4**, **6**, **8**, care au suma chiar **20**. Dacă suma magică este **20**, avem nevoie, într-o singură sumă de toate aceste patru numere. Deci sunt **4×4 = 16** căsuţe. O variantă:

8	**4**	**2**	**6**
2	**6**	**8**	**4**
6	**2**	**4**	**8**
4	**8**	**6**	**2**

Am început punând în cele **4** căsuţe din mijloc toate cele **4** numere pare date. Celelalte două numere trebuie să completeze până la **20**.

97. Din dispunerea împărţirii, rezultă că a doua şi a patra cifră a câtului trebuie să fie zero (s-au coborât câte **2** cifre). Împărţitorul este de forma $\overline{ab}$. Dacă $\overline{ab}\times 8 = \overline{cd}$ (număr de **2** cifre, a se vedea a doua înmulţire) şi dacă $\overline{ab}$ înmulţit cu prima cifră a câtului dă un produs de **3** cifre rezultă că această cifră a câtului este mai mare decât **8**, adică este **9**. La fel şi pentru ultima cifră a câtului; deci câtul este **90 809**.

Deoarece $\overline{ab}\times 8 = \overline{cd}$, iar $\overline{ab}\times 9 = \overline{efg}$, rezultă că singurul număr $\overline{ab}$ este **12** (căci: $10\times 8 = 80$, dar $10\times 9 = 90 \neq \overline{efg}$; $11\times 8 = 88$, dar $11\times 9 = 99 \neq \overline{efg}$; $12\times 8 = 96$, iar $12\times 9 = 108 = \overline{efg}$; $13\times 8 = 104 \neq \overline{ab}$). Deîmpărţitul este **1 089 709**, căci $\overline{ab}\cdot 90\,809 + 1 = 12\cdot 90\,809 + 1 = 1\,089\,709$.

98. 1) Din dispunerea înmulţirii, rezultă A, B şi $C \neq 0$, căci nu s-ar obţine trei produse parţiale.
2) Din $A\cdot C = \overline{.A}$ şi din $B\cdot C = \overline{.B}$, rezultă C poate fi **1** sau **6** (căci $6\times 2 = 12$; $6\times 8 = 48$; $6\times 4 = 24$ etc.).
3) Dacă $C = 1$, atunci primul produs parţial ar avea numai **3** cifre. Rezultă $C = 6$, iar A şi B pot fi **2**, **4** sau **8**.
4) Deoarece al doilea produs parţial are **3** cifre, rezultă $A = 2$ (dacă $A = 4$ sau $A = 8$, ar fi **4** cifre), iar $B = 4$ sau $B = 8$.
5) Dacă $B = 4$, ultimul produs parţial ar avea numai **3** cifre. Rezultă $B = 8$.
Deci: $A = 2$; $B = 8$; $C = 6$, iar înmulţirea este $286\cdot 826 = 236\,236$.

99. *Metoda lui* ***9*** de verificare (de efectuarea probei unei operaţii aritmetice) se bazează pe *regula restului*, care arată că:
1) *restul* la împărţirea *unei sume* cu un număr oarecare *este egal* cu *suma resturilor* de la împărţirea fiecărui termen cu acelaşi număr;
2) *restul produsului este egal cu produsul dintre resturile* factorilor;
3) la împărţirea cu **9** a unui număr *se obţine acelaşi rest* ca şi la împărţirea sumei cifrelor acelui număr la **9** (criteriul divizibilităţii cu **9**).

Cum se aplică această metodă la operaţiile date în enunţ?

a) **23 567 + 1 689 + 115 406 = 140 662**.

Adunăm (în minte) cifrele fiecărui termen şi dacă obţinem numere din două cifre le adunăm din nou până când obţinem un număr format dintr-o singură cifră (mai mic decât **9**). Aceste numere obţinute sunt restul împărţirii la **9** a fiecărui termen. Adunând toate resturile trebuie să obţinem acelaşi rezultat ca şi atunci când aplicăm regula asupra sumei (totalului), adică:
– restul de la primul termen este **5**, căci $2 + 3 + 5 + 6 + 7 = 23$; $2 + 3 = 5$;
– restul de la al doilea termen este **6**, deoarece: $1 + 6 + 8 + 9 = 24$; $2 + 4 = 6$;
– restul de la al treilea termen este **8**, pentru că $1 + 1 + 5 + 4 + 6 = 17$; $1 + 7 = 8$;
– restul final este **1**, deoarece $5 + 6 + 8 = 19$; $1 + 9 = 10$; $1 + 0 = 1$.

Tot restul **1** trebuie să obţinem dacă aplicăm regula asupra sumei (rezultatului), adică: $1 + 4 + 6 + 6 + 2 = 19$; $1 + 9 = 10$; $1 + 0 = 1$.

Deci adunarea este corect efectuată.

b) **176 391 – 85 297 = 91 094**.

Deoarece descăzutul este egal cu suma dintre scăzător şi diferenţă, putem privi scăderea ca o adunare.
Restul de la scăzător este **4**, căci $8 + 5 + 2 + 9 + 7 = 31$; $3 + 1 = 4$;
Restul de la diferenţă este **5**, pentru că $9 + 1 + 9 + 4 = 23$; $2 + 3 = 5$.
Restul final este **0**, căci $5 + 4 = 9$; $9 : 9 = 1$ (rest **0**).

Tot restul **0** trebuie să fie şi la împărţirea descăzutului, adică:

1 + 7 + 6 + 3 + 9 + 1 = 27; **2 + 7 = 9**. Deci scăderea este corect efectuată.

c) **9 084 × 308 = 2 797 872**.

Restul obţinut de la primul factor este **3**, căci **9 + 8 + 4 = 21**; **2 + 1 = 3**;
Restul obţinut de la al doilea factor este **2**, pentru că **3 + 8 = 11**; **1 + 1 = 2**;
Restul obţinut de la produsul celor două resturi este **6**, căci **3•2 = 6**.

Tot **6** trebuie să fie şi restul obţinut prin aplicarea regulii asupra produsului (rezultatului), adică: **2 + 7 + 9 + 7 + 8 + 7 + 2 = 42**; **4 + 2 = 6**.

Înmulţirea este corect efectuată.

Observaţie: Dacă la o astfel de verificare se va descoperi o greşeală, pentru a determina locul acesteia, aplicăm regula asupra fiecărui produs parţial.

d) **34 462 : 807 = 42** (rest **568**). Pentru a aplica "regula lui **9**" de verificare, privim împărţirea pe baza definitiei, adică: **34 462 = 807×42 + 568**. Restul de la deîmpărţit este **1**, deoarece **3 + 4 + 4 + 6 + 2 = 19**; **1 + 9 = 10**; **1 + 0 = 1**. Restul produsului dintre cât şi împărţitor este **0**, căci: **8 + 7 = 15**; **1 + 5 = 6**; **4 + 2 = 6**; **6×6 = 36**; **3 + 6 = 9**; **9 : 9 = 1** (rest **0**). Restul de la împărţirea restului este **1**, pentru că **5 + 6 + 8 = 19**; **1 + 9 = 10**; **1 + 0 = 1**. Deoarece **1 = 0 + 1**, împărţirea este corect efectuată.

100. a) **8•134 =**

Trebuie să calculăm produsul celor două numere pe baza împărţirii şi a înmulţirii cu **2**, adică:

8•134 =
(8 : 2)•(134•2) = 4•268;
(4 : 2)•(268•2) = 2•536;
(2 : 2)•(536•2) = 1•1 072;
= 1 072

Deci procedeul constă în împărţirea suuccesivă a unuia dintre factori la **2** până se obţine câtul **1** şi dublarea simultană a celuilalt factor. Ultimul rezultat dublat este tocmai produsul căutat (a se vedea şi regula de la exerciţiul **56**, punctele **52**) şi **53**), capitolul **I**).

b) **64•72 =**
(64 : 2)• (72•2) = 32•144;
(32 : 2)•(144•2) = 16•288;
(16 : 2)•(288•2) = 8•576;
(8 : 2)•(576•2) = 4•1 152;
(4 : 2)•(1 152•2) = 2•2 304;
(2 : 2)•(2 304•2) = 1•4 608
= 4 608.

c) **16•1234 =**
(16 : 2)•(1 234•2) = 8•2 468;
(8 : 2)•(2 468•2) = 4•4 936;
(4 : 2)•(4 936•2) = 2•9 872;
(2 : 2)•(9 872•2) = 1•19 744
= 19 744.

d) **9×23 =**

Observăm că fiecare factor este un număr impar. Cum procedăm, dorind să aplicăm procedeul de calcul cerut? Pentru a obține un factor par, scădem din **9** pe **1**; la rezultatul final adăugăm pe $\mathbf{1\times23}$, adică:

$\mathbf{9\times23=}$

$\mathbf{(9-1):2(23\cdot2)=4\cdot46}$;

$\mathbf{(4:2)\cdot(46\cdot2)=2\cdot92}$;

$\mathbf{(2:2)\cdot(92\cdot2)=184}$, iar

$\mathbf{184+1\times23=207}$.

e) $\mathbf{17\times13=}$

$\mathbf{(17-1):2\cdot(13\cdot2)=8\cdot26}$;

$\mathbf{(8:2)\cdot(26\cdot2)=4\cdot52}$;

$\mathbf{(4:2)\cdot(52\cdot2)=2\cdot92}$;

$\mathbf{(2:2)\cdot(92\cdot2)=1\cdot208}$, iar

$\mathbf{208+1\times13=221}$

f) $\mathbf{29\times21=}$

$\mathbf{(29-1):2\cdot(21\cdot2)=14\cdot42}$;

$\mathbf{(14:2)\cdot(42\cdot2)=7\cdot84}$;

$\mathbf{(7-1):2\cdot(84\cdot2)=3\cdot168}$;

$\mathbf{(3-1):2\cdot(168\cdot2)=1\cdot336}$.

În cazul f), care este produsul căutat? La rezultatul final, **336**, trebuie să adăugăm $\mathbf{1\times168+1\times84+1\cdot21}$ (numerele pe care le-am neglijat prin scăderea lui **1** din numerele impare). Deci: $\mathbf{29\times21=336+1\cdot168+1\cdot84+1\cdot21=}$ $\mathbf{=336+168+84+21=609}$.

101. a) Deoarece $\mathbf{984\cdot1\,001=1\,000\cdot984+984\cdot1}$

$\mathbf{=984\,000+984}$

$\mathbf{=984\,984}$, rezultă că *produsul* dintre un număr de forma $\overline{abc}$ şi numărul **1 001** *este format din numărul* $\overline{abc}$ *scris de* ***2*** *ori*, adică $\overline{abc\,abc}$;

$\mathbf{1\,001\times736=736\,736;\ 1\,001\times903=903\,903}$.

b) Deoarece $\mathbf{73\times10\,101=73\cdot10\,000+73\cdot100+73}$

$\mathbf{=730\,000+7\,300+73}$

$\mathbf{=737\,373}$, rezultă că *produsul* dintre un număr de forma $\overline{ab}$ şi numărul **10 101** *este format din numărul* $\overline{ab}$ *scris de* ***3*** *ori*, adică $\overline{ababab}$;

$\mathbf{87\times10\,101=878\,787;\ 10\,101\times93=939\,393}$.

102. a) Deoarece $\mathbf{\overline{abc}\cdot1\,001=\overline{abcabc}}$, rezultă că $\mathbf{\overline{abcabc}:1\,001=\overline{abc}}$, iar $\mathbf{\overline{xyzxyz}:1\,001=\overline{xyz}}$.

b) Deoarece $\mathbf{\overline{ab}\cdot10\,101=\overline{ababab}}$, rezultă că $\mathbf{\overline{ababab}:10\,101=\overline{ab}}$, iar $\mathbf{\overline{xyxyxy}:10\,101=\overline{xy}}$.

103. Folosiți regulile referitoare la paritate din soluțiile ex. nr. **86**, capitolul **I**.

Dacă elevii erau împărțiți în **10** grupe egale ca număr, rezultă că numărul total al elevilor se termină în zero, este un număr par. Când elevii sunt redistribuiți în **5** rânduri, avem: primul rând: $\boldsymbol{x}$ elevi; al doilea: $\boldsymbol{x+1}$; al treilea: $\boldsymbol{x+2}$; al patrulea: $\boldsymbol{x+3}$; al cincilea: $\boldsymbol{x+4}$ elevi. Pe baza acestor relații, scriem numărul total de elevi din clasă: $\boldsymbol{x+x+1+x+2+x+3+x+4=5x+10}$. Dar acest număr se termină în zero, adică $\boldsymbol{5x+10=\overline{.0}}$ (număr par). Dacă suma şi un termen al său sunt numere pare, rezultă că şi celălalt termen este număr par; deci $\boldsymbol{5x}$ este un număr par. Dar **5** este un număr impar; rezultă că $\boldsymbol{x}$ este un număr par (căci numărul impar trebuie înmulțit cu un număr par pentru a obține un număr par). Dacă $\boldsymbol{x}$ este număr par, atunci consecutivul său, $\boldsymbol{x+1}$, este un număr impar, iar $\boldsymbol{x+2}$ este număr par, $\boldsymbol{x+3}$ este număr impar, $x + 4$ este număr par. Dintre acestea, cel mai mare număr impar este $x + 3$ (elevii care au trecut la primul atelier); rândurile care au trecut la al doilea atelier sunt primul, al treilea şi al cincilea, cu $x + x + 2 + x + 4 = 3x + 6$ elevi, număr par (nu putem lua ca termen al sumei pe $x + 1$, număr impar, căci s-ar obține ca sumă un număr impar). Rezultă că la al treilea atelier a trecut rândul al doilea cu $x + 1 = 5$ elevi. Atunci: $x = 5 - 1 = 4$ elevi; celelalte rânduri aveau respectiv **5**, **6**, **7** şi **8** elevi, în total fiind **4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30** elevi.

104. a) Zilele sunt: răsalaltăieri, alaltăieri, ieri, azi, mâine, poimâine, răspoimâine.

b) Atenție şi la timpurile verbului *a fi*!

Notăm cu **a** ziua săptămânii în care ne aflăm. În relație cu aceasta, zilele anterioare şi cele următoare se numesc astfel:

c	b	$\boxed{a}$	d	e
alaltăieri	**ieri**		**mâine**	**poimâine**

Pentru ca ziua ***c*** să fie numită mâine, trebuie să mai fie o zi ***f***, în fața lui ***c***, numită *azi*: acest *azi era* (nu este) "tot atât de departe de sâmbătă ...".

Când ziua **e** (numită, în momentul în care ne aflăm *poimâine*) *va fi* (nu este) *ieri*, ziua numită *azi* este ziua ***g***, adică:

$\boxed{\text{AZI } f}$	$\xrightarrow{\text{mâine}}$ c	b	$\boxed{a}$	d	e $\xleftarrow{\text{ieri}}$	$\boxed{\text{AZI } g}$
	alaltăieri	**ieri**		**mâine**	**poimâine**	

Dacă ziua ***f*** este tot atât de departe de sâmbătă ca şi ziua ***g***, rezultă că ziua din mijloc este ziua de *sâmbătă*, tocmai ziua ***a*** în care ne aflăm (în fața lui ***a*** sunt **3** zile, iar după ***a*** sunt alte **3** zile).

105. (d) Putem reduce problema la una cu **2** mărimi: în **46** de capete şi **112** picioare sunt două grupe de animale, adică o grupă de păsări şi o grupă a animalelor cu **4** picioare. Câte animale numără fiecare grupă?

Presupunem că ar fi numai animale cu **2** picioare (păsări).

Câte picioare ar fi? $46 \times 2 = 92$.

Câte picioare ar fi lipsă? $112 - 92 = 20$.

Înlocuim animalele cu **2** picioare cu animale cu **4** picioare până dispare diferența de **20**.

Câte animale cu **4** picioare (porci şi vaci) sunt? $20 : (4 - 2) = 10$.

Câte păsări sunt? $46 - 10 = 36$.

În numărul **10**, numărul de vaci reprezintă un sfert din numărul porcilor. Câte vaci sunt? $10 : (4 + 1) = 2$.

Câți porci sunt? $10 - 2 = 8$ sau $2 \times 4 = 8$.

În numărul **36**, numărul rațelor reprezintă o jumătate din numărul găinilor. Câte rațe sunt? $36 : (2 + 1) = 12$.

Câte găini sunt? $2 \times 12 = 24$ sau $36 - 12 = 24$.

Anexă – conținut facultativ

Probleme de mişcare

Problemele de mişcare sunt acelea în care se cere să se afle una dintre mărimile: **spațiul (distanța)**, **viteza** sau **timpul**, când sunt date diferite relații dintre acestea.

În clasele a III-a – a V-a, problemele se referă la mişcări uniforme. Mişcarea unui mobil este uniformă dacă în intervale de timp egale parcurge distanțe egale (deci viteza este constantă).

Spațiul (**d** sau **S**) este lungimea drumului parcurs de un mobil. El se exprimă în metri, în multiplii sau submultiplii metrului.

Timpul (**t**) este numărul de unități de timp (secundă, minut, oră, zi etc.) în care se parcurge un anumit spațiu.

Viteza (**v**) este numărul de *unități* de lungime parcuse de un mobil *într-o singură unitate de timp*. De aceea, viteza se exprimă prin *unități de lungime* pe (raportate la) *unitatea de timp* (m/s, km/h, m/min, km/s etc.).

Din cauză că *viteza* este o mărime *derivată*, în practică se observă că elevii întâmpină serioase dificultăți în descoperirea ei în probleme. Aceasta se întâmplă si datorită faptului că folosesc formulele (ecuațiile): **d = v • t**, **v = d : t**, **t = d : v**, realizându-se generalizări şi abstractizări pe baza a prea puține exemple, a unui număr mic de *rezolvări aritmetice* ale problemelor. În gimnaziu, problemele sunt reluate sistematic abia în clasa a VI-a, doar la fizică, unde manualul, în capitolul „Fenomene mecanice", prezintă multe noțiuni care presupun o bază informațională deja însuşită de elevi (de exemplu, a se vedea informațiile necesare realizării graficului mişcării mecanice).

La matematică, în rezolvarea problemelor de mişcare, se pot folosi atât metodele aritmetice (figurativă, a comparației, a falsei ipoteze etc.), cât şi cele algebrice.

Dată fiind specificitatea conținutului acestor probleme, în practică ele sunt clasificate astfel:

A) *probleme simple* care cer aflarea:
- vitezei;
- distanței;
- timpului;
- probleme combinate.

B) probleme de mişcare ***în sensuri contrare*** (de întâlnire a mobilelor);
C) probleme de mişcare ***în acelaşi sens*** (de urmărire a mobilelor);
D) probleme de ***compunere*** a vitezelor.

Această clasificare structurează şi prezentul capitol.

Enunțuri

1. Un atlet străbate distanța de **40** m în **4** secunde, iar un biciclist în **8** secunde. Aceeaşi distanță este parcursă de un copil în **20** secunde. Cine se mişcă cel mai încet? Cine parcurge distanța în cel mai scurt timp? Scrieți în ordine crescătoare timpii în care are loc fiecare deplasare. Pe baza unei reprezentări grafice, scrieți formula de determinare a celor trei viteze, apoi ordonați-le crescător. Ce relație este între timpii şi vitezele corespunzătoare?

2. Ce viteză medie, exprimată în kilometri pe oră, a avut un automobil care a parcurs distanța de **320** km în **8** ore?

3. Un motociclist a plecat cu o viteză de **16** km/oră, urmând să meargă **9** ore. După ce a străbătut **48** de km, a trebuit să se oprească timp de **2** ore. Cu ce viteză trebuie să-şi continue drumul pentru a ajunge la ora fixată?

4. Un autoturism se deplasează timp de **2** ore cu viteza de **40** km/h şi **3** ore cu viteza de **80** km/h. Să se determine viteza medie cu care a mers autoturismul.

5. Într-o duminică, Ovidiu îşi vizitează bunicii. La dus, fiind mai mult urcuş, el realizează o viteză medie de **30** m/minut, iar la întors, o viteză medie de **60** m/minut. Aflați media vitezelor şi viteza medie cu care a parcurs Ovidiu întregul drum dus-întors.

6. Doi biciclişti pleacă din acelaşi loc în aceeaşi direcție. Dacă primul merge **7** ore şi al doilea **3** ore, atunci primul parcurge cu **39** km mai mult decât al doilea, iar dacă primul ar merge **9** ore şi al doilea **6** ore, atunci primul ar parcurge cu **18** km mai mult decât al doilea. Aflați viteza fiecărui biciclist.

7. Un automobilist a parcurs distanța dintre două oraşe în **5** ore. Dacă viteza automobilului ar fi fost cu **20** km mai mică, atunci ar fi parcurs aceeaşi distanță în **7** ore. Aflați viteza automobilului şi distanța dintre cele două oraşe.

8. Fie distanța dintre oraşele A şi B. Precizați care dintre cele două autoturisme, **a** şi **b**, are viteza mai mare, dacă:
1) **a** parcurge o jumătate din distanță în **3** ore, iar **b** parcurge o treime din aceeaşi distanță în două ore;
2) **a** parcurge o jumătate din distanță în **2** ore, iar **b** parcurge o treime din distanță în **3** ore;
3) **a** parcurge un sfert din distanță în **3** ore, iar **b** parcurge o treime din aceeaşi distanță în **4** ore;
4) **a** parcurge un sfert din distanță în **4** ore, iar **b** parcurge o treime din aceeaşi distanță în **3** ore;
5) **a** parcurge o jumătate din distanță într-o jumătate de oră, iar **b** parcurge un sfert din aceeaşi distanță într-un sfert de oră;
6) **a** parcurge o jumătate din distanță într-un sfert de oră, iar **b** parcurge un sfert din aceeaşi distanță într-o jumătate de oră.

9. Ce distanță a parcurs un biciclist care, timp de **4** ore, s-a deplasat cu viteza de **12** km pe oră?

10. Elevii clasei a IV-a C din şcoala noastră au plecat în excursia „Turul Iaşului" cu autocarul, care s-a deplasat cu viteza medie de **40** km pe oră. În prima parte a zilei, autocarul a mers **3** ore, iar după-amiază **2** ore. Ce distanță au parcurs elevii cu autocarul?

11. Câți metri măsoară distanța dintre Soare şi Pământ, ştiind că o rază de lumină ce are viteza de **300 000** km/s o străbate în **5** secunde?

12. La ce distanță de noi s-a produs un zgomot, dacă viteza sunetului în aer este de **330** m/s, iar de la producerea lui au trecut **2** secunde?

13. Câte secunde îi trebuie unui tren care are viteza de **20** m pe secundă ca să străbată un drum de **72 000** m?

14. Deplasându-se **cu 4** km pe oră, în cât timp va străbate un drumeț distanța de **12** km ?

15. Un pieton parcurge un drum dus-întors în **9** ore. La dus a avut viteza de **4** km pe oră, iar la întors, de **5** km pe oră. Aflați lungimea drumului.

16. Un biciclist străbate distanța de la **D** la **I**, având viteza de **9** km pe oră, într-un timp cu **2** ore mai mare decât cel de la întoarcere, când a avut viteza de **12** km pe oră. Care este distanța dintre localitățile **D** şi **I**?

17. Un biciclist parcurge o anumită distanță în **28** de minute. El merge jumătate din distanță cu o viteză, iar cealaltă jumătate cu o viteză de **3** ori mai mare. În cât timp biciclistul parcurge a doua jumătate a distanței?

18. Întorcându-se de la bunici, ca să ajungă la tren, Dan şi-a propus să parcurgă cei **18** km cu viteza medie de **6** km pe oră, mergând pe jos. După ce a mers o parte din drum, s-a oprit o oră şi a aşteptat o trăsură care, deplasându-se cu o viteză dublă, l-a adus la tren în acelaşi timp pe care şi l-a propus inițial. La ce distanță de gară s-a oprit Dan să aştepte trasura?

19. Un motociclist pleacă la ora **9** din Bacău şi trebuie să parcurgă **180** km ca să ajungă la orele **18**, la Galați. Pe drum face un popas de două ore şi, pentru a recupera timpul pierdut, el merge apoi cu o viteză medie cu **10** km mai mare decât cea propusă inițial. La ce distanță de Galați se opreşte motociclistul prima dată?

20. Un motociclist şi-a propus să parcurgă **72** km cu o viteză de **200** m pe minut. Pe drum a observat că are o defecțiune la motocicletă, care l-a determinat să-şi întrerupă călătoria timp de **60** de minute. După ce a reparat motocicleta, a pornit cu o viteză de **3** ori mai mare, reuşind să recupereze timpul pierdut. La ce distanță de punctul de pornire şi-a întrerupt călătoria?

21. Aflându-se în localitatea **A**, Cristi doreşte să ajungă cu bicicleta în localitatea **B** la ora **14**. Mergând **3** ore, bicicleta se defectează, iar Cristi îşi continuă drumul pe jos, cu o viteză de **3** ori mai mică decât cu bicicleta, ajungând la **B** la ora **18**. Dacă ar mai fi mers cu bicicleta încă **6** km de la locul în care aceasta se defectase, ar fi ajuns în **B** la ora **17**. Aflați viteza cu care se deplasează bicicleta, distanța dintre cele doua localități şi la ce oră a pornit Cristi la drum.

22. Un automobil merge **2** ore şi se opreşte pentru o oră. După această oprire, viteza este $\frac{3}{4}$ din viteza anterioară, ajungând astfel la destinație cu **4** ore mai târziu. Dacă s-ar fi oprit cu **120** km mai departe, întârzierea ar fi fost numai de **3** ore. Ce viteza a avut la început automobilul şi care a fost toată distanța parcursă de acesta?

23. Din portul **A**, la ora **8**, pleacă o navă spre portul **B**, unde va ajunge a doua zi la aceeaşi oră. După un timp de la pornire, nava trece pe lângă localitatea **C**, care se află la o distanță de **234** km față de portul **B**. Parcurgând încă **54** km, nava trece pe lângă localitatea D la ora **23**. Puteți afla distanța dintre portul **A** şi localitatea **C**?

24. Un automobilist se întorcea acasă, venind spre oraşul Suceava din oraşul Vatra Dornei. El se gândeşte: „Dacă aş merge **2** ore, mi-ar mai rămâne **6** km, iar dacă aş merge **2** ore şi jumătate aş ajunge la fratele meu, care locuieşte într-un sat la **20** km de casa mea". Aflați distanța dintre Suceava şi Vatra Dornei.

25. Sorin doreşte să ajungă, într-un anumit timp, de la Sibiu la Cluj-Napoca. Dacă ar merge cu o motocicletă cu o viteză medie de **28** km pe oră, ar întârzia cu o oră, iar dacă ar merge cu un automobil cu o viteză medie de **42** km pe oră, ar sosi în Cluj-Napoca cu o oră mai devreme. Ce distanță este între Sibiu şi Cluj-Napoca?

26. Plecând din oraşul **A**, un şofer a privit indicatorul kilometrajului de la maşina sa, care indica **16961** km, constatând că oricum ar citi pe cadran, de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga, numărul este acelaşi. Numai după **2** ore de mers, şoferul a avut surpriza să citească pe indicator un număr asemănător. Care era viteza automobilului?

27. Din două localități, situate la **110** km una de alta, pleacă în acelaşi timp, unul spre celălalt, doi biciclişti. Primul are o viteză medie de **12** km/h, iar al doilea, **10** km/h. După câte ore se întâlnesc cei doi bicliclişti?

28. Două trenuri au plecat din două gări, unul spre celălalt, la ora **10** dimineața şi s-au întâlnit la ora **14** în aceeaşi zi. Primul tren a parcurs **60** km/h, iar al doilea, **55** km/h. Care este distanța dintre cele două gări?

29. Două vapoare au plecat în acelaşi timp, din două porturi, unul spre celălalt. Între porturi este o distanță de **200** km. Primul vapor străbate **25** km/h, iar al doilea, **30** km/h. Să se afle ce distanță a rămas între ele după **3** ore.

30. Între două oraşe este o distanţă de **184** km. Doi automobilişti pleacă în acelaşi timp, din cele două oraşe, mergând în sensuri contrare, având fiecare viteza de **46** km/h. După câte ore se vor întâlni cei doi automobilişti?

31. Din localitatea **A** pleacă spre localitatea **B** un automobil cu viteza de **50** km/h, iar după o oră pleacă din localitatea **B** spre localitatea **A** un alt automobil, cu viteza de **60** km/h. Ştiind că automobilele s-au întâlnit la jumătatea distanţei dintre cele două localităţi, aflaţi această distanţă.

32. Doi biciclişti au plecat în acelasi timp, din două localităţi, unul spre celălalt şi s-au întâlnit după **6** ore. Primul a parcurs în **2** ore tot atât cât a parcurs al doilea în **4** ore. Care a fost viteza fiecăruia, ştiind că distanţa dintre cele două localităţi este de **108** km?

33. Două maşini pornesc în acelaşi timp din A spre **B,** prima cu viteza de **24** km/h, iar a doua cu viteza de **56** km/h. Ştiind că distanţa dintre **A** şi B este de **280** km şi că a doua maşină, după ce ajunge în **B**, fără să se oprească, se întoarce spre **A**, aflaţi după câte ore de la plecare se întâlnesc.

34. Un biciclist pleacă din localitatea **A** spre localitatea **B**, mergând cu **12** km/h. După o jumătate de oră, pleacă din localitatea **A** un autoturism care ajunge biciclistul la o distanţă de **9** km faţă de **A**. După ce biciclistul a mai parcurs **6** km, este întâlnit de acelaşi autoturism care se întorcea din localitatea **B**, unde a stat un sfert de oră. Aflaţi viteza autoturismului şi distanţa dintre cele două localităţi.

35. Doi atleţi, primul având viteza de **4** m/s, al doilea, 7 m/s, au plecat simultan, unul spre celălalt, din două puncte diferite ale cartierului Dacia şi s-au întâlnit la **60** m depărtare de jumătatea distanţei pe care au parcurs-o împreună. Ce distanţă a parcurs fiecare, până când s-au întâlnit?

36. Din oraşele Galaţi şi Ploieşti, aflate la o distanţă de **210** km, pornesc unul spre celălalt, în acelaşi timp, doi motociclişti. Viteza medie a motociclistului care pleacă din Galaţi este $\frac{3}{4}$ din viteza medie a celuilalt motociclist. După două ore de la pornire, cei doi mai aveau de parcurs, până la întâlnirea lor, **70** de km. Aflaţi viteza medie a fiecărui motociclist.

37. Din cele două capete, **A** şi **B**, ale unei piste sportive, pornesc simultan, unul către celălalt, doi atleţi. Ei se întâlnesc prima dată la **48** m de **A**, îşi continuă drumul fără oprire, ajung la capete, se reîntorc, întâlnindu-se apoi a doua oară. A treia oară s-au întâlnit chiar in capătul A, după **60** de secunde de la plecare. Aflaţi lungimea pistei de la **A** la **B** şi vitezele celor doi atleţi.

38. Distanţa dintre două localităţi este de **258** km. Doi automobilişti pleacă în acelaşi timp din aceste localităţi şi merg unul către celălalt. Viteza unuia este cu **17** km/h mai mare decât a celuilalt. Ei se întâlnesc după **2** ore de la plecare. Aflați viteza fiecăruia dintre cele două autoturisme.

39. Un biciclist a plecat din localitatea **A** spre localitatea **B**, situate la o distanță de **288** km una față de alta. După **8** ore de mers, din **B** a plecat spre biciclist un motociclist ce avea o viteză de **3** ori mai mare. Cei doi s-au întâlnit la jumătatea drumului. Care a fost viteza biciclistului şi a motociclistului?

40. Un biciclist a plecat la ora **10** din oraşul **A** spre oraşul **B**. După **2** ore, a plecat din **B** spre **A** un motociclist cu viteza de **3** ori mai mare, întâlnindu-l pe biciclist la jumătatea drumului. Ştiind că distanța dintre oraşe este **de 60** km, aflați viteza de mers a fiecăruia şi la ce oră de la plecarea biciclistului se întâlnesc cei doi.

41. Din două oraşe pleacă în acelaşi timp două maşini, una spre alta: prima cu viteza de **80** km /h, a doua cu viteza de **70** km/h. Când se întâlnesc, o maşină trece de mijlocul distanței cu **10** km. Ce distanță este între cele două oraşe?

42. Doi biciclişti pleacă în acelaşi timp, unul spre celălalt, dorind să se întâlnească în **4** ore şi să străbată astfel distanța de **84** km. Ştiind că până la întâlnire, unul a parcurs cu **4** km mai mult decat celălalt, aflați viteza fiecărui biciclist.

43. Un motociclist din localitatea **A** şi un biciclist din localitatea **B** pleacă la ora **8**, unul către celălalt şi se întâlnesc la ora **11**. Ştiind că motocliclistul merge cu o viteză medie de **3** ori mai mare decât viteza biciclistului, aflați ora la care ajunge fiecare în localitatea de unde a plecat celălalt.

44. Din două localități pleacă la ora **8**, una spre cealaltă, două maşini; prima, având viteza de **2** ori mai mare, ajunge la ora **12** în localitatea de unde plecase a doua. Aflați: a) ora la care a ajuns a doua maşină în localitatea de unde a plecat prima maşina; b) la ce oră s-au întâlnit cele două maşini.

45. La ora **7**, un pieton pleacă spre oraşul **B** din localitatea **A**. După o oră, din aceeaşi localitate pleacă un autobuz care depăşeşte pietonul la ora **8** şi **12** minute. Ajungând în **B**, fără să se oprească, autobuzul se întoarce şi întâlneşte pietonul la ora **9**. Ştiind că distanța dintre cele două localități era de **24** km, aflați, în metri pe minut, viteza de deplasare a pietonului şi a autobuzului.

46. Rilă-Iepurilă şi Urechilă, doi iepuraşi poznaşi, şi-au ales ca antrenor, pentru alergările lor, pe un graur, care zboară cu o viteză medie de **90** km/h.

Într-o zi, graurul a obligat pe cei doi iepuraşi să se depărteze unul de altul la o distanță de **400** m. La un semnal, iepuraşii au pornit-o unul spre celălalt, Rilă-Iepurilă cu o viteză de **2** m/s, iar Urechilă cu **3** m/s. În tot acest timp, graurul zbura de la un iepuraş la celălalt, îndemnându-i să alerge cât mai repede. De-abia când cei doi iepuraşi s-au întâlnit, s-a oprit şi graurul, încercând să calculeze ce distanță a parcurs în zborul său de încurajare. Îl puteți ajuta?

47. Un automobilist, care intra într-un tunel de **10** km, mergând cu o viteză de **40** km /h, a fost depăşit de o rândunică ce zbura cu o viteză de **4** ori mai mare. Când să iasă din tunel, rândunica s-a speriat şi s-a]ntors până în dreptul automobilului, apoi, din nou, s-a îndreptat spre ieşire. Ajunsă la ieşire, iar s-a întors. A continuat astfel să zboare între automobil, care se tot apropia, şi ieşirea din tunel, într-un du-te-vino continuu, până ce maşina a ieşit din tunel. Ce distanță a parcurs randunica în interiorul tunelului?

48. Un motociclist pleacă din oraşul **A** cu o viteză medie de **30** km pe oră. După **4** ore, pleacă din acelaşi oraş şi în acelaşi sens un autoturism, care are o viteză medie de **60** km pe oră. După cât timp autoturismul va ajunge pe motociclist?

49. Doi biciclişti, primul cu viteza de **12** km pe oră, al doilea cu **9** km pe oră, pleacă spre aceeaşi localitate, din acelaşi loc, în acelaşi timp. Când primul a ajuns la destinație, al doilea mai avea de parcurs încă **18** km . Aflați distanța dintre cele două localități.

50. Doi pietoni pornesc în acelaşi timp din localitatea **A** şi merg spre localitatea **B**. Primul pieton are viteza de **6** km pe oră, iar al doilea, de **4** km pe oră. Primul ajunge în **B** cu o oră şi jumătate înaintea celui de-al doilea. Care este distanța dintre cele două localități?

51. Un motociclist, mergând cu aceeaşi viteză, parcurge în **8** ore **208** km, distanța de la Ploieşti la Miercurea-Ciuc. După **2** ore de la plecarea motociclistului din Ploieşti, porneşte după el un automobilist. Care era viteza medie a automobilistului, ştiind că îl ajunge pe motociclist la o distanță de **52** km de Miercurea Ciuc?

52. Doi biciclişti au plecat din acelaşi loc, în acelaşi timp şi în aceeaşi direcție. Primul are viteza medie de **6** m/s, iar al doilea, **4** m/s. După **5** minute de la plecare, primul biciclist s-a oprit să verifice roțile bicicletei. Urmărindu-l apoi pe al doilea, i-au fost necesare 7 minute ca să îl ajungă. Cât timp s-a oprit primul biciclist pentru verificarea roților?

53. Din localitatea **A** au plecat în acelaşi timp şi în acelaşi sens două autoturisme, primul cu viteza medie de **48** km/h, celălalt cu **36** km /h. După **2** ore, primul autoturism îşi întrerupe deplasarea, datorită unei defecțiuni. Reluându-şi călătoria, i-au fost necesare **4** ore ca să îl ajungă pe celălalt. Cât timp a staționat prima maşină?

54. Un motociclist, mergând cu **40** km pe oră, se află înaintea altui motociclist, care merge în acelaşi sens cu viteza de **60** km pe oră. Determinați distanța care se afla la început între ei, ştiind că după **15** minute de la plecarea celui de-al doilea motociclist, acesta l-a depăşit pe primul.

55. Doi motociclişti şi un biciclist pornesc în acelaşi timp din oraşul **A** spre oraşul **B**. Ştiind că primul motociclist merge cu viteza de **50** km /h şi ajunge în oraşul **B** la ora **8**, iar al doilea motociclist are o viteză de **30** km/h şi ajunge în oraşul **B** la ora **10**, să se afle la ce oră soseşte biciclistul în oraşul **B**, dacă acesta are o viteză de **10** km/h.

56. Din oraşul A, situat la **240** km de oraşul **B**, pleacă la interval de **4** ore, unul după altul, un ciclist şi un motociclist, cu vitezele respectiv de **20** km/h şi de **60** km/h. Ştiind că motociclistul porneşte la ora **11** şi că, ajungând în oraşul **B**, se întoarce spre oraşul **A** fără să se oprească, să se afle la ce oră şi la ce distanţă de oraşul **B** îl întâlneşte pe ciclist.

57. Alex, Tibi şi Dinu se joacă în curtea şcolii „de-a atleţii". Îşi stabilesc distanţa de parcurs, iar Oana, „arbitrul", consemnează rezultatele cronometrate: timpul necesar lui Tibi a fost cu **2** secunde mai mic decât timpul lui Alex, dar cu **2** secunde mai mare decât timpul necesar lui Dinu. Calculandu-şi vitezele, ei află că Alex a avut viteza medie de 3 m/s, iar Dinu 6 m/s. Puteţi afla viteza medie a lui Tibi?

58. Un biciclist, cu viteza de **360** m/min, se deplasează pe o şosea pe care îşi face încălzirea o coloană de sportivi ce are o viteză de **60** m/min.
a) Dacă coloana se deplasează în sens contrar biciclistului, acestuia îi trebuie **5** secunde pentru a merge de la un capăt la altul al coloanei.
b) Dacă biciclistul merge în acelaşi sens deplasării coloanei, acestuia îi trebuie **7** secunde pentru a merge de la un capăt la altul al coloanei.
Aflaţi, de fiecare dată, lungimea coloanei de sportivi.

59. Un călător, care mergea într-un tren de persoane ce avea viteza de **10** m/s, a observat că un tren accelerat, care mergea în sens contrar, a trecut pe lângă el în **2** secunde. Aflaţi viteza acceleratuli, ştiind că lungimea sa era de **50** m.

60. Pe o cale ferată dublă circulă, pe o linie, un tren accelerat lung de **42** m. Pe cealaltă linie, circulă un tren personal lung de **60** m. Dacă trenurile merg în acelaşi sens, acceleratul trece de celălalt tren în **17** secunde, iar dacă trenurile merg în sens contrar, acceleratul trece pe lângă trenul personal în **3** secunde. Care sunt vitezele celor două trenuri?

61. Pe o cale ferată dublă circulă, pe o linie, un tren cu viteza de **72** km/h şi cu lungimea de **326** m. Pe cealaltă linie, circulă un alt tren lung de **374** m, cu viteza de **54** km/h.
a) Să se afle timpul cât durează trecerea unui tren pe lângă celălalt, dacă merg în sensuri contrare.
b) Să se afle cât timp durează trecerea unui tren pe lângă celălalt, dacă ambele trenuri merg în acelaşi sens.

62. Un ogar urmăreşte o vulpe care are **15** sărituri înaintea lui. Câte sărituri face până să ajungă vulpea, dacă el face **2** sărituri, în timp ce vulpea face **3**, iar în **3** sărituri, ogarul parcurge aceeaşi distanţă pe care vulpea o străbate în **5** sărituri?

63. Câte sărituri trebuie să facă un câine pentru a ajunge un iepure care este la **75** sărituri în fața lui, știind că în timp ce câinele face **2** sărituri, iepurele face **3**, iar **5** sărituri de-ale iepurelui fac cât **2** de-ale câinelui?

64. Un câine urmărește o pisică ce se află la **24** sărituri în fața lui. Să se afle după câte sărituri câinele ajunge pisica, știind că, în timp ce câinele face **5** sărituri, pisica face **6** sărituri, iar **5** sărituri de-ale câinelui fac cât **8** sărituri de-ale pisicii.

65. Un ogar urmărește o vulpe care este distanțată la **60** de sărituri față de acesta. Vulpea face **9** sărituri, în timp ce ogarul face **6**, iar **3** sărituri de-ale ogarului fac cât **7** de-ale vulpii. Peste câte sărituri ogarul va ajunge vulpea?

66. Modificați problema anterioară, eliminând din enunț relația referitoare la ritmul săriturilor, apoi rezolvați-o.

67. a) Trei copii, A, B, și C participă la o cursă atletică de **100** m. Când A a terminat cursa, B era în urma lui cu **10** m. Când B termină cursa, C era în urma acestuia cu **10** m. La ce distanță de A se afla C, atunci când primul a ajuns pe linia de sosire, știind că fiecare are un ritm constant în alergare.

b) Dan și Ionuț se întrec la fugă. Deoarece Dan aleargă de **3** ori mai repede decât Ionuț, ei convin ca punctele de plecare să fie la o distanță de **30 m** unul față de altul. Știind că au plecat și au ajuns deodată la punctul de sosire, aflați câți metri parcurge fiecare copil.

68. Un vapor face **20** km în **2** ore, mergând în sensul apei, iar la înapoiere, în contra apei, în **4** ore. Aflați viteza de curgere a apei.

69. Vasile și Ion merg unul lângă altul. În timpul în care Vasile face **4** pași, Ion face **7** pași, amândoi parcurgând în acest timp aceeași distanță. Dacă lungimea pasului lui Vasile este de **70** cm, care este lungimea pasului lui Ion?

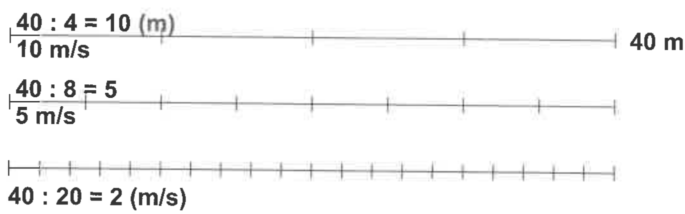
70. O barcă parcurge o distanță în sensul cursului apei în **4** ore, iar împotriva curentului apei parcurge aceeași distanță în **5** ore. În câte ore parcurge aceeași distanță o luntre mânată numai de viteza apei?

71. Andrei, Barbu și Costel s-au luat la întrecere la fugă pe distanța de **500** m. Când Andrei a terminat de alergat, Costel era în urma acestuia cu **230** m, iar când Barbu a terminat de alergat, Costel mai avea de parcurs **200** m.

Câți metri mai avea de parcurs Barbu, atunci când Andrei a terminat de alergat?

Probleme de mişcare. Rezolvări

1. Pentru a răspunde la primele două întrebări, scriem cele trei durate (***t***) ale mişcării, astfel: $\mathbf{t_a} = \mathbf{4}$ s; $\mathbf{t_b} = \mathbf{8}$ s; $\mathbf{t_c} = \mathbf{20}$ s. Fiind aceeaşi distanță, rezultă că $\mathbf{t_a} < \mathbf{t_b} < \mathbf{t_c}$, căci **4 < 8 < 20**. Se observă că distanța de 40 m este străbătută de atlet în timpul cel mai scurt, iar de către copil în timpul cel mai mare (el se mişcă mai încet). Din ce cauză $\mathbf{t_a} < \mathbf{t_b} < \mathbf{t_c}$? Reprezentăm grafic distanța de **40** m printr-un segment pe care îl împărțim în **4** părți egale, apoi în **8** părți egale şi, respectiv, în **20** părți egale, pentru a arăta câți metri sunt parcurşi *într-o singură secundă*, în fiecare caz:



Din desen, rezultă că *într-o singură secundă* atletul parcurge **10** m, biciclistul **5** m, iar copilul **2** m. Când avem numere mari, un asemenea desen este greu de realizat şi atunci apelăm la judecată, pe care o putem formula astfel: dacă în 4 secunde atletul parcurge **40** m, într-o singură secundă parcurge de **4** ori mai puțin decât **40** (deoarece şi 1 este mai mic decât **4** de **4** ori), adică **40 : 4 = 10** (m într-o secundă, pe scurt **10** m/s); dacă în **8** s biciclistul parcurge **40** m, într-o singură secundă parcurge de **8** ori mai puțin decât **40**, căci şi **1** este mai mic decât **8** de **8** ori, adică **40 : 8 = 5** (m/s); similar şi pentru viteza copilului: **2** m/s. Dacă viteza **(v)** înseamnă distanța parcursă *într-o unitate de timp*, aici într-o secundă, rezultă că pentru a afla viteza unui mobil, împărțim distanța parcursă la timpul în care are loc deplasarea, adică ***d : t = v***. Dacă *într-o secundă* atletul parcurge **10** m, iar copilul numai **2** m, rezultă că viteza atletului este mai mare decât viteza copilului, adică $\mathbf{v_a} > \mathbf{v_b} > \mathbf{v_c}$. Să scriem relațiile dintre cei trei timpi şi dintre cele **3** viteze, toate referindu-se *la aceeaşi distanță*: $\mathbf{t_a} < \mathbf{t_b} < \mathbf{t_c}$, adică **4** s < **8** s < **20** s, iar $\mathbf{v_a} > \mathbf{v_b} > \mathbf{v_c}$, adică **10 m/s > 5 m/s > 2 m/s**. Se observă că:

- $\mathbf{t_a} < \mathbf{t_b}$ de **2** ori, căci **8 : 4 = 2**; atunci $\mathbf{v_a} > \mathbf{v_b}$ de **2** ori, căci **10 : 5 = 2**.
- $\mathbf{t_a} < \mathbf{t_c}$ de 5 ori, căci **20 : 4 = 5**; atunci $\mathbf{v_a} > \mathbf{v_c}$ de **5** ori, căci **10 : 2 = 5** etc.

Fiind *aceeaşi distanță*, dacă *viteza creşte* de un număr de ori, atunci *timpul* necesar *se micşorează de acelaşi număr de ori*. (A se vedea problemele **2 – 69** din prezentul capitol).

2. Se cere *viteza medie*, adică se presupune că în fiecare oră automobilul a parcurs aceeaşi distanță, deşi *în practică* nu se prea întâmplă acest lucru (în funcție de condițiile întâlnite pe parcurs, automobilul frânează sau accelerează). Dacă în **8** ore, automobilul a parcurs **320** de km, într-o singură oră a parcurs de **8** ori mai puțin decât **320** km (căci şi **1** este mai mic decât **8**

de **8** ori), adică **320 : 8 = 40** (km/oră). Această judecată se poate scrie pe scurt: **v = 320 : 8 = 40** (km/oră) $\Rightarrow$ **v = d : t**.

3. Ce distanță trebuie să parcurgă? **16 x 9 = 144** (km).
Ce distanță a rămas de parcurs? **144 – 48 = 96** (km).
În cât timp a parcurs cei **48** de km? **48 : 16 = 3** (ore).
În cât timp a parcurs restul distanței? **9 – 3 – 2 = 4** (ore).
Cu ce viteză şi-a continuat drumul? **96 : 4 = 24** (km/h).

4. Ce distanță a parcurs în **2** ore? **2 x 40 = 80** (km).
Ce distanță a parcurs în **3** ore? **3 x 50 = 150** (km).
Ce distanță a parcurs în total (în cele **5** ore)? **80 + 150 = 230** (km).
Care a fost viteza <u>medie</u> a autoturismului? **230 : 5 = 46** (km/h).

5. <u>*Media celor două viteze*</u> *este*: **(60 + 30) : 2 = 45** (m/min).
Spre deosebire de aceasta, <u>*viteza medie*</u> se calculează <u>*împărtind distanța la timpul*</u> necesar parcurgerii ei. Dacă notăm cu ***d*** lungimea drumului parcurs de către Ovidiu până la bunici, cu t_1, timpul necesar la dus, iar cu t_2, timpul necesar la întors, obținem: $30 = d : t_1$, iar $60 = d : t_2$. Ni se cere însă <u>*viteza medie*</u> pentru <u>*întreg drumul*</u> (dus-întors), adică distanța parcursă de Ovidiu este $2d$, iar timpul necesar este $t_1 + t_2$. Atunci, <u>*viteza medie*</u> se obține astfel: $2d : (t_1 + t_2)$. Dar nu cunoaştem nici ***d*** şi nici $t_1 + t_2$. Ce am putea înlocui?

Dacă $t_1 = d : 30 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{30}$, iar $t_2 = \frac{d}{60}$. Deci $t_1 + t_2 = \frac{d}{30} + \frac{d}{60} = \frac{3d}{60} = \frac{d}{20}$.

Atunci viteza medie este $2d : \frac{d}{20} = 2d \cdot \frac{20}{d} = 40$ (m/min).

6. Se ştie că $d = v \cdot t$. Distanța parcursă de primul biciclist în **7** ore este $7v_1$, iar de al doilea în **3** ore, $3v_2$.
Din enunț, rezultă: $7v_1 = 3v_2 + 39$ km, iar $9v_1 = 6v_2 + 18$ km. Pentru a avea acelaşi termen de comparație, înmulțim fiecare membru al primei egalități cu **2** şi obținem: $14v_1 = 6v_2 + 78$ km, iar $9v_1 = 6v_2 + 18$ km.
Scăzând relațiile, membru cu membru, rezultă:
$5v_1 = 60$ km $\Rightarrow v_1 = 60 : 5 \Rightarrow v_1 = 12$ km/h.
Atunci $7 \times 12 = 3v_2 + 39 \Rightarrow 84 = 3v_2 + 39 \Rightarrow v_2 = 45 : 3 \Rightarrow v_2 = 15$ km/h.

7. Se ştie că $d = v \cdot t$. Fiind aceeaşi distanță, rezultă:
$5v = 7(v - 20) \Rightarrow 7v - 140 = 5v \Rightarrow 2v = 140 \Rightarrow v = 140 : 2 \Rightarrow v = 70$ km/h.

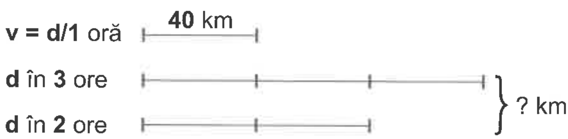
8. 1) Dacă **a** parcurge o jumătate din distanță în **3** ore, atunci toată distanța o parcurge în **2 x 3 = 6** ore; dacă **b** parcurge o treime din distanță în **2** ore, atunci toată distanța (adică **3** treimi) o parcurge în **3 x 2 = 6** ore; deci vitezele sunt egale.
2) Dacă **a** parcurge o jumătate din distanță în **2** ore, toată distanța va fi parcursă în **4** ore; dacă **b** parcurge o treime din distanță în **3** ore, atunci toată distanța este parcursă în **9** ore; deci viteza lui **a** este mai mare, căci timpul necesar este mai mic, distanța fiind aceeaşi.

3) **a** parcurge toată distanța în **4 x 3 = 12** ore, iar **b** parcurge aceeaşi distanță în **3 x 4=12** ore; deci vitezele sunt egale.
4) **a** parcurge toată distanța în **4 x 4 = 16** ore, iar **b** parcurge aceeaşi distanță în **3 x 3 = 9** ore; deci viteza lui **b** este mai mare, căci timpul necesar este mai mic.
5) **a** parcurge toată distanța într-o oră, iar **b** parcurge toată distanța tot într-o oră; deci vitezele sunt egale.
6) **a** parcurge toată distanța într-o jumătate de oră, iar **b** parcurge aceeaşi distanță în **4** jumătăți de oră, adică în **2** ore, deci viteza lui **a** este mai mare.

9. Reprezentarea grafică a relațiilor dintre mărimile date poate fi:

Dacă într-o oră bicicleta parcurge **12** km, atunci în **4** ore parcurge de **4** ori câte **12**, adică **4 x 12 = 48** km. Dar ce reprezintă **4**? Timpul (**t**) în care biciclistul parcurge toată distanța (**d**). Dar **12**? Distanța parcursă <u>*într-o singură oră*</u>, adică **12** km pe oră, deci viteza **v**. Rezultă: $\mathbf{d = t \cdot v}$.

10. Reprezentarea grafică a relațiilor poate fi:



Din desen, rezultă că putem parcurge două căi: Câți km a parcurs autocarul în **3** ore? **3 x 40 = 120** (km). Câți km a parcurs autocarul în **2** ore? **2 x 40 = 80** (km). Câți km a parcurs în total? **120 + 80 = 200** (km). *Sau:*

Câte ore au mers elevii cu autocarul? **3 + 2 = 5** (ore). Ce distanță a parcurs autocarul în **5** ore? **5 x 40 = 200** (km). *În exercițiu, cele două rezolvări*:

$\mathbf{d = t_1 \cdot v + t_2 \cdot v \Rightarrow d = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 40 \Rightarrow d = 200}$ (km) sau $\mathbf{d = t_1 \cdot v + t_2 \cdot v \Rightarrow d = v(t_1 + t_2) \Rightarrow d = 40\,(3 + 2) \Rightarrow d = 40 \cdot 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 40 + 2 \cdot 40 \Rightarrow d = 200}$ km.

11. $\mathbf{d = v \cdot t \Rightarrow d = 300\,000 \cdot 5 = 1\,500\,000}$ km $=$ **1 500 000 000** m.

12. $\mathbf{d = v \cdot t \Rightarrow d = 330 \cdot 2 = 660}$ m.

13. Dacă într-o secundă trenul parcurge o distanță de **20** m, în câte secunde va străbate o distanță de **72 000** m? În atâtea secunde de câte ori **20** se cuprinde în **72 000**, adică **72 000 : 20 = 3 600** secunde.

Sau: Dacă pentru a parcurge o distanță de **20** m trenul are nevoie de o secundă, atunci pentru **72 000** m, trebuie atâtea secunde câte grupe de **20** m putem organiza din **72 000** m, adică **72 000 : 20 = 3 600** (s).

Dar **72 000** m reprezintă distanța (**d**), **20** m/s reprezintă viteza medie, iar **3600** secunde reprezintă timpul în care are loc deplasarea. Deci $\mathbf{t = d : v}$.

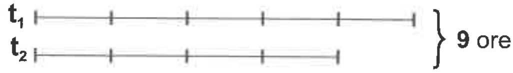
14. Dacă într-o oră drumeţul parcurge **4** km, distanţa de **12** km este străbătută în atâtea ore de câte ori **4** se cuprinde în **12** (sau: atâtea ore câte grupe de **4** km se pot face din **12** km), adică **12 : 4 = 3** ore.

Deci: $\mathbf{t = d : v \Rightarrow t = 12 : 4 \Rightarrow t = 3}$ ore.

15. Rezolvarea 1

Se ştie că $\mathbf{d = v_1 \cdot t_1}$ sau $\mathbf{d = v_2 \cdot t_2}$. Dacă $\mathbf{v_1 = 4}$ km/oră, iar $\mathbf{v_2} = \mathbf{5}$ km/oră, putem compara prin raport (de câte ori este mai mare sau mai mică una faţă de cealaltă), deoarece este aceeaşi distanţă: $\mathbf{v_1 : v_2 \Rightarrow 4 : 5 \Rightarrow v_1 = \frac{4}{5}}$ din $\mathbf{v_2}$.

Atunci $\mathbf{t_2}$ este cât $\mathbf{\frac{4}{5}}$ din $\mathbf{t_1}$, căci dacă viteza creşte, la acelaşi spaţiu, timpul se micşorează de acelaşi număr de ori. Rezultă că timpul necesar parcurgerii distanţei la dus ($\mathbf{t_1}$) constituie **5** părţi egale, iar timpul necesar la întors ($\mathbf{t_2}$), **4** asemenea părţi, adică:



Rezultă: $\mathbf{t_1 = 9 : (5 + 4) \times 5 = 5}$ (ore); $\mathbf{t_2 = 9 : (5 + 4) \times 4 = 4}$ (ore).

Care este lungimea drumului (**d**)? $\mathbf{d = v_1 \cdot t_1 \Rightarrow d = 4 \cdot 5 = 20}$ km *sau:*

$\mathbf{d = v_2 \cdot t_2 \Rightarrow d = 5 \cdot 4 = 20}$ km.

Rezolvarea 2

Se ştie că $\mathbf{d = v \cdot t}$. Dacă $\mathbf{v_1 = \frac{4}{5} \cdot v_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{5} \cdot t_1}$, atunci $\mathbf{t_1 + \frac{4}{5}\, t_1 = 9}$ ore $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\frac{9}{5}\, t_1 = 9}$ ore $\Rightarrow \mathbf{t_1 = 9 : 9 \times 5 \Rightarrow t_1 = 5}$ ore. Deci $\mathbf{d = 4 \cdot 5 = 20}$ km.

(Se poate calcula ***d***, ştiind că $\mathbf{t_1 = \frac{5}{4}\, t_2}$)

Rezolvarea 3

Pietonul parcurge la dus **1** km doar într-un sfert de oră ($\mathbf{\frac{1}{4}}$ din oră), iar la întoarcere în a cincea parte ($\mathbf{\frac{1}{5}}$) dintr-o oră. Rezultă că **2** km, unul la dus şi unul la întors, sunt parcurşi de pieton în $\mathbf{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}}$ ore. Dacă în $\mathbf{\frac{9}{20}}$ oră pietonul străbate **2** km, dus şi întors, în **9** ore, câte asemenea distanţe parcurge (care este lungimea drumului)? $\mathbf{9 : \frac{9}{20} = 9 \cdot \frac{20}{9} = 20}$ (km);

$\mathbf{2 \times 20 : 2 = 20}$ (km).

Rezolvarea 4

La întoarcere, în timp de o oră, pietonul parcurge **5** km. La dus, distanţa de **5** km este parcursă într-un timp mai mare (viteza este mai mică), adică în $\mathbf{\frac{5}{4}}$ ore. În cât timp parcurge **5** km la dus şi **5** km la întors, adică **10** km?

$\mathbf{1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}}$ (ore). Câţi km parcurge pietonul într-o oră? $\mathbf{10 : \frac{9}{4} = 10 \cdot \frac{4}{9} = \frac{40}{9}}$ (km), din care jumătate la dus, jumătate la întors. Ce distanţă parcurge în **9** ore?

$\mathbf{9 \cdot \frac{40}{9} = 40}$ (km). Rezultă că jumătate din **40** km este lungimea drumului, adică **40 : 2 = 20** km.

Rezolvarea 5

(O altă variantă a raționamentului de mai sus). La dus, în timp de o oră, pietonul parcurge **4** km. La întoarcere, distanța de **4** km este parcursă în $\frac{4}{5}$ oră. În cât timp parcurge **4** km la dus şi **4** km la întors, adică **8** km?

$1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ (ore). Câți km parcurge pietonul într-o oră? $8 : \frac{9}{5} = 8 \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{9}$ (km), din care jumătate la dus, jumătate la întors. Ce distanță parcurge în **9** ore?

$9 \cdot \frac{40}{9} = 40$ (km). Rezultă că jumătate din **40** km este lungimea drumului, adică $40 : 2 = 20$ km.

Rezolvarea 6 (Falsă ipoteză)

Presupunem că lungimea drumului este de **40** km (un multiplu de **4** şi **5**). În această ipoteză, care ar fi timpul la dus (t_1)? $40 : 4 = 10$ (ore).

Dar timpul la întoarcere (t_2)? $40 : 5 = 8$ (ore).

Timpul total (dus-întors) ar fi $10 + 8 = 18$ ore.

În realitate, timpul total este de **9** ore, deci de $18 : 9 = 2$ ori mai mic decât cel presupus de noi. Atunci drumul este de $40 : 2 = 20$ km, căci dacă micşorăm timpul necesar, se micşorează şi distanța de acelaşi număr de ori.

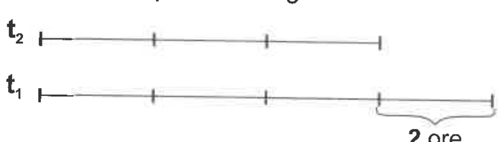
Rezolvarea 7

Notăm cu **d** lungimea drumului. Se ştie că $d : v = t$. Atunci $t_1 = d : v_1$, iar $t_2 = d : v_2$, iar $\frac{d}{4} + \frac{d}{5} = 9 \Rightarrow \frac{5d + 4d}{20} = 9 \Rightarrow 9d = 9 \cdot 20 \Rightarrow d = 20$ (km).

16. Rezolvarea 1

De câte ori este mai mare viteza la întoarcere față de cea la dus?

$12 : 9 = 4 : 3 = 1\frac{1}{3}$ ori. Rezultă că timpul la dus (t_1) este de $1\frac{1}{3}$ ori mai mare decât timpul necesar la întoarcere (t_2), distanța fiind aceeaşi. Putem apela la următoarea reprezentare grafică:



Rezultă că $\frac{1}{3}$ din t_2 reprezintă **2** ore, căci $t_1 - t_2 = 2$ ore, iar **4** părți – **3** părți = = **1** parte. Atunci $t_2 = 3 \times 2 = 6$ ore, iar $t_1 = 4 \times 2 = 8$ ore *sau*: $t_1 = 6 + 2 = 8$ ore.

Distanța dintre **D** şi **I** este de **72** km, căci $6 \times 12 = 72$ (km) sau $8 \times 9 = 72$ (km).

Rezolvarea 2

Dacă la dus, într-o oră parcurge **9** km, iar la întoarcere **12** km, rezultă că într-o oră la dus rămâne în urmă cu **3** km față de o oră la întors, căci $12 - 9 = 3$ (km). Cu câți km rămâne în urmă la tot drumul spre I? $2 \times 9 = 18$ (km).

Aceşti **18** km sunt acumulați câte **3** în fiecare oră din cele necesare parcurgerii distanței la întoarcere. În cât timp a parcurs distanța la întoarcere? **18 : 3 = 6** (ore). Care este distanța dintre cele două localități?
6 x 12 = 72 (km) sau: $\mathbf{t_2 = 6 + 2 = 8}$ (ore); **d = 8 x 9 =72** (km).

Rezolvarea 3

Dacă la întoarcere biciclistul ar fi mers ***tot atâta timp*** cât la dus, adică încă **2** ore, biciclistul ar fi parcurs în plus **2 x 12 = 24** km. Fiind acelaşi timp, diferența de **24** km s-ar acumula din cauza diferenței de viteze, adică:
12 – 9 = 3 (km/oră). În cât timp se acumulează diferența de **24** km? **24 : 3 = 8** (ore). Care este distanța dintre cele două localități? **8 x 9= 72** (km) *sau*:
(8 – 2) x 12 = 72 (km).

Rezolvarea 4

Presupunem că distanța dintre I şi D este un număr de km (oarecare). Pentru uşurarea calculelor luăm un număr care se împarte exact la **9** şi la **12**. De exemplu, **36** km. În cât timp parcurge drumul la dus? **36 : 9 = 4** (ore).

Dar la întors? **36 : 12 = 3** (ore). Care este diferența de timp dintre cele două deplasări? **4 – 3 = 1** oră. Ipoteza este falsă. În problemă, diferența dată este de **2** ore. De câte ori mai mare decât **1** oră? **2 : 1 = 2** (ori). Câți km are distanța dintre D şi I? **2 x 36 = 72** (km).

Rezolvarea 5

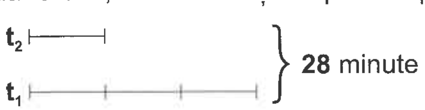
Notăm cu ***y*** numărul de ore necesare parcurgerii drumului la întoarcere. Fiind aceeaşi distanță, rezultă: $\mathbf{9(y + 2) = 12y \Rightarrow 9y + 18 = 12y \Rightarrow y = 6}$; distanța este de **6 x 12 = 72** km.

Rezolvarea 6

Notăm cu **d** distanța cerută, cu $\mathbf{t_1}$ şi respectiv $\mathbf{t_2}$, timpul necesar parcurgerii acestei distanțe la dus şi, respectiv, la întoarcere. În general, **t = d : v**; $\mathbf{t_1 = \frac{d}{9}}$,
$\mathbf{t_2 = \frac{d}{12}}$. Rezultă: $\mathbf{\frac{d}{9} - \frac{d}{12} = 2 \Rightarrow \frac{4d - 3d}{36} = 2 \Rightarrow d = 2 \bullet 36 = 72}$ (km).

17. Rezolvarea 1

Deoarece viteza din prima jumătate a distanței este de **3** ori mai mică decât viteza din a doua jumătate, rezultă că timpul necesar din prima etapă este de **3** ori mai mare decât timpul necesar din etapa a doua, distanțele fiind egale, adică: $\mathbf{v_1 \bullet t_1 = v_2 \bullet t_2}$. Ca urmare, timpul de **28** de minute poate fi organizat în **4** părți, fiecare parte fiind egală cu timpul necesar în etapa a doua. Grafic, această relație se poate reprezenta astfel:



În cât timp parcurge biciclistul a doua jumătate a distanței ? **28:4=7** (minute).

Rezolvarea 2

Din enunț rezultă că $\mathbf{d = v_1 \bullet t_1 = v_2 \bullet t_2}$, iar $\mathbf{t_1 + t_2 = 28}$ minute. Dacă $\mathbf{v_2 = 3\,v_1}$, rezultă că $\mathbf{t_1 = 3t_2}$, deoarece la distanțe egale, timpul necesar este invers proporțional cu viteza (dacă viteza creşte, timpul necesar se micşorează de acelaşi număr de ori şi invers). Atunci $\mathbf{3t_2 + t_2 = 28}$ (minute) => $\mathbf{t_2 = 28 : 4 = 7}$ (minute).

Rezolvarea 3

Dacă $\mathbf{v_2 = 3\,v_1}$, rezultă că $\mathbf{t_1 = 3t_2}$. Presupunem că $\mathbf{t_2 = 1}$ minut, atunci $\mathbf{t_1}$ ar fi **3 x 1 = 3** minute, în total ar fi **4** minute. De câte ori mai puțin decât **28** minute? **28 : 4 = 7** ori. Atunci $\mathbf{t_2}$ **= 7 x 1 = 7** minute (iar $\mathbf{t_1}$ **= 7 x 3 = 21** minute).

Rezolvarea 4

Dacă $t_2 = \dfrac{d}{v_2}$, iar $t_1 = \dfrac{d}{v_1}$, rezultă $\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2} = 28 \Rightarrow \dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{3v_1} = 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3d + d}{3v_1} = 28 \Rightarrow \dfrac{4d}{3v_1} = 28$. Atunci $\dfrac{d}{v_1} = 28 \cdot \dfrac{3}{4} = 21$; dar $\dfrac{d}{v_1} = t_1$,

deci $t_1 = 21$ minute, iar $t_2 = 28 - 21 = 7$ (minute).

18. Pe scurt şi reprezentarea grafică:

A ⊢ $v_1 = 6$ km/h, $t_1 = ?$ — 1 oră — C — $v_2 = 12$ km/h, $t_2 = ?$ ⊣ B ⟶ **18** km; **t = 3** ore.

Rezolvarea 1

1) În cât timp şi-a propus Dan să ajungă la tren? **t = d : v** $\Rightarrow$ **t = 18 : 6 = 3** (ore).
2) Cât timp se deplasează efectiv Dan? **3 – 1 = 2** (ore).
3) Dacă ar fi mers permanent cu **6** km pe oră, ce distanță ar fi parcurs în cele **2** ore? **2 x 6 = 12** (km).
4) Ce distanță ar fi rămas neparcursă? **18 – 12 = 6** (km). Totuşi, această distanță este parcursă. Cum este posibil? Deoarece trăsura are o viteză dublă, timpul va fi de **2** ori mai mic decât timpul necesar lui Dan pentru a parcurge restul distanței.
5) Cu cât este mai mare viteza trăsurii față de viteza de deplasare a lui Dan?
2 x 6 – 6 = 6 (km/h). Deci, într-o oră, trăsura parcurge în plus **6** km.
6) În cât timp recuperează cei **6** km care ar fi rămas neparcurşi? **6 : 6 = 1** oră.
Deci Dan merge cu trăsura timp de o oră şi ajunge la tren.
7) La ce distanță de gară se oprise Dan? **1 x (2 x 6) = 12** (km).

Rezolvarea 2

Dacă după oprire, Dan ar fi mers tot cu **6** km pe oră, după **18 : 6 – 1 = 2** ore, ar fi rămas neparcursă distanța de **6** km , căci **18 – 2 x 6 = 6**.

Dacă trăsura are viteza de **2 x 6 = 12** km/oră, înseamnă că ea recuperează **12 – 6 = 6** km într-o oră, timpul total fiind de **2** ore.

Deci la **12** km distanță de gară, Dan s-a oprit şi a aşteptat trăsura.

19. Rezolvarea 1

1) Câte ore ar fi trebuit să meargă motociclistul? **18 – 9 = 9** (ore).
2) Care a fost prima viteză? **180 : 9 = 20** (km/oră).
3) Câte ore se deplasează motociclistul? **9 – 2 = 7** (ore).
4) Care a fost viteza a doua? **20 + 10 = 30** (km/h).

De aici avem **două variante:**

*a) Presupunem că motociclistul ar fi mers în cele **7** ore numai cu prima viteză.*

5) Ce distanță ar fi parcurs? **7 x 20 = 140** (km).

6) Ce distanță ar fi rămas neparcursă? **180 – 140 = 40** (km). Înlocuim câte o oră în care am considerat că viteza a fost de **20** km /h cu câte o oră cu viteza de **30** km/h.

7) Care este diferența de viteze (Cu cât se micşorează diferența de **40** km la o singură înlocuire)? **30 – 20 = 10** (km).

8) Câte ore a mers motociclistul cu viteza a doua (Câte înlocuiri vom face până dispare diferența de **40** km)? **40 : 10 = 4** (ore).

9) La ce distanță de Galați s-a oprit prima dată? **4 x 30 = 120** km.

b) Presupunem că motociclistul ar fi mers în cele 7 ore numai cu a doua viteză.

Rezolvarea în exercițiu poate fi:

{18 – 9 – 2 x 1 – [7 x (20 + 10) – 180] : 10} x (20 x 10) =
= [7 – (7 x 30 – 180) : 10] x 30 = (7 – 30 : 10) x 30 = 120 (km).

20. Rezolvarea 1

a) Presupunem că tot timpul motociclistul ar fi mers cu viteza propusă, adică **200** m/minut.

1) Cât timp ar fi mers cu această viteză? **72 000 : 200 – 60 = 300** (minute).

2) Ce distanță ar fi rămas neparcursă? **72 000 – 300 x 200 = 12 000** (m).

3) Câte minute a mers cu viteză mărită? **12 000 : (600 – 200) = 30** (minute).

4) Ce distanță a parcurs în **30** minute? **30 x 600 = 18 000** (m). La ce distanță de punctul de pornire s-a oprit? **72 000 – 18 000 = 54 000** (m)
sau (după punctul **3**): Câte minute a mers cu viteza de **200** m/minut?
6 x 60 – 60 – 30 = 270 (minute).
Ce distanță parcurge în **270** minute? **270 x 200 = 54 000** m = **54** km.

b) *În altă variantă*: Presupunem că motociclistul ar fi mers cele **300** de minute (adică cele **72000 : 200 – 60 = 300** minute), cu viteza mărită, deci **3 x 200 = 600** m/minut.

1) Ce distanță ar fi parcurs? **600 x 300 = 180 000** (m).

2) Cu câți metri ar fi parcurs în plus? **180 000 – 72 000 = 108 000** (m).

3) Care a fost diferența de viteze (Cu câți metri ar fi mers mai mult într-un minut în aceasta variantă)? **600 – 200 = 400** (m/minut).

4) Câte minute a mers cu viteza de **200** m pe minut? (După cât timp de la plecare s-a oprit motociclistul)? **108 000 : 400 = 270** (minute).

5) La ce distanță de punctul de plecare s-a oprit pentru reparații?
270 x 200 = 54 000 (m) **= 54** km.

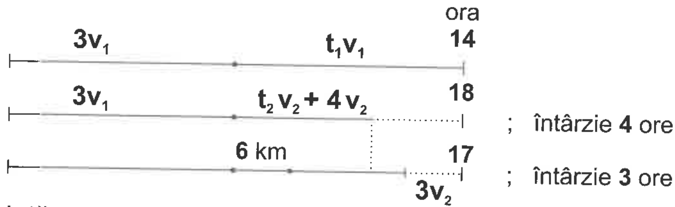
Rezolvarea 2

Dacă după oprire, motociclistul ar fi mers tot cu **200** m/minut, adică cu **12** km/h, după cele **5** ore de mers (căci **72 : 12 – 1 = 5**), ar fi rămas neparcurşi **12** km. Dacă după reparație motocicleta are o viteză triplă, înseamnă că într-o oră ea străbate mai mult decât în prima etapă cu **3 x 12 – 12 = 24** km. Ca să ajungă tot în timpul de **5** ore, înseamnă că el a mers cu viteza a doua o distanță în care a recuperat şi cei **12** km.

Dacă într-o oră motociclistul recuperează **24** km, înseamnă că **12** km îi recuperează în jumătate de oră, căci **24 : 2 = 12**.

Deci motocicleta s-a defectat la o distanță pe care a parcurs-o apoi în jumătate de oră cu viteza de **3 x 12 = 36** km pe oră, adică la **36 : 2 = 18** km de punctul de sosire, deci la **72 – 18 = 54** km de punctul de plecare.

21. Reprezentarea grafică poate fi:



Notăm cu t_1 şi v_1 timpul şi, respectiv, viteza bicicletei, cu t_2 şi v_2 timpul şi, respectiv, viteza deplasării pe jos.

Dacă v_2 este de **3** ori mai mică decât v_1, rezultă că, pentru aceeaşi distanță, t_2 este de **3** ori mai mare decât t_1, adică distanța ce ar fi fost parcursă cu bicicleta într-o oră este parcursă pe jos în **3** ore.

Cu câte ore mai mult? **3 – 1 = 2** (ore).

Dacă la fiecare oră cu v_1, întârzierea este de **2** ore, atunci de la câte ore cu v_1 se produce o întârziere de **4** ore, dacă se deplasează pe jos? **4 : 2 = 2** (ore).

Deci, dacă distanța după oprire ar fi străbătută cu v_1 în **2** ore, pentru toată distanța ar fi fost necesare **5** ore, căci **3 + 2 = 5.**

În ultima situație, întârzierea este de **3** ore, căci **17 – 14 = 3.** Dacă pentru distanța care ar fi fost parcursă cu v_1 într-o oră sunt necesare **3** ore cu v_2, deci mai mult cu **2** ore, de la câte ore cu v_1 se acumulează o întârziere de **3** ore dacă se deplasează cu v_2? $3 : 2 = 1\frac{1}{2}$ (ore).

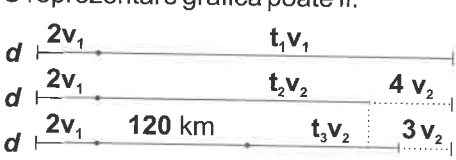
Rezultă că timpul necesar parcurgerii distanței:
a) era dorit a fi **5** ore, căci **3 + 2 =5;**
b) a fost de **9** ore, căci **3 + 2 + 4 = 9;**
c) putea fi de **8** ore, căci **9 – 1 = 8**.

În ultima situație, se observă că **3** ore + $6 : v_1 + 1\frac{1}{2}$ ore + **3** ore = **8** ore =>

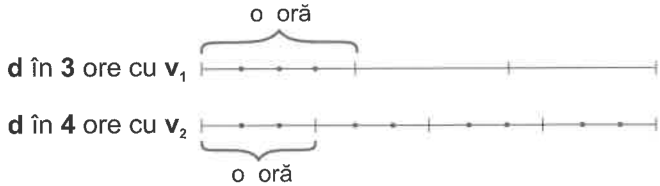
$7\frac{1}{2} + 6 : v_1 = 8 \Rightarrow 6 : v_1 = \frac{1}{2}$ oră $\Rightarrow v_1 = 6 \times 2 = 12$ (km/h); timpul de plecare a fost ora **9**, căci **14 – 5 = 9**; $v_2 = 12 : 3 = 4$ (km/h); distanța dintre cele două localități a fost de **60** km, căci **12 x 5 = 60**.

22. Rezolvarea 1

O reprezentare grafică poate fi:



Dacă v_2 este cât $\frac{3}{4}$ din v_1, rezultă că, la aceeaşi distanță, t_1 este cât $\frac{3}{4}$ din t_2, adică distanța, care ar fi fost parcursă în **3** ore cu prima viteză, este străbătută în **4** ore cu viteza a doua (relația dintre timp şi viteză), adică:



Dacă la fiecare **3** ore întârzierea este de o oră (**4 – 3 = 1**), atunci la câte grupe de **3** ore cu v_1 se produce o întârziere de **4** ore, dacă se deplasează cu v_2? adică **1 x ? = 4**; **4 : 1 = 4** (grupe). În câte ore ar străbate distanța de după oprire cu v_1? **4 x 3 = 12** (ore). În ultima situație, întârzierea este de **3** ore. Dacă pentru distanța care ar fi fost parcursă cu prima viteză în **3** ore sunt necesare **4** ore cu viteza a doua (mai mult cu o oră), de la câte grupe de **3** ore cu v_1 se acumulează o întârziere de **3** ore? De la **3** grupe de câte **3** ore, adică de la **9** ore. Rezultă că timpul necesar parcurgerii distanței:

a) era planificat a fi **14** ore, căci **2 + 12 = 14;**

b) a fost de **18** ore, căci **2 + 12 + 4 = 18**;

c) putea fi de **17** ore, căci **18 – 1 = 17**.

În ultima situație, se observă că: $2 + 120 : v_1 + 9 + 3 = 17$, adică $120 : v_1 = 3$ $\Rightarrow v_1 = 40$ km/h; $v_2 = \frac{3}{4} \cdot 40 \Leftrightarrow v_2 = 30$ km/h; $d = 14 \cdot 40 = 560$ km sau

$d = 2 \times 40 + 16 \times 30 = 560$ km sau $d = 2 \times 40 + 120 + (9 + 3) \cdot 30 = 560$ km.

<u>Rezolvarea 2</u>

În prima situație, după oprire, mergând cu v_1, ar fi fost nevoie de **12** ore. În ultima situație, după cei **120** km, dacă ar fi mers până la punctul de sosire cu v_1, în loc de **12** ore, ar fi fost necesare **9** ore, căci $v_2 = \frac{3}{4}$ din v_1, de unde $t_1 = \frac{3}{4}$ din t_2. Rezultă că $12v_1 = 9v_1 + 120$ km $\Leftrightarrow 120$ km $= 3\,v_1 \Rightarrow$

$v_1 = 120 : 3 \Rightarrow v_1 = 40$ km/h; $v_2 = \frac{3}{4} \cdot 40 \Leftrightarrow v_2 = 30$ km/h; $d = 40 \times 16 =$

$= 560$ km.

<u>Rezolvarea 3</u>

Dacă într-o oră străbate cât $\frac{3}{4}$ din distanța pe care ar parcurge-o cu viteza inițială într-o oră, atunci în **4** ore străbate cât ar merge cu prima viteză în $\frac{12}{4}$ ore, căci $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ ore. Dar distanța parcursă în **3** ore? $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ (ore). Într-o oră, rămâne în urmă cu distanța pe care ar parcurge-o în $\frac{1}{4}$ oră, căci $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, iar pentru toată distanța de după oprire întârzie cu $\frac{12}{4}$ ore (cu **3** ore); în ultima situație întârzie cu $\frac{9}{4}$ ore.

În câte ore ar străbate distanța de după oprire cu prima viteză?

(De la câte ore se acumulează o întârziere de $\frac{12}{4}$ ore?). Dacă de la o oră se acumulează o diferență de $\frac{1}{4}$ oră, întârzierea de $\frac{12}{4}$ ore se acumulează la **12** ore, căci $\frac{12}{4} : \frac{1}{4} = 12$ (ore).

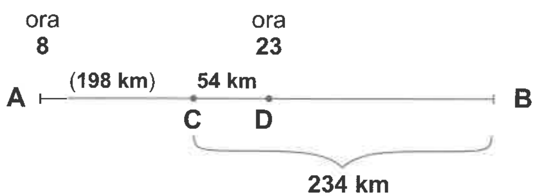
Dar când întârzie cu $\frac{9}{4}$ ore? De la **9** ore, căci $\frac{9}{4} : \frac{1}{4} = 9$. Deci: distanța:

a) este planificată a fi parcursă în **12 + 2 = 14** ore;
b) este parcursă în **2 + 12 + 4 = 18** ore;
c) ar putea fi parcursă în $2 + 120 : v_1 + 9 + 3 = 15 + 120 : v_1$.
Din compararea ultimelor două egalități, rezultă că $18 = 15 + 120 : v_1$,

adică $v_1 = 120 : 3 \Rightarrow v_1 = 40$ km/h; $v_2 = 40 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow v_2 = 30$ km/h;

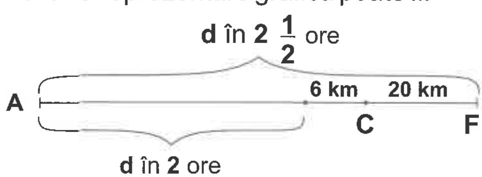
distanța este de **560** km, căci **40 • 14=560**.

23. Pentru a afla distanța **AC**, trebuie să determinăm viteza navei şi timpul în care este parcursă această distanță.
Reprezentarea grafică poate fi:



1) Care este distanța DB? **234 – 54 = 180** (km).
2) În cât timp parcurge nava distanța DB? De la orele **23** la orele **9** sunt **10** ore *sau*: Dacă distanța AB este parcursă în **24** de ore, (de la ora **9** la ora **9** a doua zi), iar distanța AD este parcursă până la orele **23**, adică în **14** ore, înseamnă că distanța DB este parcursă în **24 – 14 = 10** ore.
3) Care este viteza navei? **180 : 10 = 18** (km/h).
4) În cât timp parcurge distanța de **234** km, adică distanța CB?
234 : 18 = 13 (ore).
5) În cât timp parcurge distanța AC? **24 – 13 = 11** (ore).
6) Care este distanța AC? **11 x 18 = 198** (km).

24. Rezolvarea 1
Notăm cu C punctul în care se află casa automobilistului (adică oraşul Suceava), cu F punctul în care se află satul unde locuieşte fratele, cu **v** viteza. O reprezentare grafică poate fi:



• Se observă că în $2\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ oră automobilistul parcurge distanța de **6 + 20 = 26** km.

Dacă în jumătate de oră parcurge **26** km, într-o oră parcurge **2 x 26 = 52** km. Deci viteza medie este de **52** km/h. La ce distanță de orașul Suceava se află orașul Vatra Dornei?

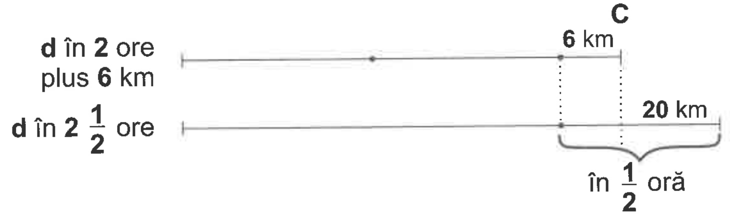
$2 \times 52 + 6 = 104 + 6 = 110$ km sau $2\frac{1}{2} \times 52 - 20 = 104 + 26 - 20 = 110$ km.

Pe scurt: $2\frac{1}{2}v - 2v = 26 \Rightarrow \frac{1}{2}v = 26 \Rightarrow v = 26 \cdot 2 = 52$ km/h;

$d = 2 \cdot 52 + 6 \Rightarrow d = 110$ km.

Rezolvarea 2

Putem reprezenta grafic distanța (**d**) ce poate fi parcursă astfel:



Din desen rezultă că în $\frac{1}{2}$ oră automobilistul parcurge **20 + 6 = 26** km, iar într-o oră **2 x 26 = 52** km.

Distanța până acasă este de **110** km, căci **2 x 52 + 6 = 110** km sau

$2\frac{1}{2} \times 52 - 20 = 110$ km.

Rezolvarea 3

Din enunț rezultă că diferența dintre cele două parcursuri (în $2\frac{1}{2}$ ore și, respectiv, în **2** ore) este de **26** km, căci **20 + 6 = 26** km.

Presupunem că viteza automobilistului a fost de **16** km/h. Atunci, distanța ($d = v \cdot t$) parcursă ar fi fost $d_1 = 2 \cdot 16 = 32$ km, iar în situația a doua

$d_2 = 2\frac{1}{2} \cdot 16 = 40$ km; care ar fi fost diferența dintre cele două parcursuri (cele

două distanțe)? **40 – 32 = 8** km. De câte ori este mai mică această diferență

decât **26** km? $26 : 8 = 3\frac{2}{8}$ (ori) $= 3\frac{1}{4}$ (ori). Rezultă că viteza de **16** km din

ipoteza noastră trebuie mărită de $3\frac{1}{4}$ ori pentru ca diferența dintre distanțele parcurse să fie de **26** km.

Care a fost viteza automobilistului? $3\frac{1}{4} \cdot 16 = 52$ km/h.

Care este distanța dintre Suceava și Vatra Dornei? **2 x 52 + 6 = 110** km

sau $2\frac{1}{2} \times 52 - 20 = 110$ km.

Rezolvarea 4

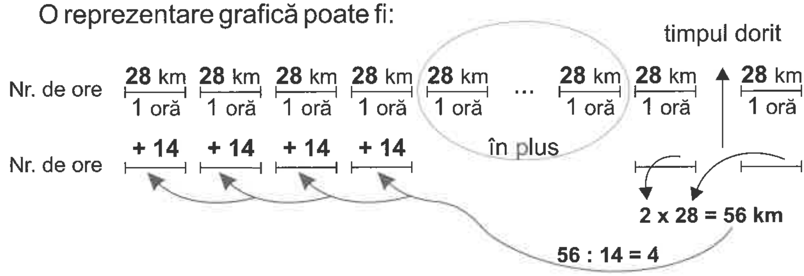
Notăm cu **d** distanța dintre cele două orașe, cu d_1 și d_2 distanța parcursă în **2** ore și,respectiv, în **2** ore și jumătate. Deoarece viteza este constantă, înseamnă că d_1 este mai mică decât d_2 de atâtea ori de câte ori **2** este mai mic decât $\mathbf{2\frac{1}{2}}$, adică de $\mathbf{2 : \frac{5}{2} = \frac{4}{5}}$ ori. Deci $\mathbf{d_1 = \frac{4}{5}\, d_2}$. Dar $\mathbf{d_2 - d_1 = 20 + 6 =}$

$\mathbf{= 26}$ km. Rezultă că $\mathbf{d_2 - \frac{4}{5}\, d_2 = 26}$ km, adică $\mathbf{\frac{1}{5}\, d_2 = 26}$ km $\mathbf{\Rightarrow d_2 = 26 \bullet 5 \Rightarrow}$

$\mathbf{d_2 = 130}$ km; $\mathbf{d = 130 - 20 = 110}$ km.

25. Rezolvarea 1

O reprezentare grafică poate fi:



Cu câţi km parcurge mai mult într-o oră în a doua variantă (faţă de prima variantă)? **42 – 28 = 14** (km). Care este diferenţa de timp între cele două variante? **1 + 1 = 2** (ore). În câte ore parcurge distanţa cu maşina?

În atâtea ore de câte ori **14** se cuprinde în **2 x 28**, adică în **56 : 14 = 4** ore.

Care este distanţa dintre Sibiu şi Cluj-Napoca? **4 x 42 = 168** (km) sau

(4 + 2) x 28 = 168 (km).

Rezolvarea 2

Din enunţ rezultă că diferenţa de timp dintre cele două situaţii este de **2** ore, căci **1 + 1 = 2**. Presupunem că distanţa dintre cele două oraşe este de **84** km (un multiplu al vitezelor **28** km/h şi, respectiv, **42** km/h). În prima situaţie, care ar fi fost timpul necesar parcurgerii distanţei? **84 : 28 = 3** (ore). Dar în a doua situaţie? **84 : 42 = 2** ore (ore). Care ar fi fost diferenţa de timp dintre cele două situaţii? **3 – 2 = 1** (oră). Dacă la o distanţă de **84** km, diferenţa de timp este de **1** oră, pentru ca această diferenţă să fie de **2** ore, rezultă că distanţa a fost de **2 x 84 = 168** (km).

Rezolvarea 3

Notăm cu **d** distanţa cerută, cu **t** timpul în care Sorin *dorea* să parcurgă această distanţă. Se ştie că: **d : v = t**. Prima parte a enunţului poate fi scrisă astfel: **t = d : 28 – 1**. Din a doua parte, rezultă: **t = d : 42 + 1**.

Atunci **d : 28 – 1 = d : 42 + 1 => d : 28 = d : 42 + 2 =>** $\mathbf{\frac{d}{28} - \frac{d}{42} = 2 \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow \frac{3d - 2d}{84} = 2 \Rightarrow d = 2 \times 84 \Rightarrow d = 168}$ (km).

26. La numărul **16 961** *se adaugă* alt număr, deci numărul obţinut este mai mare. Cu cât? Cu cel puţin **40**. (În mod obişnuit, *viteza medie* a unei maşini este mai mare de **20** km/h). Numărul obţinut este de forma **17a71**. Dacă **a** este **0**, viteza va fi: **(17017 – 16 961) : 2 = 110 : 2 = 55** (km/h). Dacă **a** este **1**, viteza ar fi fost mai mare, căci **210 : 2 = 105** (km/h).

27. Rezolvarea 1

Reprezentarea grafică poate fi:

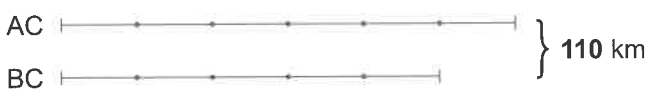
Într-o oră cei doi biciclişti parcurg la un loc **22** km, căci **10 + 12 = 22** km. Deci distanța dintre ei se micşorează în fiecare oră cu câte **22** km. După câte ore se întâlnesc? **110 : 22 = 5** (ore). În exercițiu: **110 : (12 + 10) = 110 : 22 = 5** (ore).

Rezolvarea 2. Generalizare

Notând cu **d** distanța dintre punctele de plecare, cu v_1 şi v_2 cele două viteze, atunci timpul **t** după care se întâlnesc este: $t = d : (v_1 + v_2)$; în cazul dat: **t = 110 : (12 + 10) = 5** (ore).

Rezolvarea 3

Fie C punctul de întâlnire a celor doi biciclişti. Se observă că primul biciclist parcurge AC, *în timpul* în care celălalt biciclist parcurge BC. Deoarece timpul este acelaşi, raportul dintre distanțe este acelaşi cu raportul dintre viteze, adică **12 : 10 = 6 : 5**, adică BC este cât $\frac{5}{6}$ din AC. Deoarece AB + BC = **= 110**, iar BC = $\frac{5}{6}$ AC, putem putem privi problema ca una simplă de sumă şi raport, în care reprezentarea grafică poate fi:



Rezultă că **11** părți, fiecare egală cu a şasea parte din AC sau cu a cincea parte din BC, reprezintă **110** km. Atunci AC = **110 : 11 x 6 = 60** (km), iar CB = **= 110 : 11 x 5 = 50** (km). În cât timp se întâlnesc cei doi biciclişti? Deoarece **t = d : v**, rezultă **t = 60 : 12 = 5** (ore) sau **t = 50 : 10 = 5** (ore).

Rezolvarea 4

Dacă notăm cu **t** numărul de ore după care s-au întâlnnit cei doi biciclişti, atunci avem: **12 t + 10 t = 110 <=> 22t = 110 => t = 110 : 22 => t = 5** (ore).

28.

Rezolvarea 1

După câte ore se întâlnesc cele două trenuri? **14** ore – **10** ore = **4** ore.
Câți km parcurg cele două trenuri într-o oră? **60** km + **55** km = **115** km.
Câți km parcurg cele două trenuri în **4** ore? **4 x 115** km = **460** km.

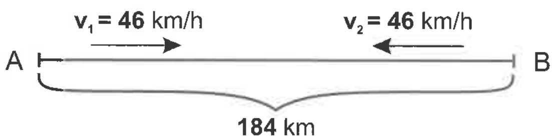
Rezolvarea 2

După câte ore se întâlnesc cele două trenuri? **14** ore – **10** ore = **4** ore.
Câți km parcurge primul tren în **4** ore? **4 x 60 = 240** km.
Câți km parcurge al doilea tren în **4** ore? **4 x 55** km = **220** km.
Care este distanța dintre cele două gări? **240** + **220** = **460** (km).

29. Rezolvarea 1

Câți km a parcurs primul vapor în **3** ore? **3 x 25 = 75** (km).
Câți km a parcurs al doilea vapor în **3** ore? **3 x 30** km **= 90** (km).
Câți km au parcurs împreună cele două vapoare? **75 + 90 = 165** (km).
Ce distanță a rămas de parcurs după **3** ore? **200 – 165 = 35** (km).
Rezolvarea 2
Câți km parcurg cele două vapoare într-o oră? **25 + 30 = 55** (km).
Câți km parcurg cele două vapoare în **3** ore? **3 x 55 = 165** (km).
Ce distanță este între cele două vapoare după **3** ore de mers?
200 – 165 = 35 (km).

30.



Rezolvarea 1
Câți km parcurg cei doi într-o oră? **2 x 46 = 92** (km). În fiecare oră, distanța dintre ei se micşorează cu **92** km. După câte ore cei doi automobilişti se întâlnesc **? 184 : 92 = 2** (ore).
Rezolvarea 2
Deoarece cei doi automobilişti merg cu aceeaşi viteză şi au pornit în acelaşi timp, întâlnirea se va produce la jumătatea distanței dintre cele două oraşe, adică la **184 : 2 = 92** km. În câte ore parcurge fiecare dintre cei doi automobilişti distanța de **92** km ? **92 : 46 = 2** (ore).

31. Rezolvarea 1
Dacă automobilele se întâlnesc la jumătatea distanței, înseamnă că automobilul care a plecat din B parcurge mai mult cu **50** km decât cel care a plecat din A (cu o oră mai târziu). Practic al doilea automobilist, până la întâlnire, recuperează **50** km. În cât timp? Dacă într-o oră recuperează **60 – 50 = 10** km, în câte ore recuperează **50** km? **50 : 10 = 5**. Ce distanță este între A şi B? **50 + 5 x 50 + 5 x 60 = 600** (km).
Rezolvarea 2
Notăm cu **t** timpul în care automobilul care pleacă din A parcurge jumătate din distanță şi cu **t – 1** timpul necesar celui de-al doilea. Rezultă **t x 50 = (t – 1) x 60 => 50 t = 60 t – 60 => 10 t = 60 => t = 6**. Atunci distanța dintre cele două localități este **6 x 50 + 5 x 60 = 600** (km).

32. Rezolvarea 1
Dacă în **2** ore primul biciclist parcurge o distanță pe care al doilea o parcurge în **4** ore, rezultă că distanța parcursă de primul biciclist *într-o singură oră* este parcursă de al doilea în **2** ore, căci **4 : 2 = 2**. *Timpul fiind acelaşi*, de **6** ore, rezultă că distanța parcursă de primul *până la întâlnire* este de **2** ori mai mare decât cea parcursă de al doilea biciclist. Rezultă că **4**

părți, fiecare egală cu distanța parcursă de al doilea biciclist până la întâlnire, reprezintă **108** km. Câți km a parcurs primul biciclist până la întâlnire? **108 : 3 = 36** (km). Dar al doilea? **36 x 2 = 72** (km).

Care a fost viteza primului biciclist? **72 : 6 = 12** (km/h). Dar viteza celui de-al doilea? **36 : 6 = 6** (km/h) sau **12 : 2 = 6** (km/h).

Rezolvarea 2

Dacă cei doi biciclişti se deplasează unul spre celălalt, înseamnă că în fiecare oră distanța dintre ei se micşorează cu suma vitezelor. Ei se întâlnesc după **6** ore. Notând v_1 şi v_2 viteza fiecăruia, putem scrie:

$6 \cdot (v_1 + v_2) = 108 \Rightarrow v_1 + v_2 = 18$ km/h. Primul parcurge în **2** ore cât al doilea în **4** ore, adică $2v_1 = 4v_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$. Rezultă $2v_2 + v_2 = 18 \Rightarrow v_2 = 18 : 3 = 6$ km/h; $v_1 = 12$ km/h.

Rezolvarea 3

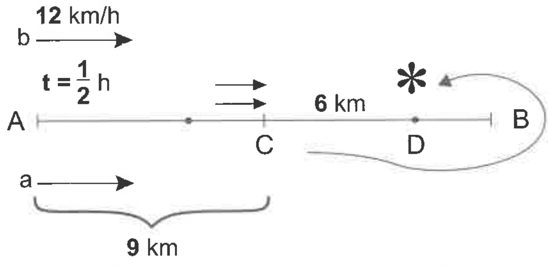
Notăm cu **d** distanța parcursă de primul în **2** ore sau de al doilea în **4** ore.

Atunci $v_1 = d : 2$, iar $v_2 = d : 4$. Rezultă: $6 \cdot \frac{d}{2} + 6 \cdot \frac{d}{4} = 108 \Rightarrow 12d + 6d =$

$= 432 \Rightarrow d = 24$ km. Deci: $v_1 = 24 : 2 = 12$ (km/h); $v_2 = 24 : 4 = 6$ (km/h).

33. În cât timp parcurge a doua maşină distanța dintre A şi B? **280 : 56 = 5** (ore). Câți km parcurge prima maşină în **5 ore**? **5 x 24 = 120** (km). Câți km mai are de parcurs prima maşină până în B? **280 – 120 = 160** (km). Câți km parcurg cele două maşini într-o oră? **24 + 56 = 80** (km). În câte ore se întâlnesc de la plecarea maşinii a doua din B? **160 : 80 = 2** (ore). După câte ore de la plecarea ambelor maşini din **A** se întâlnesc? **5 + 2 = 7** (ore).

34. Scrierea pe scurt a enunțului poate duce la următoarea reprezentare grafică:



1) Ce distanță parcurge biciclistul singur (într-o jumătate de oră)?
12 : 2 = 6 (km).
2) Ce distanță mai parcurge până este ajuns de automobil? **9 – 6 = 3** (km).
3) În cât timp parcurge biciclistul distanța de **3** km? Dacă într-o oră parcurge **12** km, atunci **3** km îi parcurge într-un sfert de oră, căci $3 : 12 = \frac{1}{4}$ (h). Într-un sfert de oră, automobilul a parcurs **9** km (ajunge pe biciclist).
4) Care este viteza automobilului (Câți km parcurge în **4** sferturi de oră)?
4 x 9 = 36 (km/h).
5) În cât timp parcurge biciclistul cei **6** km? Dacă într-o oră parcurge **12** km, cei **6** km îi parcurge în jumătate de oră, căci **6** este jumătatea lui **12** (sau:

$t = d : v \Rightarrow t = 6 : 12 = \frac{1}{2}$ h). În acest timp, $\frac{1}{2}$ h, automobilul a ajuns în B, unde a stat un sfert de oră şi apoi a parcurs drumul înapoi, până la întâlnirea cu biciclistul.

6) Cât timp este în mişcare automobilul după ce l-a ajuns pe biciclist?

$\frac{1}{2}$ h $-$ $\frac{1}{4}$ h $=$ $\frac{1}{4}$ h.

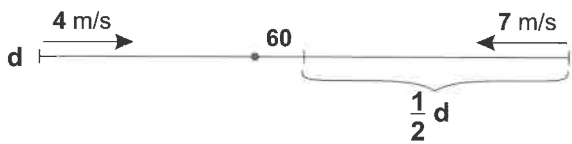
7) Ce distanță parcurge automobilul în $\frac{1}{4}$ h? **36 : 4 = 9** (km) sau $\mathbf{d = v \times t} \Rightarrow$ $\mathbf{d = 36 \cdot \frac{1}{4}} \Rightarrow \mathbf{d = 9}$ km. Deci distanța de la punctul în care automobilul a ajuns pe biciclist până la punctul de întâlnire, prin B, este de **9** km, adică CD + 2 DB = **9** km.

8) Care este distanța de la punctul de întâlnire până în B? $\mathbf{(9 - 6) : 2 = 1\frac{1}{2}}$ (km).

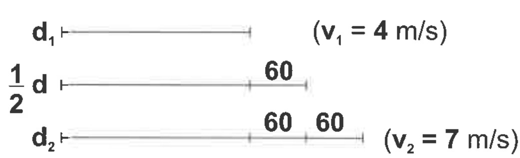
9) Care este distanța dintre A şi B? $\mathbf{9 + 6 + 1\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}}$ (km).

35. Rezolvarea 1

Reprezentarea grafică poate fi:



Unde s-ar fi întâlnit cei doi dacă ar fi avut viteze egale? La jumătatea drumului. Din ce cauză se întâlnesc dincolo de jumătatea distanței? Din cauză că primul atlet are viteza de **4** m/s, iar al doilea **7** m/s, deci într-o secundă al doilea parcurge mai mult cu **7 – 4 = 3** m/s (diferența de viteze). În tot traseul, cu câți m parcurge mai mult al doilea atlet față de primul? Cu dublul lui **60**, adică cu **2 x 60 = 120** m, deoarece primul atlet parcurge cu **60** m mai puțin decât jumătatea distanței pe care au parcurs-o împreună, adică:



În câte secunde al doilea atlet parcurge mai mult cu **120** m față de primul atlet? Dacă într-o secundă el parcurge cu **3** m mai mult față de primul atlet, distanța de **120** m este parcursă *în plus* în **40** secunde, căci **120 : 3 = 40**. Ce distanță parcurge primul atlet? **40 x 4 = 160** (m). Dar al doilea? **40 x 7 = 280** (m). *Sau*, pe scurt: Notăm cu **t** timpul necesar parcurgerii distanței de către cei doi atleți. atunci: $\mathbf{7t - 4t = 2 \cdot 60} \Rightarrow \mathbf{3t = 120} \Rightarrow \mathbf{t = 120 : 3 = 40}$ (s);

$\mathbf{d_1 = 40 \cdot 4 = 160}$ (m); $\mathbf{d_2 = 40 \cdot 7 = 280}$ (m).

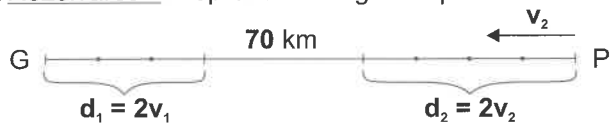
Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus. Deoarece timpul este acelaşi, rezultă că distanțele sunt diferite datorită diferentei de viteze. De câte ori este mai mică prima viteză față de a doua? $\mathbf{4 : 7 = \frac{4}{7}}$. Rezultă că $\mathbf{d_1 = \frac{4}{7}\ d_2}$.

Dacă $\mathbf{d_2 - d_1 = 2 \times 60}$ m, atunci $\mathbf{d_2 - \frac{4}{7} d_2 = 120}$ m => $\mathbf{\frac{3}{7} d_2 = 120}$ m =>

$\mathbf{d_2 = 120 : 3 \times 7}$ <=> $\mathbf{d_2 = 280}$ m; $\mathbf{d_1 = \frac{4}{7} \cdot 280}$ m => $\mathbf{d_1 = 160}$ m.

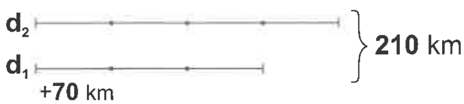
36. Rezolvarea 1 Reprezentarea grafică poate fi:



Cum se ajunge la această reprezentare?

Deoarece $\mathbf{v_1 = \frac{3}{4} v_2}$, rezultă că $\mathbf{d_1}$ este cât $\mathbf{\frac{3}{4}}$ din $\mathbf{d_2}$, timpul fiind acelaşi.

Reprezentarea grafică a distanțelor parcurse poate fi aşezată astfel:



Din desen rezultă că **7** părți, fiecare parte fiind egală cu $\mathbf{\frac{1}{4}}$ din $\mathbf{d_2}$, reprezintă $\mathbf{210 - 70 = 140}$ km.
Câți km a parcurs primul în **2** ore? $\mathbf{140 : 7 \times 3 = 20 \times 3 = 60}$ km.
Câți km a parcurs cel de-al doilea în **2** ore? $\mathbf{140 : 7 \times 4 = 20 \times 4 = 80}$ km

sau $\mathbf{\frac{3}{4} \cdot d_2 = 60}$km => $\mathbf{d_2 = 60 : 3 \times 4 = 80}$ km. Care a fost viteza medie a motociclistului care a plecat din Galați? $\mathbf{60 : 2 = 30}$ (km/h). Care a fost viteza medie a celuilalt motociclist? $\mathbf{80 : 2 = 40}$ (km/h) sau $\mathbf{\frac{3}{4} v_2 = 30}$ =>
=> $\mathbf{v_2 = 30 : 3 \times 4 = 40}$ (km/h).

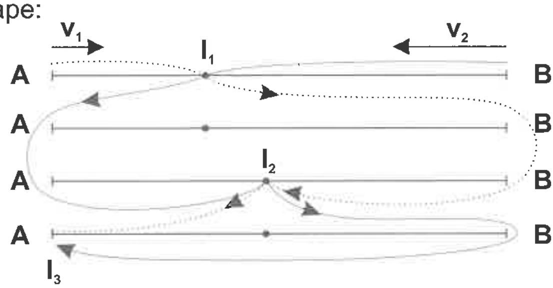
Rezolvarea 2

Păstrăm notațiile de mai sus. Dacă $\mathbf{d_1 = 2v_1}$, $\mathbf{d_2 = 2v_2}$, iar $\mathbf{v_1 = \frac{3}{4} v_2}$, rezultă

$\mathbf{2v_1 + 2v_2 + 70}$ **km** $\mathbf{= 210}$ **km** => $\mathbf{2\frac{3}{4} v_2 + 2v_2 = 140}$ **km** => $\mathbf{3v_2 + 4v_2 = 2 \cdot 140}$

=> $\mathbf{7v_2 = 280}$ => $\mathbf{v_2 = 280 : 7}$ => $\mathbf{v_2 = 40}$ (km/h); $\mathbf{v_1 = \frac{3}{4} \cdot 40}$ => $\mathbf{v_1 = 30}$ (km/h).

37. Fie $\mathbf{I_1}$ şi $\mathbf{I_2}$ punctele în care cei doi atleți se întâlnesc respectiv prima dată şi a doua oară. De câte ori este parcursă distanța de la AB de către cei doi atleți? Pentru a răspunde la această întrebare, apelăm la o reprezentare grafică, pe etape:



În desen se observă că până la întâlnirea I_1, cei doi atleți acoperă împreună *o singură dată* distanța **AB**. De la această întâlnire până la întâlnirea I_2, ei mai acoperă încă *de 2 ori* această distanță; apoi până la I_3 mai acoperă încă de **2** ori distanța **AB**. Deci de la pornire până la întâlnirea în A (I_3), cei doi atleți acoperă împreună de **5** ori distanța AB. În enunț se spune că de la plecare până la întâlnirea în A au trecut **60** s. În cât timp parcurg cei doi împreună o singură dată **AB** (până la I_1)? **60 : 5 = 12** (s). Dacă prima întâlnire a avut loc la **48** m depărtare de A, rezultă că primul atlet a parcurs **48** m în **12** secunde. Care era viteza lui de deplasare? **48 : 12 = 4** (m/s). Câți m străbate acesta în cele **60** de secunde de la plecare? **60 x 4 = 240** (m). Însă de la plecare până la întâlnire, atletul care a plecat din A acoperă de **2** ori distanța **AB**, deci **2AB = 240**, de unde **AB = 240 : 2 = 120** (m). Dacă până la prima întâlnire au trecut **12** s, iar primul atlet parcurge, până la I_1, **48** m, rezultă că al doilea atlet a parcurs **120 – 48 = 72** m tot în **12** s. Care era viteza celui de-al doilea atlet? **72 : 12 =6** (m/s).

38. Rezolvarea 1

Pentru a afla vitezele, trebuie să determinăm distanțele parcurse până la întâlnire.

1) Cu câți km parcurge mai mult cel cu viteza mai mare? Dacă într-o oră parcurge mai mult cu **17** km, în **2** ore, până la întâlnire, va parcurge cu **2** x **17 = 34** km mai mult. De aici, putem privi problema ca pe una ce cuprinde suma şi diferența mărimilor. Deci:

2) Care este dublul distanței parcurse de automobilul cu viteza mai mică? **258 – 34 = 224** km (*sau*: Care este dublul distanței parcurse de celălalt automobilist? **258 + 34 = 292** km).

3) Ce distanță a parcurs fiecare? Cel cu viteză mai mică: **224 : 2** = **112** km. Dar celălalt? **112 + 34** = **146** (km) (*sau*: **292 : 2 = 146; 146 – 34 = 112**).

4) Care este viteza fiecăruia? Cel cu viteza mai mică: **112 : 2 = 56** (km/h); celălalt: **56 + 17 = 73** sau **146 : 2 = 73** (km/h). În exercițiu: $v_1 = (258 - 2 \times 17) :$ $: 2 : 2 = 56$ (km/h); $v_2 = (258 + 2 \times 17) : 2 : 2 = 73$ (km/h).

Rezolvarea 2

Notăm cu v_2 viteza mai mică, iar cu v_1 cealaltă viteză. Dacă $d = v \cdot t$, iar $v_1 = v_2 + 17$, rezultă: $d = 2v_1 + 2v_2 \Rightarrow 258 = 2(v_2 + 17) + 2v_2 \Rightarrow 258 = 4v_2 + 34$ $\Rightarrow v_2 = (258 - 34) : 4 \Rightarrow v_2 = 56$ km/h; $v_1 = v_2 + 17 \Rightarrow v_1 = 56 + 17 \Rightarrow v_1 = 73$ km/h.

Rezolvarea 3

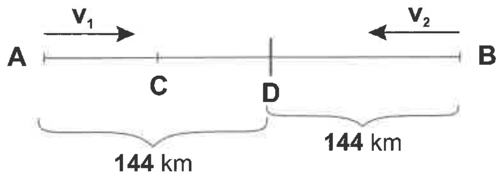
Notăm cu d_1 şi v_1 distanța şi, respectiv, viteza primului autoturism în **2** ore; cu d_2 şi v_2 mărimile pentru al doilea. Se ştie că $v_1 = v_2 + 17$. Atunci $d_1 : v_1 = 2$,

iar $d_2 : v_2 = 2$, adică $\frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} = 2 \Rightarrow \frac{d_1 + d_2}{v_1 + v_2} = 2 \Rightarrow \frac{258}{v_2 + v_2 + 17} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2v_2 + 17 = 258 : 2 \Rightarrow v_2 = (129 - 17) : 2 \Rightarrow v_2 = 56$ km/h; $v_1 = 56 + 17 \iff$

$\iff v_1 = 73$ km/h.

39. Scrierea pe scurt şi reprezentarea grafică a relațiilor dintre date pot fi:



Când motociclistul a pornit din B, biciclistul se afla în C. În timp ce motociclistul parcurge distanța **BD**, biciclistul parcurge distanța **CD**. Deoarece viteza motociclistului este de **3** ori mai mare decât viteza biciclistului, timpul necesar fiind acelaşi, rezultă că distanța **CD** este de **3** ori mai mică decât distanța **DB**. Dar **BD = AD = 288 : 2 = 144**. Atunci **CD = = 144 : 3 = 48** km, iar **AC = 144 – 48 = 96** km. Biciclistul parcurge distanța de **96** km în **8** ore, deci are viteza de **96 : 8 = 12** km/h; motociclistul are viteza de **3 x 12 = 36** km/h.

40. 1) Care este jumătatea drumului? **60 : 2 = 30** (km). Jumătatea drumului este de **3** ori mai mare decât distanța care a rămas de parcurs ciclistului (până la jumătate) după ce a mers **2** ore. Atunci:

2) Ce distanță i-a rămas ciclistului (până la jumătate)? **30 : 3 = 10** (km). Câți km a parcurs ciclistul până a pornit motociclistul (timp de **2** ore)? **30 – 10 = 20** (km).

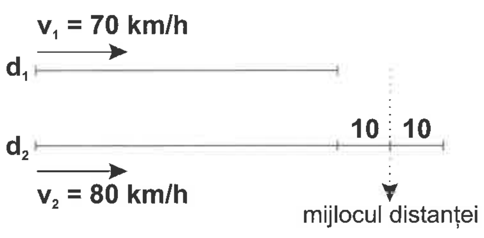
3) Într-o oră, câți km parcurge ciclistul (care este viteza sa)? **20 : 2 = 10** (km/h).

4) Care este viteza motociclistului? **10 x 3 = 30** (km/h).

5) La ce oră se întâlnesc? **10 + 2 + 1 = 13**, deci la ora **13**.

41. Asemănătoare cu problema **35.**

O reprezentare grafică a distanțelor parcurse poate fi :



1) Cu câți km a parcurs mai mult maşina cu viteza mai mare? **10 + 10 = 20** (km).

2) Cu câți km a parcurs mai mult *într-o oră*? **80 – 70 = 10** (km).

3) În cât timp a parcurs mai mult cu **20** km (în cât timp s-au acumulat în plus cei **20** km)? Dacă într-o oră o maşină a parcurs în plus **10** km, atunci, pentru a parcurge în plus **20** km, trebuie să treacă atâtea ore de câte ori **10** se cuprinde în **20**, adică **20 : 10 = 2** ore.

4) Care este distanța dintre cele două oraşe? **2 • 80 + 2 • 70 = 160 + 140 = = 300** (km).

42. Rezolvarea 1

Dacă în **4** ore cei doi bicicliști parcurg **84** km, într-o oră amândoi parcurg **84 : 4 = 21** km. Dacă în **4** ore unul a parcurs cu **4** km mai mult decât celălalt, rezultă că într-o oră va parcurge mai mult cu **4 : 4 = 1** km. Deci $\mathbf{v_1 + v_2 = 21}$, iar $\mathbf{v_1 - v_2 = 1}$. Este o problemă de *sumă și diferență*.

Rezultă: $\mathbf{v_2 = (21 - 1) : 2 = 10}$ (km/h), iar $\mathbf{v_1 = 11}$ (km/h).

Rezolvarea 2

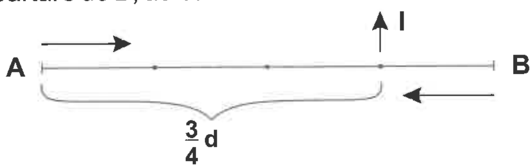
Dacă $\mathbf{d_1 + d_2 = 84}$ km, iar $\mathbf{d_1 = d_2 + 4}$ km, rezultă o problemă de *sumă și diferență*, adică $\mathbf{2d_2 = 80}$ km => $\mathbf{d_2 = 40}$ km, iar $\mathbf{v_2 = 40 : 4 = 10}$ (km/h); $\mathbf{v_1 = (84 - 40) : 4 = 11}$ (km/h).

Rezolvarea 3

Dacă $\mathbf{d_1 = v_1 \cdot 4}$, iar $\mathbf{d_2 = v_2 \cdot 4}$, în care $\mathbf{v_1 = v_2 + 4 : 4}$, rezultă $\mathbf{84 = 4(v_2 + 1) + 4v_2 <=> 84 = 8v_2 + 4 => v_2 = 10}$ km/h; $\mathbf{v_1 = 11}$ km/h.

43. 1) După câte ore de la plecare se întâlnesc cei doi? **11 – 8 = 3** (ore). Deoarece motociclistul merge cu o viteză de **3** ori mai mare, rezultă că punctul de întâlnire împarte drumul parcurs în **4** părți egale, dintre care **3** părți sunt parcurse de motociclist, iar o parte de ciclist.

Atunci întâlnirea are loc la **3** pătrimi depărtare de A și la o pătrime depărtare de B, adică:



2) Cât parcurge motociclistul în **3** ore? $\frac{3}{4}$; **3** sferturi din tot drumul AB.

3) În câte ore parcurge motociclistul toată distanța AB? (Dacă în **3** ore parcurge **3** sferturi din distanță, *într-o singură oră* parcurge *un singur sfert* din distanță, iar toată distanța, **4** sferturi, este parcursă în **4** ore).

3 : 3 x 4 = 4 (ore).

4) În câte ore parcurge biciclistul toată distanța AB? (Dacă în **3** ore parcurge un sfert din distanță, atunci cele **4** sferturi din distanță sunt parcurse în **4 x 3= = 12** ore; *sau:* Biciclistul are o viteză de **3** ori mai mică decât motociclistul, deci pentru aceeași distanță are nevoie de un timp de **3** ori mai mare decât timpul, de **4** ore, necesar motociclistului) **3 • 4 = 12** (ore) sau

$$\mathbf{3 : \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 = 12} \text{ (ore).}$$

5) La ce oră ajunge motociclistul în B? **8 + 4 = 12**, deci la ora **12**.

6) La ce oră ajunge biciclistul în A? **8 + 12 = 20**, deci la ora **20**.

44. 1) În cât timp parcurge prima mașină distanța cele două localități?

12 – 8 = 4 (ore). (Deoarece viteza celei de-a doua mașini este mai mică de **2** ori, rezultă că timpul necesar pentru parcurgerea aceleiași distanțe este de **2** ori mai mare decât **4**, adică **2 x 4 = 8** ore.)

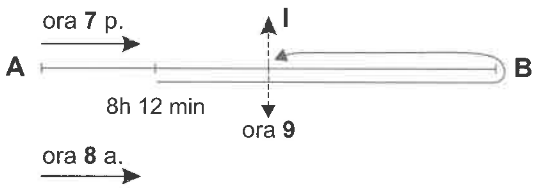
2) La ce oră ajunge a doua mașină în localitatea de unde a plecat prima mașină? **8 + 2 • 4 = 16**, deci la ora **16**.

3) În cât timp parcurge prima maşină **2** treimi din distanţă? Datorită raportului dintre viteze, întâlnirea are loc la **2** treimi de prima localitate şi la o treime de a doua localitate.

Dacă în **4** ore prima maşină parcurge toată distanţa, atunci **2** treimi din distanţă sunt parcurse în **2 • 4 : 3 = 2** h şi **40** min.

4) La ce oră s-au întâlnit cele două maşini? **8**h + **2**h + **40** min = **10**h **40** min.
(*sau*: Dacă în **8** ore a doua maşină parcurge toată distanţa, pentru o treime din distanţă vor fi necesare **2** h şi **40** min., căci **8h : 3 = 2** h şi **40** min., iar întâlnirea are loc la **8**h + **2**h + **40** min = **10**h şi **40** min.).

45. O reprezentare grafică poate fi:



1) Cât timp merge pietonul până este *ajuns* de autobuz?
8 h 12 min – 7 h = 1 h şi **12 min = 72 min.**

2) În cât timp parcurge autobuzul *aceeaşi* distanţă (pe care pietonul a parcurs-o în **72** minute)? **8**h **12** min – **8** h = **12** min. Fiind aceeaşi distanţă, timpul necesar autobuzului este mai mic, deci viteza pietonului este mai mică.

3) De câte ori este mai mare viteza autobuzului faţă de viteza pietonului?
72 min : **12** min = **6** (ori) *sau* : $\mathbf{d = 12 \cdot v_a = 72 \cdot v_p \Rightarrow v_a = 6 \cdot v_p}$.

4) Cât timp merge pietonul *din momentul* în care a fost depăşit de autobuz *până la întâlnirea* cu acesta? **9 h – 8 h 12 min = 48 min.**

5) În cât timp parcurge autobuzul distanţa parcursă de pieton în cele **48** minute? Într-un timp de **6** ori mai mic, căci viteza lui este de **6** ori mai mare decât viteza pietonului, adică **48 : 6 = 8** (minute).

6) În cât timp autobuzul a parcurs distanţa, la dus, de la punctul de întâlnire până în B? **(48 – 8) : 2 = 20** (minute). Am împărţit la **2**, deoarece distanţa IB este parcursă de **2** ori.

7) În cât timp autobuzul a parcurs toată distanţa **AB?**
12 + 8 + 20 = 40 (minute).

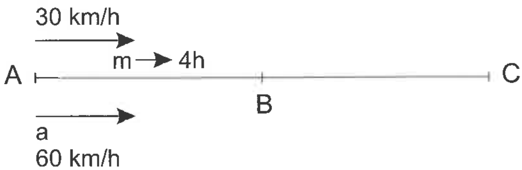
8) Care a fost viteza autobuzului? **24 000 : 40 = 600** m/min.

9) Dar viteza pietonului? **600 : 6 = 100** m/min.

46. Potrivit formulei **d = v • t**, pentru a calcula distanţa parcursă în zbor de graur, trebuie să determinăm timpul în care a zburat graurul, viteza sa fiind de **90** km/h **= 25** m/s. De unde putem afla timpul? El este acelaşi şi pentru cei doi iepuraşi care parcurg *împreună* distanţa de **400** m. Deoarece **t = d : v**, iar viteza de apropiere a celor doi iepuraşi este suma vitezelor lor, adică **3 + 2 = 5** (m/s), rezultă **t = 400 : 5 = 80** (secunde). Ce distanţă a parcurs graurul în **80** secunde? **80 x 25 = 2000** m = **2** km.

47. În zborul ameţitor al rândunicii ne este greu să desluşim câte „drumuri" a parcurs ea. Dacă observăm că timpul cât maşina a parcurs drumul prin tunel este de **10 : 40** = $\frac{1}{4}$ oră, iar viteza rândunicii este de **4 x 40** km **= 160** km/h, atunci putem determina distanța parcursă de aceasta în interiorul tunelului astfel: **160 : 4 = 40** km. *Sau*: Dacă în timpul **t** automobilul a parcurs distanța de **10** km (având viteza de **40** km/h), atunci rândunica, tot în timpul **t**, având o viteză de **4** ori mai mare, va parcurge o distanță de **4** ori mai mare decât **10** km, adică **4 x 10** km = **40** km.

48. Rezolvarea 1



1) Câți km parcurge motociclistul în cele **4** ore? **4 x 30 = 120** (km). Deci când autoturismul s-a pus în mişcare, motociclistul avea un avans de **140** km (se afla în punctul **B**). Pentru ca autoturismul să ajungă motociclistul, el trebuie să recupereze distanța de **120** km. (Când autoturismul a plecat la drum, motociclistul îşi continuă deplasarea spre punctul **C**.) Este posibil ca autoturismul să ajungă motociclistul? Da, deoarece viteza maşinii este mai mare.

2) Cât recuperează într-o oră (care este diferența de viteze)?
60 – 30 = **30** (km/h).

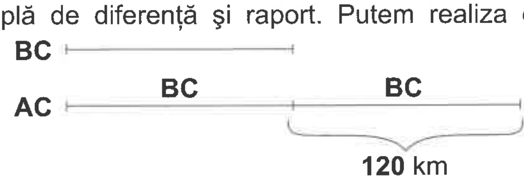
3) În cât timp autoturismul recuperează **120** km (În cât timp autoturismul ajunge motociclistul)? Dacă într-o oră autoturismul recuperează **30** km, pentru a recupera **120** km are nevoie de un timp mai mare, adică într-un număr de ore de câte ori se cuprinde **30** în **120.** Deci: **120 : 30 = 4** (ore). În exercițiu: **4 x 30 : (60 – 30) = 120 : 30 = 4** (ore).

Rezolvarea 2

Plecând de la exercițiul anterior şi notând cu **d** distanța pe care trebuie să o recupereze autoturismul, cu v_1 viteza motociclistului, cu v_2, viteza autoturismului, în care $v_2 > v_1$, putem generaliza: $t = d : (v_2 - v_1)$, dacă $v_2 > v_1$. Aplicând această formulă, obținem: t = **(4 x 30) : (60 – 30) = 4** (ore).

Rezolvarea 3

Fie **C** punctul în care autoturismul ajunge motociclistul. Se observă (pe reprezentarea grafică) că, în timp ce autoturismul parcurge distanța **AC** (tot drumul), motociclistul parcurge numai distanța BC. Deci **AC – BC = 4 x 30 = 120** (km). Deoarece *timpul* este *acelaşi* pentru ambele autovehicule, diferența de distanță provine din faptul că vitezele sunt diferite. Rezultă că distanța **AC** va fi mai mare decât distanța **BC** de atâtea ori de câte ori viteza motociclistului se cuprinde în viteza autoturismului, adică **AC : BC = 60 : 30 => AC : BC = 2**. Deci **AC – BC = 120** km, **AC = 2 • BC**. De aici avem o problemă simplă de diferență şi raport. Putem realiza o reprezentare grafică:



În cât timp autoturismul ajunge motociclistul? **120 : 30 = 4** (h) sau **2 x 120 : 60 = 4** (h).

Observație: Elevii mari pot lucra cu ajutorul proporțiilor: $\frac{AC}{60} = \frac{BC}{30}$ =>

$\frac{AC}{BC} = \frac{60}{30}$ => $\frac{AC - BC}{BC} = \frac{60 - 30}{30}$ => $\frac{120}{BC} = 1$ => **BC =120** km; **120 : 30=4** (h).

Rezolvarea 4

Se ştie că **d = v • t**. Deci **AC = 60 • t,** iar **BC = 30 • t.** Atunci **AC – BC =** **= 60t–30t => 60t – 30t = 4 x 30 => 30t = 120 => t = 120 : 3 => t = 4 h.**

49. Rezolvarea 1

Pentru a afla distanța, trebuie să ştim viteza şi timpul, căci **d = v • t**. Viteza este dată. Cum putem afla timpul? Găsim vreo relație între distanța de **18** km şi viteze? Din ce cauză a rămas al doilea biciclist în urmă? Datorită faptului că în fiecare oră el a parcurs cu **3** km mai puțin, căci **12 – 9 = 3**. În câte ore a rămas în urmă cu **18** km (în câte ore a parcurs primul biciclist distanța dintre localități)? În atâtea ore de câte ori **3** se cuprinde în **18**, adică **18 : 3 = 6** ore. Care este distanța dintre cele două localități? (Dacă într-o oră primul biciclist parcurge **12** km, în **6** ore parcurge o distanță de **6** ori mai mare) **6 x 12 = 72** (km).

Rezolvarea 2 Din relația $d = v_1 \cdot t_1$ sau $d = v_2 \cdot t_2$, rezultă:

d = [18 : (12 – 9)] • 2 = (18 : 3) x 12 = 6 x 12 = 72 (km) *sau*

d = [6 +(18 : 9)] x 9 = (6 + 2) • 9= 8 • 9 = 72 (km).

Rezolvarea 3

Primul biciclist parcurge toată distanța (**d**) în $t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{d}{12}$, iar al doilea

în $t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{d}{9}$. Deoarece $v_1 > v_2$, rezultă $t_1 < t_2$. Din enunț rezultă $t_2 - t_1 =$

$= 18 : 9 = 2$ (ore). Deci $\frac{d}{9} - \frac{d}{12} = 2 \Rightarrow \frac{4d - 3d}{36} = 2 \Rightarrow \frac{d}{36} = 2 \Rightarrow d = 72$ km.

50. Rezolvarea 1

Dacă cel de-al doilea pieton mai are nevoie de o oră şi jumătate pentru a ajunge la destinație, ce distanță mai are de parcurs? Într-o oră parcurge **4** km, iar într-o jumătate de oră **2** km, deci mai are de parcurs **4 + 2 = 6** km. În cât timp s-a acumulat această diferență de **6** km? Dacă într-o oră al doilea pieton rămâne în urmă cu **6 – 4 = 2** km, pentru a se acumula diferența de **6** km, câte ore au trecut (în câte ore a parcurs primul pieton tot drumul)? Atâtea ore, de câte ori **2** se cuprinde în **6**, adică **6 : 2 = 3** ore. Care este distanța dintre cele două localități? **6 x 3 = 18** (km) sau $4 \cdot (3 + 1\frac{1}{2}) = 12 + 4 + 2 = 18$ (km).

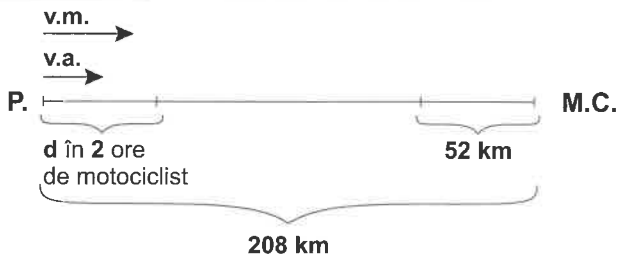
Rezolvarea 2

Primul pieton parcurge distanța **d** în $t_1 = \frac{d}{6}$, iar al doilea în $t_2 = \frac{d}{4}$.

Deoarece $v_1 > v_2$, rezultă $t_1 < t_2$. Din enunț rezultă $t_2 - t_1 = 1\frac{1}{2}$ ore =>

$\frac{d}{4} - \frac{d}{6} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{d}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 12 \cdot 3 : 2 \Rightarrow d = 18$ (km).

51. Rezolvarea 1 Reprezentarea grafică poate fi:



Care era viteza medie a motociclistului? **208 : 8 = 26** (km/h). Câți km parcurge acesta în **2 ore? 2 x 26 = 52** (km). Câți km mai parcurge motociclistul până este ajuns de automobilist? **208 – 52 – 52 = 104** (km). În câte ore parcurge motociclistul cei **104** km? **t = d : v => t = 104 : 26 = 4** (ore). În acest timp de **4** ore automobilistul parcurge toată distanța de la Ploieşti până la punctul în care l-a ajuns pe motociclist. Ce distanță parcurge automobilistul în **4** ore? **52 + 104 = 156** (km). Care era viteza automobilistului? **156 : 4 = 39** (km/h).

Rezolvarea 2

Care era viteza motociclistului? **208 : 8 = 26** (km/h). În cât timp ar mai parcurge motociclistul ultimii **52** km? **52 : 26 = 2** (ore). Câte ore a fost „urmărit" de automobilist? **8 – 2 – 2 = 4** (ore). Care este distanța parcursă de automobilist în **4** ore? **208 – 52 = 156** (km). Care era viteza automobilistului? **156 : 4 = 39** (km/h).

Rezolvarea 3

Notăm cu v_a viteza automobilistului. Care era viteza motociclistului? **208 : 8 = 26** (km/h). Câți km parcurge acesta în **2** ore? **2 x 26 = 52** (km). În cât timp (**t**) recuperează automobilistul cei **52** km? $52 : (v_a - 26) = t$. Ce distanță parcurge motociclistul până ce este ajuns? **208 – 52 = 156** (km). În cât timp (**t**) parcurge automobilistul distanța de **156** km? $156 : v_a = t$. Cei doi timpi sunt egali. Rezultă: $156 : v_a = 52 : (v_a - 26) \Rightarrow \dfrac{156}{v_a} = \dfrac{52}{v_a - 26} \Rightarrow 52 \cdot v_a =$

$= 156v_a - 156 \cdot 26 \quad / : 26 \Rightarrow 2 \cdot v_a = 6v_a - 156 \Rightarrow 6v_a - 2v_a = 156 \Rightarrow 4v_a = 156$
$\Rightarrow v_a = 156 : 4 \Rightarrow v_a = 39$ (km/h).

52. Este o problemă mai dificilă pe care o putem rezolva dacă înțelegem următoarele:

– al doilea biciclist rămâne în urmă cu **2** m la fiecare secundă;

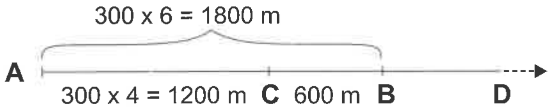
– cât timp primul biciclist verifică roțile bicicletei, al doilea îşi continuă deplasarea, trecând de primul biciclist;

– când îşi *reîncepe* deplasarea, primul biciclist trebuie să recupereze o anumită distanță, adică acel spațiu pe care al doilea l-a parcurs din dreptul punctului în care primul se oprise până la punctul în care al doilea se afla când s-a început „urmărirea";

– când primul începe „urmărirea", al doilea nu se opreşte, ci îşi continuă drumul.

Pentru a lucra numai cu numere naturale, transformăm minutele în secunde: **5** min = **300** s; **7** min = **420** s.

Graficul cu reprezentarea distanțelor parcurse poate fi următorul:



Rezolvarea 1

Câți m parcurge fiecare biciclist în primele **300** s? **I : 300 • 6 = 1800** (m); **al II-lea: 300 • 4 = 1200** (m). Cu câți m parcurge mai mult primul față de al doilea biciclist în aceste **300** s? **1800 – 1200 = 600** (m). Ca să îl *ajungă* pe al doilea (căci s-a oprit pentru verificarea roților), primului biciclist îi trebuie **7** minute, adică **420** s. Ce distanță parcurge primul biciclist până îl ajunge pe al doilea (după momentul opririi)? **420 x 6 = 2520** (m). Ce distanță a parcurs al doilea biciclist din momentul în care primul biciclist s-a oprit şi până l-a ajuns? **600 + 2520 = 3120** (m). În cât timp parcurge al doilea biciclist această distanță? **3120 : 4 = 780** secunde **= 13** minute. Câte minute a staționat primul biciclist**? 13 – 7 = 6** (minute) *sau* **(1200 + 600 + 2520) : 4 – (1 800 + + 2 520) : 6 = 1 080 – 720 = 360** (secunde) => **6** minute.

Rezolvarea 2

Câți m parcurge fiecare biciclist în primele **5** minute (în **300** s)? **I : 300** x **6 =** = **1800** (m); **II: 300** x **4 = 1200** (m). Cu câți m parcurge mai mult primul biciclist față de al doilea în aceste **5** minute? **1800 – 1200 = 600** (m). Dar într-o secundă (diferența de viteze)? **6 – 4 = 2** (m). (Deci când primul biciclist se opreşte, al doilea avea de recuperat **600** m, pentru care îi trebuie **600 : 4=** **= 150** secunde. După aceste **150** secunde, trece şi el prin punctul în care staționa primul biciclist). În cât timp parcurge al doilea biciclist cei **600** m? **600 : 4 = 150** (secunde). Ce distanță *mai* parcurge al doilea până când *primul reîncepe deplasarea* („urmărirea")? O distanță pe care primul o recuperează în **7** minute, adică în **420** secunde. Dacă într-o secundă recuperează **2** m, în **420** secunde, ce distanță recuperează? De **420** ori câte **2** m, adică **420 x 2 = 840 (m).** Deci când primul *reîncepe* deplasarea, al doilea biciclist avea un avans de **840** m. În cât timp a parcurs al doilea biciclist cei **840** m? **840 : 4 = 210** (s). Câte secunde a staționat primul biciclist? **150** secunde (când al doilea a parcurs cei **600** m) plus **210** secunde (când al doilea a parcurs **840** m), adică **150 + 210 = 360** (secunde) => **6** minute.

Rezolvarea 3

De la rezolvările anterioare, reținem că în **5** minute primul biciclist parcurge **1800** m, deci cu **600** m mai mult decât **1200** m, cât străbate al doilea în acelaşi timp. Ce distanță parcurge al doilea biciclist în timpul în care primul stă? Distanța de **600** m plus distanța pentru care primului biciclist îi sunt necesare **7** minute(sau **420** s) ca să o recupereze, adică **600 + 420 • (6 – 4)=** **= 600 + 840 = 1440** (m), căci $\mathbf{d = t \cdot (v_1 - v_2)}$. Cât timp primul biciclist verifică roțile bicicletei (în cât timp parcurge al doilea biciclist cei **1440** m)? **1440 : 4 =** **= 360** (secunde) => **6** minute.

53. (Asemănătoare cu problema anterioară) Câți km parcurge fiecare autoturism în cele **2** ore? **I: 2 x 48 = 96** (km); **II: 2 x 36 = 72** (km). Cu câți km parcurge mai mult primul autoturism față de celălalt în cele **2** ore? **96 – 72 =** **= 24** km. Ce distanță parcurge primul autoturism după reluarea deplasării până îl ajunge pe al doilea? **4 x 48 = 192** (km). Ce distanță a parcurs al doilea autoturism *din* momentul în care primul s-a oprit şi *până* este ajuns de acesta? **192 + 24 = 216** (km). În cât timp parcurge al doilea autoturism această distanță? **216 : 36 = 6** (ore). Cât timp a staționat primul autoturism? **6 – 4 = 2** (ore). Pentru alte soluții, a se vedea problema anterioară.

54. Într-o oră, al doilea recuperează **20** km, deoarece **60 – 40 = 20**. Dacă într-o oră recuperează **20** km, atunci în **15** minute, adică în $\frac{1}{4}$ h, ce distanță recuperează? De **4** ori mai puțin decât **20**, adică **20 : 4 = 5** (km).

55. Pentru a determina timpul necesar biciclistului, trebuie să determinăm distanța **AB**. La ora când primul motociclist a ajuns în **B**, al doilea mai avea **2** ore de mers, căci **10 – 8 = 2**. Ce distanță mai avea de parcurs al doilea ca să ajungă în **B**? **2 x 30 = 60** (km). Din ce cauză s-a realizat această diferență de distanță? Din cauză că al doilea parcurge într-o oră cu **20** km mai puțin, căci **50 – 30 = 20**. În câte ore s-a realizat diferența de **60** km? Dacă într-o oră diferența este de **20** km, atunci diferența de **60** km s-a acumulat în **60 : 20 = 3** ore, tocmai timpul în care primul motociclist a parcurs toată distanța **AB**. În câte ore al doilea motociclist a parcurs tot drumul? **3 + 2 = 5** (ore). La ce oră au plecat din oraşul **B**?, adică **? + 5 = 10. 10 h – 5 h = 5** h, deci la ora **5**. Care este distanța dintre **A** şi **B**? **3 x 50 = 150** (km) sau **5 x 30 = 150** (km). În cât timp parcurge biciclistul **150** km? **150 : 10 = 15** (ore). La ce oră ajunge biciclistul în **B**? **5h + 15h = 20h**, deci la ora **20**.

56. Câți km parcurge ciclistul în **4** ore? **4 x 20 = 80** (km). Câți km recuperează motociclistul într-o oră? **60 – 20 = 40** (km). În câte ore recuperează motociclistul **80** de km? **80 : 40 = 2** (h). În câte ore parcurge motociclistul tot drumul? **240 : 60 = 4** (h). De câte ore are nevoie motociclistul, *după ce l-a ajuns pe ciclist*, ca să ajungă în **B**? **4 – 2 = 2** (h). Ce distanță parcurge ciclistul în aceste **2** ore? **2 x 20 = 40** (km). Ce distanță parcurg amândoi *în sens contrar* (Ce distanță i-a rămas ciclistului până în **B**)?

240 –	**(80**	**+**	**40**	**+**	**40)**	**= 240 – 160 = 80** (km).
	ciclist singur		până este ajuns		până când motociclistul ajunge în B	

Din momentul în care cei doi se deplasează în sensuri contrare, în câte ore parcurg amândoi distanța de **80** km?

a) Câți km parcurg amândoi într-o oră? **60 + 20 = 80** (km).

b) În cât timp vor parcurge cei **80** km? **80 : 80 = 1** (h).

Deci după o oră de la plecarea motociclistului din B se întâlnesc.

La ce oră se întâlnesc?

11 h	**+ 4 h**	**+ 1 h**	**= 16 h**
(ora plecării)	până când motociclistul a ajuns în B	până la întâlnire	

Sau:
pentru ciclist, calculul este:

(11 – 4) h +	**4 h +**	**2 h +**	**2 h +**	**1 h =**	**16 h**
ora plecării	singur	până a fost ajuns	până a ajuns în B	până la întâlnire	

La ce distanță de orașul B se întâlnesc?

Dacă motociclistului i-a trebuit o oră după ce a plecat din B ca să se întâlnească cu ciclistul, înseamnă că punctul de întâlnire este aşezat tocmai la distanța de **60** km de B (viteza motociclistului) *sau*: **240 – (80 + 40 + 40 + + 20) = 240 – 180 = 60** (km de B). **Răspuns:** orele **16**; la **60** km distanță de B.

57. Rezolvarea 1

Pentru a afla viteza lui Tibi, trebuie să determinăm *distanța* pe care o parcurge şi *timpul* necesar. De unde le putem afla? Distanța este aceeaşi pentru fiecare. Nu o putem determina, „combinând" relațiile date pentru ceilalți concurenți? Ba da. Cum? Când Dinu a terminat parcursul, Alex mai avea nevoie de **4** secunde, căci **2 + 2 = 4**. În aceste **4** secunde, el parcurge **12** m, căci **4 x 3 = 12**. În câte secunde a parcurs Dinu tot traseul (În câte secunde a parcurs Alex o distanță cu **12** m mai puțin decât tot traseul)?

a) Cu câți m rămâne în urmă Alex față de Dinu, într-o singură secundă (care este diferența de viteze)? **6 – 3 = 3** (m).

b) Atunci, câte secunde trebuie să treacă pentru ca Alex să rămână în urmă cu **12** m? **12 : 3 = 4** (secunde, timpul necesar lui Dinu pentru a parcurge tot traseul).

Rezultă că *timpul* necesar lui *Tibi* a fost de **6** s, căci **4 + 2 = 6**, iar distanța parcursă a fost de **6 x 4 = 24** m (*sau*: timpul necesar lui Alex a fost de **4 + 4 = = 8** s, iar distanța parcursă a fost de **8 x 3 = 24** m). *Viteza* de deplasare a lui Tibi a fost de **24 : 6 = 4** m/s.

Rezolvarea 2

Notăm cu **d** distanța parcursă, cu **t**, timpul necesar lui Tibi.

Putem scrie: **3(t + 2) = 6(t – 2) => 3t + 6 = 6t – 12 => 6 = 3 t – 12 => t = 6** (s); deoarece **d = 3(6 + 2) => d = 24**, iar viteza lui Tibi era de **24 : 6 = 4** m/s.

58. a) Pentru a merge de la un capăt la altul al coloanei, biciclistul trebuie să treacă de ultimul sportiv din coloană. Dacă acesta ar staționa, biciclistul ar parcurge *singur* distanța egală cu lungimea coloanei. Or, coloana se deplasează în sens contrar biciclistului, deci trebuie să luăm în calcul şi viteza de deplasare a coloanei. Putem reformula problema: Ce distanță parcurge un biciclist, respectiv un sportiv (ultimul din coloană) în **5** secunde, dacă se deplasează în sens contrar şi având vitezele menționate? Câți m parcurg împreună coloana şi biciclistul într-o singură secundă? **(360 + 60) : 60 = 7** (m). Câți m parcurg în **5** secunde (Care este lungimea coloanei de sportivi)? **5 x 7 = 35** (m) *sau* **d = v • t => d = (360 + 60) : 60 x 5 = 7 x 5 = 35** (m).

b) Biciclistul trebuie să treacă de *primul* sportiv din coloană. Practic, între acesta şi biciclist este o distanță egală cu lungimea coloanei. Cu câți m va înainta mai mult biciclistul față de coloană (de primul sportiv) într-o singură secundă? **(360 – 60) : 60 = 5** (m).

Dacă într-o secundă biciclistul recuperează **5** m, atunci în **7** secunde, el recuperează toată distanța egală cu lungimea coloanei. Care este lungimea coloanei de sportivi? **7 x 5 = 35** (m) *sau:* **d = v • t => d = (360 – 60) : 60 x 7 = = 35** (m).

59. Rezolvarea 1

Care ar fi viteza acceleratului, dacă trenul personal ar staționa (adică viteza *aparentă* a acceleratului)? Deoarece în **2** secunde trenul accelerat trece de trenul personal, cu toată lungimea de **50** m, înseamnă că într-o secundă el ar parcurge **50 : 2 = 25** m/s. Or, trenul personal se deplasează în sens contrar, deci în cei **25** m/s este inclusă şi viteza acestuia. Care este viteza *reală* a acceleratului? **25** m/s – **10** m/s = **15** m/s.

Rezolvarea 2

Dacă notăm cu **v** viteza *reală* acceleratului, atunci viteza *aparentă* acestuia va fi **v + 10** m/s. Pentru a afla viteza reală a acceleratului, aplicăm formula **(v + 10) • t = d**, adică **v + 10 = d : t**; rezultă **v + 10 = 50 : 2 => v + 10 = = 25 => v = 15** m/s.

60. Pentru ca trenul accelerat să depăşească trenul personal, mergând în acelaşi sens, este necesar ca ultimul vagon să fie în continuarea locomotivei trenului personal.

Ce distanță parcurge trenul accelerat? Cei **60** m, cât este lungimea trenului personal, plus cei **42** m, cât este lungimea sa, pentru ca ultimul său vagon să depăşească locomotiva trenului personal, adică: **60 + 42 = 102** (m).

Cu ce viteză trec trenurile, unul pe lângă celălalt? Dacă notăm cu $\mathbf{v}_a$ viteza acceleratului, iar cu $\mathbf{v}_p$ viteza personalului, putem scrie că $\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_p$ este tocmai viteza cu care acceleratul trece de trenul personal.

Deoarece **v • t = d**, rezultă $(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{17} = \mathbf{102} \Rightarrow \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_p = \mathbf{102 : 17} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_p = \mathbf{6}$ m/s. Când deplasarea se face în sensuri contrare, distanța de **102** m este parcursă în **3** secunde de ambele trenuri. Ce distanță parcurg ambele trenuri într-o singură secundă, adică $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_p = ?$ Deoarece **v • t = d**, rezultă $(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{3} = \mathbf{102} \Rightarrow \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_p = \mathbf{34}$ m/s. De aici avem o problemă simplă de sumă şi diferență, adică $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_p = \mathbf{34}$ m/s, iar $\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_p = \mathbf{6}$ m/s. Obținem: $\mathbf{2v}_p = \mathbf{34 - 6} \Rightarrow \mathbf{v}_p = \mathbf{14}$ m/s, iar $\mathbf{v}_a = \mathbf{14 + 6} \Rightarrow \mathbf{v}_a = \mathbf{20}$ m/s.

61. Asemănătoare cu problema anterioară

a) Mergând în sensuri contrare, trenurile trec unul pe lângă celălalt cu o viteză egală cu suma vitezelor lor. Ce distanță parcurg trenurile *într-o singură* unitate de timp? **72 + 54 = 126** km/h = **35** m/s. Ce distanță parcurg trenurile în timpul în care trec unul pe lângă celălalt? **326 + 374 = 700** (m). În cât timp parcurg trenurile **700** m? **700 : 35 = 20** secunde.

b) Mergând în acelaşi sens, trenurile trec unul pe lângă celălalt cu o viteză egală cu diferența vitezelor lor. Cu câți km parcurge mai mult primul tren față de al doilea într-o singură unitate de timp? **72 – 54** = **18** km/h=**5** m/s.

Ce distanță parcurg trenurile în timpul în care trec unul pe lângă celălalt? **326 + 374 = 700** (m). În cât timp parcurg trenurile astfel **700** m?

700 : 5 = 140 secunde **= 2** min şi **20** secunde.

62. Rezolvarea 1

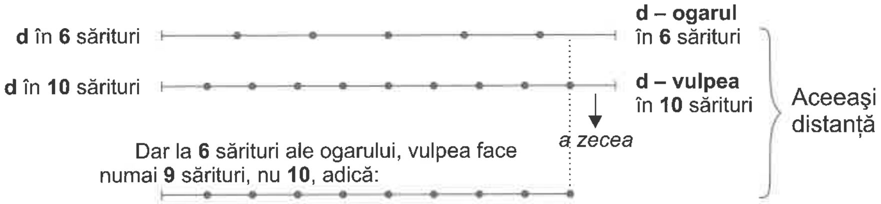
Pe scurt, ultimele două relații:

– ogarul face **2** sărituri *în timp* ce vulpea face **3**, iar distanța parcursă de ogar în **3** sărituri este parcursă de vulpe în **5** sărituri.

Aducem la acelaşi termen de comparație (acelaşi număr de sărituri ale ogarului), prin înmulțirea fiecărui termen din prima relație cu **3**, iar a celor din a doua cu **2**, astfel:

Ogarul	*Vulpea*
6 sărituri în timpul a	**9** sărituri, iar
6 sărituri fac cât	**10** sărituri

Se poate apela la o reprezentare grafică:



Câte sărituri de-ale vulpii recuperează ogarul la un grup de **6** sărituri? **10 – 9 = 1** (săritură). Câte grupe de câte **6** sărituri trebuie să efectueze ogarul pentru a ajunge vulpea (pentru a recupera cele **15** sărituri)? Dacă la o singură grupă de **6** sărituri el recuperează *o singură săritură de-a vulpii*, pentru a recupera **15** sărituri el va efectua atâtea grupe de sărituri, de câte ori se cuprinde **1** în **15**, adică **15 : 1 = 15** grupe. Câte sărituri efectuează ogarul pentru a ajunge vulpea? **6 x 15 = 90** sărituri.

Rezolvarea 2

1) Cât reprezintă o săritură a ogarului dintr-o săritură a vulpii? Dacă în **3** sărituri ogarul parcurge aceeaşi distanță cât vulpea în **5**, atunci într-o săritură, ogarul parcurge o distanță mai mică de **3** ori decât vulpea în **5**, adică $\frac{5}{3}$.

2) Câte sărituri de vulpe reprezintă cele **2** sărituri ale ogarului? Dacă una reprezintă cât $\frac{5}{3}$ sărituri de-ale vulpii, atunci **2** reprezintă cât $2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ sărituri de-ale vulpii. Dacă în timp ce ogarul efectuează **2** sărituri (echivalente cu $\frac{10}{3}$ sărituri de vulpe), vulpea face **3** sărituri, cât recuperează ogarul la un grup de **2** sărituri? $\frac{10}{3} - 3 = \frac{10}{3} - \frac{9}{3} = \frac{1}{3}$ (săritură de vulpe).

3) Cât recuperează ogarul la o singură săritură?

De **2** ori mai puțin decât $\frac{1}{3}$ adică $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$ săritură de vulpe.

4) Câte sărituri trebuie să efectueze ogarul, pentru a recupera cele **15** sărituri ale vulpii? Dacă la o săritură de-a lui, ogarul recuperează $\frac{1}{6}$ săritură de vulpe, câte sărituri îi trebuie pentru a recupera **15** sărituri de vulpe (ca să o ajungă)? $\mathbf{15 \cdot 1 : \frac{1}{6} = 15 \cdot 6 = 90}$ sărituri de-ale ogarului.

63. Încercați o reprezentare grafică (asemănătoare celei de la problema anterioară) şi veți constata că, la **2** sărituri de-ale sale, câinele câştigă **2** sărituri de iepure, adică la fiecare săritură de-a sa câştigă o săritură de iepure. Pentru a câştiga **75** sărituri (pentru a ajunge iepurele), câinele face **75 : 1 = 75** sărituri.

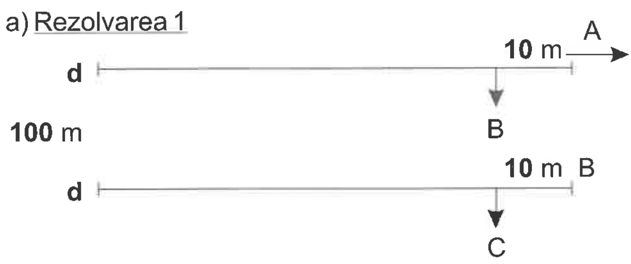
64. La un grup de **5** sărituri de-ale sale, câinele câştigă **8 – 6 = 2** sărituri de pisică, adică la o săritură de-a sa, el câştigă $\frac{2}{5}$ dintr-o săritură de pisică. Pentru a ajunge din urmă pisica, el trebuie să câştige **24** sărituri şi de aceea va face $\mathbf{24 : \frac{2}{5} = 24 \times 5 : 2 = 60}$ sărituri.

65. Deci ogarul face **6** sărituri în timp ce vulpea face **9** sărituri, iar ogarul în **3** sărituri parcurge cât vulpea în **7** sărituri. Aducem la acelaşi termen de comparație, înmulțind cu **2** fiecare membru al celei de-a doua relații, adică **6** sărituri de ogar fac cât **14** sărituri de vulpe.

La un grup de **6** sărituri de-ale sale, ogarul câştigă **14 – 9 = 5** sărituri de vulpe, iar la fiecare săritură a sa, câştigă **5** şesimi dintr-o săritură de vulpe. Pentru a câştiga **60** de sărituri de vulpe, ogarul va face **72** sărituri, căci **60 : 5 x 6 = 72**.

66. Relația referitoare la ritm, ce trebuie eliminată, este „vulpea face **9** sărituri, în timp ce ogarul face **6**". Dacă **3** sărituri ale ogarului fac cât **7** sărituri de vulpe, o săritură a sa face cât $\frac{7}{3}$ sărituri de vulpe. Cât recuperează din distanță (cât câştigă) ogarul la o singură săritură a sa? $\frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$ sărituri de vulpe. Câte sărituri trebuie să facă ogarul pentru a recupera cele **60** sărituri de vulpe? **60 • 3 : 4 = 45** sărituri.

67. a) Rezolvarea 1



Dacă la **100** m (adică după ce B parcurge şi cei **10** m), C rămâne în urmă cu **10** m, adică parcurge numai **90** m (căci **100 — 10 = 90**), atunci *în timpul* în care B parcurge cei **10** m, ce distanță parcurge C? Dacă **B** parcurge **100** m în timp ce copilul C parcurge **90** m, atunci când B parcurge **10** m, ce distanță parcurge copilul C? O distanță de **10** ori mai mică decât **90** m (căci şi **10** m este mai mic decât **100** m de **10** ori), adică **90 : 10 = 9 m.** Deci când A era pe punctul de sosire, B era la o distanță de **10** m, iar C era în urma lui B cu **9** m.

Răspuns: Când A ajuns pe punctul de sosire, C era la o distanță de **19** m față de **A**, căci **10 + 9 = 19** (m).

Rezolvarea 2

Se ştie că $\mathbf{v \cdot t = d}$. Atunci $\mathbf{v_A \cdot t = 100}$ m; $\mathbf{v_B \cdot t - v_C \cdot t = 10}$ m sau $\mathbf{v_A \cdot t - v_B \cdot t =}$ $\mathbf{= 10}$ m. Dacă A parcurge **100** m în timpul (*acelaşi*) cât B parcurge **100 m –**

– 10 m **= 90** m, rezultă că $\mathbf{v_B = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}}$ din $\mathbf{v_A}$. Dacă **B** parcurge **100** m, în

timpul (*acelaşi*) cât C parcurge **100** m **– 10** m**=90** m, înseamnă că viteza lui C

este cât $\mathbf{\frac{9}{10}}$ din viteza lui B, dar $\mathbf{\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}}$ din viteza lui A, adică $\mathbf{v_C = \frac{81}{100}}$ din $\mathbf{v_A}$

Deci *în timpul* în care A parcurge **100** m, C parcurge numai **81** m. Atunci când A ajunge la punctul de sosire, C mai avea de parcurs **19** m, căci **100 – 81 = 19** (m).

b) Rezolvarea 1

Dacă la **3** m, Dan recuperează **2** m (căci **3 – 1 = 2**), atunci la ce distanță recuperează **30** m (pentru a ajunge în acelaşi timp la punctul de sosire)? Deoarece **30** este mai mare decât **2** de **15** ori, atunci şi distanța totală parcursă de Dan va fi de **15** ori mai mare decât **3**, adică **15 x 3 = 45** (m); Ionuț a parcurs **15** m, căci **45 – 30 = 15** sau **45 : 3 = 15.**

Rezolvarea 2

Deoarece viteza lui Dan este de **3** ori mai mare decât viteza lui Ionuț, atunci Dan parcurge o distanță totală de **3** ori mai mare decât a prietenului său (timpul fiind acelaşi); deci distanța parcursă de Dan este cu **2** părți mai mare decât distanța parcursă de Ionuț, ceea ce reprezintă tocmai **30** m.

Câți metri a parcurs Ionuț? **30 : 2 = 15** (m).

Dar Dan? **15 + 30 = 45** sau **15 x 3 = 45** (m).

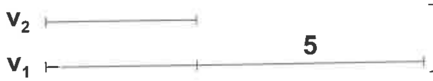
68. Rezolvarea 1

Notăm cu $\mathbf{v_1}$ viteza vaporului în apă stătătoare şi cu $\mathbf{v_2}$ viteza de curgere a apei. Când merge în sensul de curgere a apei, viteza **v** a vaporului este *compusă* din $\mathbf{v_1 + v_2}$. Când merge împotriva apei, viteza de deplasare a vaporului este de $\mathbf{v_1 - v_2}$, căci i se împotriveşte cursul apei. În general, $\mathbf{d = v \cdot t}$. Rezultă că:

a) $\mathbf{20 = (v_1 + v_2) \cdot 2 \iff v_1 + v_2 = 10}$ (când se deplasează în sensul de curgere a apei);

b) $\mathbf{20 = (v_1 - v_2) \cdot 4 \iff v_1 - v_2 = 5}$ (când se deplasează contra apei).

De aici putem privi problema ca pe una în care avem suma şi diferența a două mărimi, adică:



$10 \Rightarrow 2v_2 = 5 \Rightarrow v_2 = 2\frac{1}{2}$ km/h.

Rezolvarea 2

Când merge în sensul de curgere a apei, viteza de deplasare a vaporului este *compusă* din $v_1 + v_2$, adică din viteza vaporului în apă stătătoare şi din viteza de curgere a apei. La întoarcere, viteza de deplasare se obține prin deducerea lui v_2 din v_1, adică $v_1 - v_2$. *Într-o oră*, la dus, vaporul parcurge o *distanță* de $1 \cdot (v_1 + v_2) = v_1 + v_2$, iar la întoarcere, $v_1 - v_2$. Considerând drumul **d** un întreg **(1)**, dacă la dus vaporul îl parcurge în **2** ore, atunci *într-o singură oră* parcurge $\frac{1}{2}$ **d**, iar la întoarcere, într-o oră, $\frac{1}{4}$ **d**. Atunci $\frac{1}{2}d - \frac{1}{4}d =$
$= v_1 + v_2 - (v_1 - v_2) \Leftrightarrow \frac{2-1}{4} d = v_1 + v_2 - v_1 + v_2; \Leftrightarrow \frac{1}{4} d = 2 \cdot v_2$; dar
$d = 20$ km, atunci $2 \cdot v_2 = \frac{1}{4} \cdot 20 \Rightarrow v_2 = 5 : 2 \Rightarrow v_2 = 2\frac{1}{2}$ km/h.

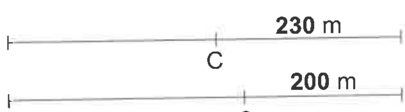
69. Ce distanță parcurge Vasile în patru paşi? **4 x 70 = 280** (cm). Care este lungimea pasului lui Ion? **280 : 7 = 40** (cm).

70. Notăm cu **d** distanța parcursă la dus sau la întors, cu v_1 viteza bărcii în apă stătătoare, cu v_2, viteza cursului de apă (care este, de fapt, şi viteza luntrei). Când merge în sensul de curgere a apei, viteza de deplasare a bărcii este compusă din $v_1 + v_2$, iar cea cu care merge împotriva curentului de apă este $v_1 - v_2$. Considerăm **d** un întreg. Atunci *într-o oră*, barca, la dus, parcurge $\frac{1}{4}$ din drum, iar la întors (împotriva apei), $\frac{1}{5}$ din drum. Aceste două relații le mai putem scrie şi în alt mod: dacă la dus viteza de deplasare este $v_1 + v_2$, rezultă că *într-o oră* parcurge $1 \cdot (v_1 + v_2)$; dacă la întors viteza este $v_1 - v_2$, rezultă că *într-o oră* parcurge $1 \cdot (v_1 - v_2)$. Atunci $\frac{1}{4}$ din drum este echivalent cu $v_1 + v_2$, iar $\frac{1}{5}$ din drum este echivalent cu $v_1 - v_2$. Rezultă:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = v_1 + v_2 - (v_1 - v_2) \Leftrightarrow \frac{1}{20} = 2v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{20} : 2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{40}$ km/h,

adică într-o oră luntrea parcurge $\frac{1}{40}$ din distanță, iar toată distanța o va parcurge în **40** de ore.

71.



A → 500 m

B → 500 m

Când $\left.\begin{array}{l} B \rightarrow \mathbf{500\ m} \\ C \rightarrow \mathbf{300\ m} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B \rightarrow \mathbf{5}\ m. \\ C \rightarrow \mathbf{3}\ m \end{array}$ Atunci $\left\{\begin{array}{l} C \rightarrow \mathbf{270 : 3 = 90}\ (m). \\ B \rightarrow \mathbf{90 \times 5 = 450}\ \mathbf{500 - 450} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{B = 50}\ (m). \end{array}\right.$

Cuprins